1

1) Fréchetovo rozdělení s d.f. $G_{1,\alpha}(x) = \exp(-x^{-\alpha})$, $x>0, \alpha>0$.

$$EX^j = \int_0^\infty x^j \, dG_{1,\alpha}(x) = \Gamma\left(1-\frac{j}{\alpha}\right) \text{ pro } j<\alpha.$$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty s^{a-1} e^{-s} ds$$

Dk.

hustota $\quad g_{1,\alpha}(x) = \alpha x^{-(1+\alpha)} \exp(-x^{-\alpha})$

$$EX^j = \alpha \int_0^\infty x^{j-\alpha-1} \exp(-x^{-\alpha}) dx$$

subst. $y = x^{-\alpha} \longrightarrow x = y^{-1/\alpha}$, $dx = -\frac{1}{\alpha} y^{-\frac{1}{\alpha}-1} dy$

"změna mezí"

$$EX^j = +\int_0^\infty y^{-\frac{j}{\alpha}} e^{-y} dy < \infty \text{ pro } -\frac{j}{\alpha} > -1$$

$EX^j = +\Gamma\left(1-\frac{j}{\alpha}\right)$ pro $j<\alpha$

$EX^j = +\infty$ pro $j \geq \alpha$

---

2) Max-stabilita rozdělení ext. hodnot.

D.f. EVD splňují $G^n(c_n x + d_n) = G(x)$, $n = 1, 2, \dots$

pro vhodnou volbu posloupností $\{c_n\}, \{d_n\}$, $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$.

SUITABLE CHOICE SEQUENCES

(Normovaná maxima nezáv. náh. veličin s d.f. G mají opět d.f. G).

• TYPY:

Gumbel : I. $G_0^n(x+\log n) = \exp(-n e^{-(x+\log n)}) = \exp(-e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$

Fréchet : II. $G_{1,\alpha}^n(n^{1/\alpha} x) = \exp(-n(n^{1/\alpha}x)^{-\alpha}) = \exp(-x^{-\alpha})$, $x>0, \alpha>0$

Weibull : III. $G_{2,\alpha}^n(n^{1/\alpha} x) = \exp(-n(-n^{1/\alpha}x)^{-\alpha}) = \exp(-(-x)^{-\alpha})$, $x<0, \alpha<0$

$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right)$, $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

$\parallel$

potřeba konvergence $F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n\to\infty} G(x)$

pro vhodné $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$

3) Limitní rozdělení normovaných minim.

$$\min(X_1,\dots,X_n) = -\max(-X_1,\dots,-X_n)$$

$$P\left(\max_{i\le n}(-X_i) \le a_n x + b_n\right) = 1 - P\left(\min_{i\le n}(X_i) \le -a_n x - b_n\right)$$

$a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{i\le n}(-X_i) \le a_n x + b_n\right) = G(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\min_{i\le n}(X_i) \le c_n x + d_n\right) = 1 - G(-x),$$

kde $c_n = a_n$, $d_n = -b_n$

protože jsem otočil a_n na $-a_n$!!!

---

4) <u>Zobecněné Paretovo rozdělení s d.f.</u>

$$W_{\gamma,\mu,\sigma}(x) = 1 - \left(1 + \gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\gamma},\quad \gamma \ne 0,\ \mu\in\mathbb{R},\ \sigma > 0$$

Při $\gamma > 0$ nosič $x \ge \mu$, při $\gamma < 0$ nosič $\mu \le x \le \mu - \frac{\sigma}{\gamma}$.

$EX = \mu + \frac{\sigma}{1-\gamma}$ pro $\gamma < 1$, $EX = +\infty$ pro $\gamma \ge 1$.

<u>hustota</u> $\quad w_{\gamma,\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\left(1 + \gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1}$

$\gamma > 0$: $\quad EX = \int_\mu^\infty \frac{x}{\sigma}\left(1 + \gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} dx$

$$\overset{p.p.}{=} \left[-x\left(1+\gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right]_{x=\mu}^{\infty} + \int_\mu^\infty \left(1+\gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\gamma} dx$$

$$= \mu + \left[\frac{\sigma}{\gamma}\left(1+\gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}+1} \frac{1}{1-\frac{1}{\gamma}}\right]_{x=\mu}^{\infty}$$

$$= \mu + \frac{\sigma}{1-\gamma} \text{ pro } \underline{\gamma < 1}$$

$EX = +\infty$ pro $\gamma \geq 1$

Platí i v případě $\gamma = 0$, tedy $W_{0,\mu,\sigma}(x) = 1 - e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}$

(posunuté exp. rozdělení).

Platí i v případě $\gamma < 0$, tedy

$$EX = \int_{\mu}^{\mu - \frac{\sigma}{\gamma}} \frac{x}{\sigma}\left(1 + \gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} dx$$

• LIMITING TAIL BEHAVIOUR : DOMAIN OF ATTRACTION

$\boxed{5}$ Paretovo rozdělení patří do sféry přitažlivosti Fréchetova rozdělení. $c_n = ?$, $d_n = ?$

$\exists c_n > 0, d_n \in \mathbb{R} : \lim F^n(c_n x + d_n) = G(x)$

$F \in MDA(G)$

$$W_{1,\alpha}(x) = 1 - x^{-\alpha}, \quad x \geq 1, \alpha > 0$$

$$W_{1,\alpha}^n(n^{1/\alpha}x) = \left(1 - (n^{1/\alpha}x)^{-\alpha}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}x^{-\alpha}\right)^n, \quad x \geq n^{-1/\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} W_{1,\alpha}^n(n^{1/\alpha}x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad x > 0$$

$\boxed{6}$ Exponenciální rozdělení patří do sféry přitažlivosti Gumbelova rozdělení.

$$W_0(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a}$$

$$W_0^n(x + \log n) = \left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n, \quad x \geq -\log n$$

$$\lim_{n\to\infty} W_0^n(x + \log n) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}$$

---

jaké parametry

$\boxed{7}$ Beta rozdělení patří do sféry přitažlivosti Weibullova rozdělení.

$$W_{2,\alpha}(x) = 1 - (-x)^{-\alpha}, \quad -1 \leq x \leq 0, \alpha < 0.$$

$$W_{2,\alpha}^n(n^{1/\alpha}x) = \left(1 - (-n^{1/\alpha}x)^{-\alpha}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}(-x)^{-\alpha}\right)^n, \quad -n^{-1/\alpha} \leq x \leq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} W_{2,\alpha}^{n}(n^{1/\alpha}x) = \exp(-(-x)^{-\alpha}), \quad x \le 0.$$

$\boxed{8}^*$ $X_1, X_2, \dots$ posl. i.i.d. veličin s d.f. $F(x)$, $x \ge 0$,

N má Poissonovo rozdělení se stř. hodnotou $\lambda > 0$,

N nezávislá na $\{X_i\}$.

$$P(\max_{i\le N} X_i \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\max_{i\le N} X_i \le x \mid N=n) \cdot P(N=n)$$

[n-folded conv.]

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F^n(x) \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda(1-F(x))}$$

není index !!!

Nechť $F(x) = W_{\gamma,0,\sigma}(x) = 1 - (1+\gamma\cdot\frac{x}{\sigma})^{-1/\gamma}$, $x>0, \gamma\ne 0, \sigma>0$

$$P(\max_{i\le N} X_i \le x) = \exp\{-\lambda(1+\gamma\tfrac{x}{\sigma})^{-1/\gamma}\}$$

$$= \exp\{-[(\lambda^{-\gamma}(1+\gamma\tfrac{x}{\sigma}))^{-1/\gamma}]\}$$

$$= \exp\{-(1+\gamma\tfrac{x}{\sigma}\lambda^{-\gamma}+\lambda^{-\gamma}-1)^{-1/\gamma}\}$$

$$= \exp\{-(1+\gamma\frac{x-\gamma^{-1}\sigma(\lambda^{\gamma}-1)}{\sigma\lambda^{\gamma}})^{-1/\gamma}\}$$

tj. d.f. zobecněného rozdělení ext. hodnot s parametrem γ

- Podobně pro $F(x) = W_{0,0,\sigma}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\sigma}}$, $x>0, \sigma>0$

$$P(\max_{i\le N} X_i \le x) = \exp\{-\lambda e^{-\frac{x}{\sigma}}\}$$

$$= \exp\{-e^{-\frac{(x-\sigma\log\lambda)}{\sigma}}\}$$

tj. d.f. Gumbelova rozd. (zobec. EVD s parametrem $\gamma=0$).