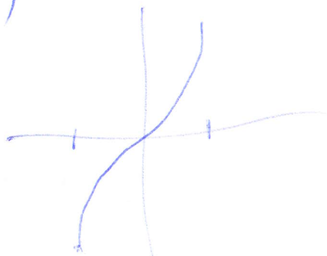
$\boxed{V\ 4.4}$ f rostoucí na (a,b) spojitá, $\exists f'(x_0) \neq 0$ $x_0 \in (a,b)$

$\Rightarrow \exists (f^{-1})'(\underbrace{f(x_0)}_{y_0})$ $\qquad (f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \in (-1,1)$

$(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$



$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y \in (-1,1)$ $\quad \sin x = y$

$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = y^2$

$\Rightarrow 1 - y^2 = \cos^2 x$

- $(\operatorname{arctan} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{arctan} y)' = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \dfrac{1}{1+y^2}$

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\qquad y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y^2 = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$

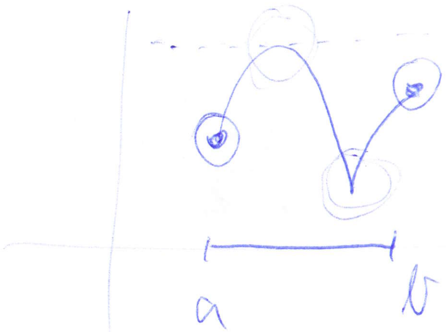
$\Rightarrow y^2 \cdot \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1+y^2}$

ANALOGICKY

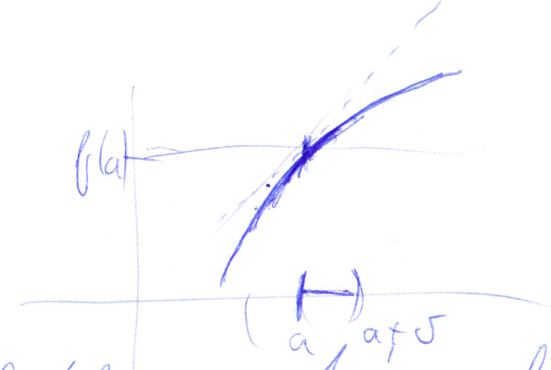
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \in (-1,1)$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Věta L 4.5 (Fermatova) Nechť $a \in \mathbb{R}$ je bod lokálního extrému funkce f na M. Pak $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a)=0$. 19-2.

ideálně



BÚNO $f'(a)>0$



__Dk:__ Sporem. Nechť a je bod lokálního extrému f na M, $\exists f'(a)$, ale $f'(a) \neq 0$. BÚNO $f'(a)>0$.

Pak $\exists \delta>0$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta)$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ (*)

($f'(a) \in \mathbb{R}$. K $\varepsilon = \frac{f'(a)}{2}$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in P(a,\delta)$:
$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon = \frac{f'(a)}{2} \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \left(\frac{f'(a)}{2}, \frac{3}{2} f'(a) \right)$)

Nyní $a<x$, $x \in (a, a+\delta)$ $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $f(x) > f(a)$ $\Rightarrow$ v a není lok. max.

pro $a>x$, $x \in (a-\delta, a)$ $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $f(x) < f(a)$ $\Rightarrow$ v a není lok. min

$\Rightarrow$ ↯ f nemá v a lok. extr. $\square$

__Typická úloha:__ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá. Nalezněte extrémy.

Víme, že spojitá fce na $[a,b]$ nabývá extrémů (V 3.10).

Podle V 4.5 je extrém jen v $\{x \in (a,b), f'(x)=0\} \cup \{x \in (a,b): f'(x) \text{ neex.}\} \cup \{a,b\}$

KVÍZ 1: (A) $f'(a)=0 \Rightarrow$ v a je lokální extrém

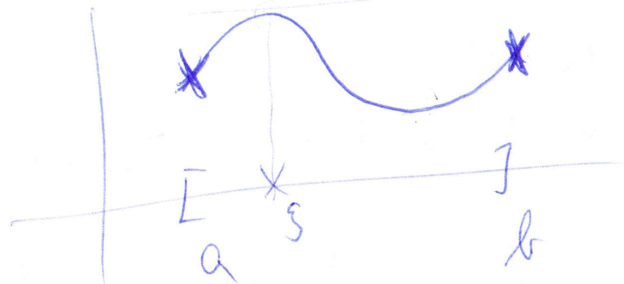
19-3

KVÍZ 2: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f'(0)=0$, $f'(1)=0$, $f'(x)\neq 0$ $\forall$ ostatní x

$\overset{?}{\Rightarrow}$ je v 0 a 1 extrém?

$\boxed{\text{Věta L4.6}}$ (Rolleova věta). Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a,b)$ a $f(a)=f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že $f'(\xi)=0$.

Dk: Je-li $f(x)=f(a)$ $\forall x \in (a,b)$, volme ξ libovolně v (a,b).



Nechť $\exists\, x_0 \in (a,b)$ $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$.

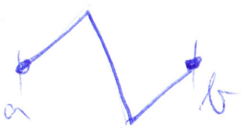
BÚNO $f(x_0) > f(a)$.

Podle V 3.10 (spojitost funkce a nabývání extrémů) existuje bod $\xi \in [a,b]$ tak, že $f(\xi) = \max\{f(x),\ x \in [a,b]\}$

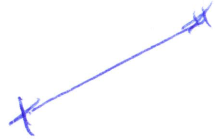
$f(x_0) > f(a) \Rightarrow \xi \neq a,\ \xi \neq b \Rightarrow \xi \in (a,b)$.

Víme, že $\exists\, f'(\xi)$, protože $f'(x)$ existuje $\forall\ x \in (a,b)$.

Podle Fermatovy věty $f'(\xi)=0$ $\square$

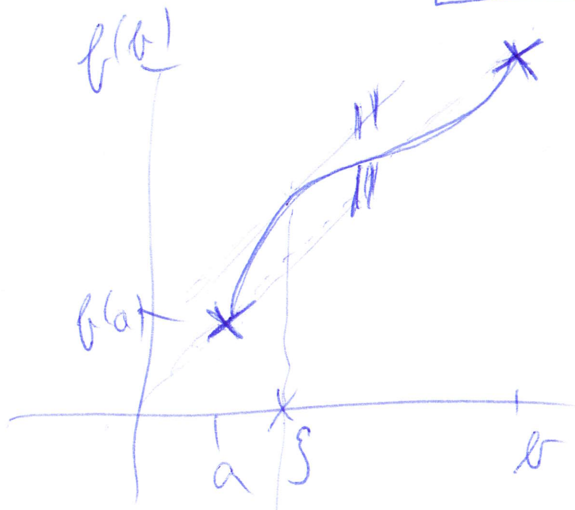
Pozn: 

předpoklad $\exists\, f'(x)$ všude je potřeba.


$f(a)=f(b)$ je potřeba

Věta L 4.7 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a,b). Pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



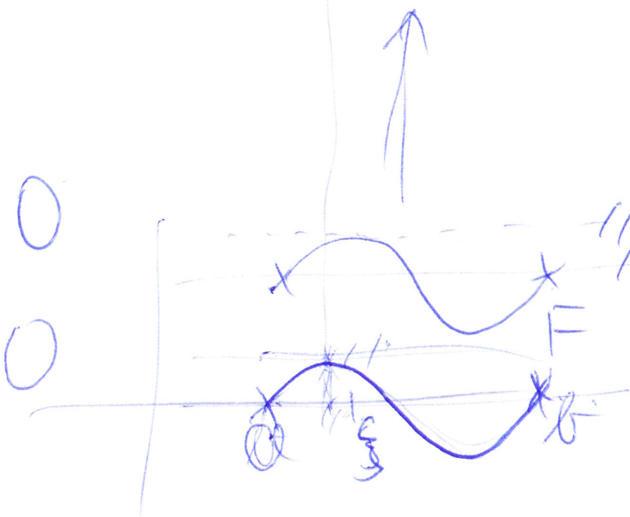
Dk: Položme

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a).$$

Pak F je spojitá na $[a,b]$.

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = 0$$



Dále $\exists F'(x)\ \forall x \in (a,b)$.

Podle Rolleovy věty $\exists \xi \in (a,b)$ tak, že $F'(\xi) = 0$.

Nyní $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - 0 - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\square$

Důsledek: Nechť $f'(x)=0$ pro všechny $x \in (a,b)$. Pak je f konstantní na (a,b). $\left(\forall x,y \in (a,b) \quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi) = 0\right)$

Def. Nechť J je interval. Množinu všech vnitřních bodů J nazýváme vnitřek J a značíme $\operatorname{int} J$.

Věta L 4.8 (o vztahu derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J má derivaci.

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f rostoucí na J.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f klesající na J.

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f neklesající na J.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f nerostoucí na J.

Dk: (i) Nechť $a, b \in J$, $a < b$.

Pak f je na $[a,b]$ spojitá a existuje $f'(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Podle Lagrangeovy věty $\exists \xi \in (a,b)$

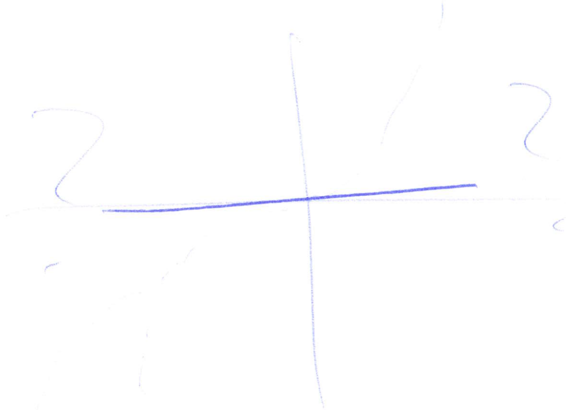
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) > 0$$

$(f' > 0$ na $\operatorname{int} J)$

$\overset{a<b}{\Longrightarrow} f(b) > f(a)$. (ii), (iii), (iv) analogicky $\square$

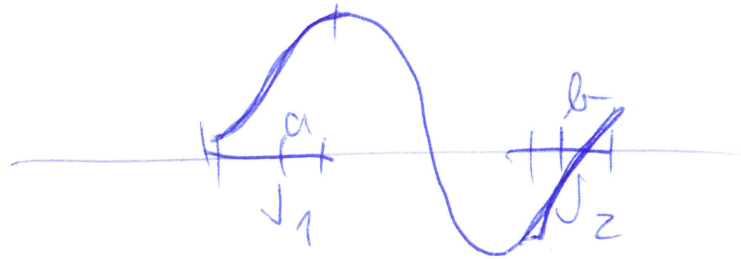
KVÍZ 3: $f' > 0$ na int $J \Rightarrow f$ rostoucí

$\exists f'$ všude, f rostoucí $\Rightarrow \begin{cases} f' > 0 \\ f' \geq 0 \\ \text{nelze říct.} \end{cases}$



Varování: (A) $f' > 0$ na $J_1 \cup J_2 \not\Rightarrow$ f je rostoucí na $J_1 \cup J_2$

$\Rightarrow$ f je rostoucí na J_1
f je rostoucí na J_2



(B) v důk V 4.8 raději použijte Lagrangeovu větu