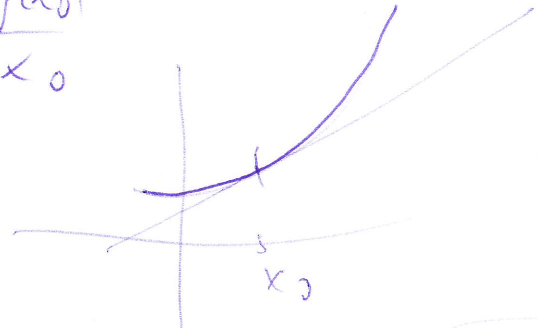
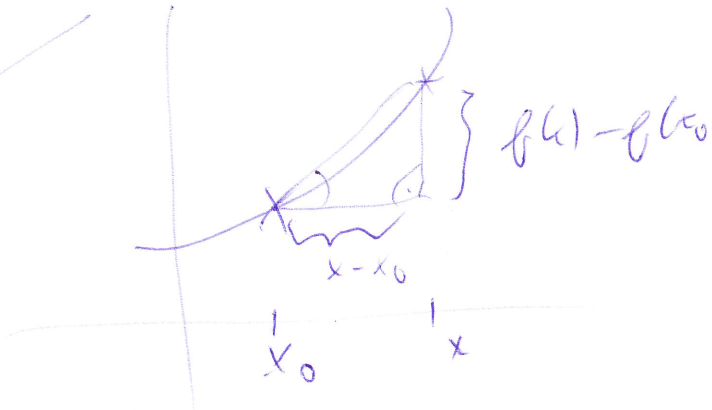
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$





VT4.3. (derivace složené funkce) Nechť f má v bodě y_0 derivaci, g má derivaci v x_0, je v x_0 spojitá a $y_0 = g(x_0)$. Pak
$$(f\circ g)'(x_0) = f'(y_0)\cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0),$$
je-li výraz vpravo definován.

myšlenka

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}}_{\downarrow\ f'(g(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow\ g'(x_0)}$$

$g(x)$ vnitřní

$$\frac{f(y)-f(g(x_0))}{y-g(x_0)} \quad \text{... vnější} \quad \searrow f'(g(x_0))$$

VOLSF $\lim_{x\to c} g(x) = A$, $\lim_{y\to A} f(y) = B$. Navíc

(S) f je spojitá v A nebo (P) $\exists \eta>0$ $g(x)\neq A$ $\forall x\in P(c,\eta)$

Pak $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$

Dk: Funkce f má v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$ derivaci, a proto je f definovaná na jistém okolí $B(y_0, \eta)$. Funkce g je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x_0) = y_0$, a proto je funkce $f(g(x))$ definovaná na jistém okolí $B(x_0, \delta)$.

18-2

1) Předpokládejme nejprve, že $f'(y_0) \in \mathbb{R}$. Definujme pomocnou funkci
$$S(y) = \begin{cases} f'(y_0) & y = y_0 \\ \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}, & y \in D(f) \setminus \{y_0\} \end{cases}$$

Platí $\lim_{y \to y_0} S(y) = S(y_0)$, tedy S je v bodě y_0 spojitá.

Pro $x \in D(f \circ g)$ platí
$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = S(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

(pro $g(x) \neq g(x_0)$ nadně… … rozšíří $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$

jinak $0 = 0$)

Odtud z VOLSF s podmínkou (S)
$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} S(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = S(g(x_0))\, g'(x_0) \stackrel{*}{=}$$
$$= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

2) Předpokládejme, že $f'(y_0) \in \mathbb{R}$, tj. $f'(y_0) \in \{+\infty, -\infty\}$. 18-3

Pak, ale $g'(x_0) \neq 0$.

Pak existuje $\tilde{\eta} > 0$ tak, že $\forall x \in P(x_0, \tilde{\eta})$: $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq 0$.

(např. pro $g'(x_0) > 0$ a $g'(x_0) \in \mathbb{R}$. K $\varepsilon = \frac{g'(x_0)}{2}$ $\exists \tilde{\eta} > 0$ ~~tak~~, že $\forall x \in P(x_0, \tilde{\eta})$: $\left| \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) \right| < \varepsilon = \dfrac{g'(x_0)}{2} \Rightarrow \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \in \left[\frac{g'(x_0)}{2}, \frac{3}{2} g'(x_0)\right]$)

Takže $\forall x \in P(x_0, \tilde{\eta})$ $g(x) \neq g(x_0)$

Odtud

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} S(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \overset{*}{=} f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0),$$

kde jsme použili VOLSF s podmínkou (P). $\square$

Připomeň: $g(x) \neq g(x_0)$ na $P(x_0, \tilde{\eta})$

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = S(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

$\boxed{\text{Věta L 4.4}}$ (derivace inverzní funkce)

Nechť f je na intervalu (a,b) spojitá a rostoucí (resp. klesající). Nechť f má v bodě $x_0 \in (a,b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Pozn.: 1) Pokud $f'(x_0) = 0$ a f rostoucí $\Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = +\infty$.

2) Pokud $f'(x_0) = \pm\infty$ a ostatní předpoklady platí, pak $(f^{-1})'(y_0) = 0$.

Dk.: Z věty 3.11 (o inverzní funkci) víme, že f^{-1} je spojitá na $f((a,b))$ a y_0 je vnitřní bod $f((a,b))$.

Víme $\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{vnější funkce}} = f'(x_0)$

vnitřní funkce

a $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$ + víme podmínku (P), neboť f^{-1} je rostoucí

Derivace elementárních funkcí:

- $(\text{const})' = 0$
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty)$

$$(\log x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} \stackrel{?}{=} 1 \cdot \frac{1}{x}$$

VOLSF vnitřní $g(h) = \frac{h}{x} \neq 0 \quad \forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}$ (P)

vnější $\frac{\log(1+y)}{y}$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Podle VOLSF s podmínkou (P) dostaneme

$\left(f(x_0) = y_0 \iff f^{-1}(y_0) = x_0 \right)$

$$f'(x_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}.$$

Odtud

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\square$

78-6

- $(\exp(x))' = \exp(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}$

$$(\exp x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1$$

- $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}\ ,\ x \in (0, \infty)\ ,\ a \in \mathbb{R}$ je parameter

$$(x^a)' = \left(e^{a \log x}\right)' = e^{a \cdot \log x} \cdot (a \cdot \log x)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x}$$

- $(a^x) = a^x \cdot \log a\ ,\ x \in \mathbb{R}\ ,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0$ je parameter.

$$(a^x)' = \left(e^{x \cdot \log a}\right)' = e^{x \cdot \log a} \cdot (x \log a)' = a^x \cdot \log a$$

- $(\sin x)' = \cos x\ ,\ x \in \mathbb{R}$

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \cos(x + \frac{h}{2})}{h} =$$

cos je zvezna funkcija

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = 1 \cdot \cos x$$

VOLSF $\frac{h}{2} \neq 0\ \forall h \neq 0$

(P)

- $(\cos x)' = -\sin x \quad , x \in \mathbb{R}$

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} -2 \cdot \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right) =$$

$$= - \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \sin x$$

VOLSF(P) $\frac{h}{2} \neq 0 \ \forall h \neq 0$

- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad x \in D(tg)$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- $(\mathrm{cotg}\, x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} \quad , x \in D(\mathrm{cotg}\, x)$

$$(\mathrm{cotg}\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$