$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx}{k^3+|x|^3}$$

Bodová konvergence:

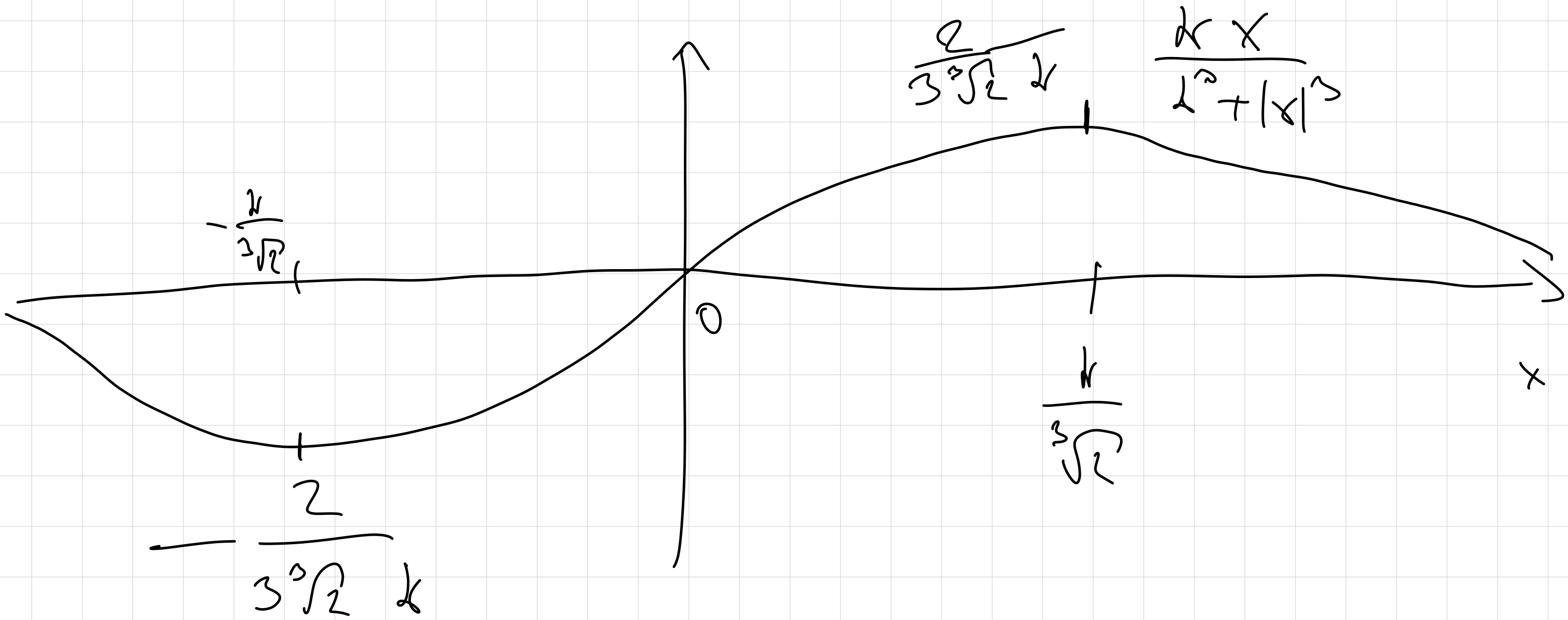
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k|x|}{k^3+|x|^3}}{k^{-2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{1+\frac{|x|^3}{k^3}} = |x| \in [0,\infty).$$

Tedy řada konverguje bodově pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

Nechť $x > 0$. Pak $\left(\frac{kx}{k^3+|x|^3}\right)' = \frac{k(k^3+x^3) - 3kx^3}{(k^3+x^3)^2} =$

$\frac{k^4 - 2kx^3}{(k^3+x^3)^2}$. Jelikož $\frac{k0}{k^3+0^3} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{kx}{k^3+|x|^3} = 0$,

a $\left|\frac{k(-x)}{k^3+|-x|^3}\right| = \left|\frac{kx}{k^3+|x|^3}\right|$ dostáváme


$\frac{2}{3\sqrt[3]{2}\,\alpha}$
$\frac{\alpha x}{\alpha^3+|x|^3}$
$-\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}$
0
$\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}$
x
$-\frac{2}{3\sqrt[3]{2}\,\alpha}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{k x}{k^3+|x|^3}\right| = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\, k^2}{\frac{3}{2} k^3} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot 3k},$$

nabývá se v bodech $x = \pm \frac{k}{\sqrt[3]{2}}$. Nelze tedy použít M-test na $\mathbb{R}$. Zvolíme-li ale $A \in (0,\infty)$, pak pro $k > A^2$, $k \geq 2$ platí

$$\sup_{x\in[-A,A]} \left|\frac{k x}{k^3+|x|^3}\right| \leq \frac{kA}{k^3+A^3} < \frac{k^{3/2}}{k^3} = \frac{1}{k^{3/2}}$$

[Protože $A < \sqrt{k} \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{k}} < \frac{k}{\sqrt[3]{2}}$ pro $\forall k \geq 2$ a tedy pro dané k platí $\left(\frac{kx}{k^3+|x|^3}\right)' > 0$ na $(0, A)$]

a tedy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx}{k^3+|x|^3} \rightrightarrows$ na $[-A, A]$.

Dokázat, že řada nekonverguje na $\mathbb{R}$ stejnoměrně není součástí požadavků. Postup uvádím jako něco navíc.

Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{8}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ lib.. Pak pro $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí, že volbou $x = n$ dostaneme

$$\sum_{k=n_0}^{n} \frac{kn}{n^3+|k|^3} \geq \sum_{n=n_0}^{n} \frac{k}{2n^2} = \frac{1}{2n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n_0(n_0+1)}{2}\right)$$

Protože $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n_0(n_0+1)}{2}\right) = \frac{1}{4}$

lze pro libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ volit $n > n_0$

tak, že $\frac{1}{2M^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n_0(n_0+1)}{2}\right) > \frac{1}{8}$. Pak pro

$x = n$ platí díky nezápornosti $\frac{kx}{k+|x^3|}$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx}{k^3+|x|^3} - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{kx}{k^3+|x|^3}\right| = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{kx}{k^3+|x|^3} \geq$$

$$\geq \sum_{k=n_0}^{n} \frac{kx}{k^3+|x|^3} \geq \frac{1}{8}.$$

Tedy není splněna definice stejnoměrné konvergence na $\mathbb{R}$.