6. cvičení z PSt — 9. a 12.11.2020

Kovariance

1. (Problém šatnářky) Náhodně přiřadíme n klobouků n lidem. Označíme X_i indikátor jevu „i-tý člověk dostal svůj klobouk“ a položíme $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Určete $\mathbb{E}(X)$, $var(X)$, σ_X.

2. Nechť n.n.v. $X_1, \ldots, X_n$ mají všechny stejné rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

(a) Určete $\mathbb{E}(S_n)$ a $var(S_n)$.

(b) Ukažte, jak lze počítat S_n z S_{n-1}, X_n a n.

(c) (Bonus) Sestavte program v libovolném jazyce a ověřte pomocí něj hodnotu μ některého rozdělení, o kterém jsme si říkali.

Spojité vektory

3. (Buffonova jehla) Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ. Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

4. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).

(a) Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.

(b) Jsou X, Y nezávislé?

(c) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.

(d) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.

5. Volme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1, se středem v počátku a v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

(b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.

(c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla LOTUS).

6. Buďte $X, Y, Z \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodné veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X+Y$? Spočtěte několika způsoby – podle konvolučního vzorce i „podle obrázku“.

(b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete jen hustotní funkci na intervalu $[0, 1]$.

7. Buďte $X, Y, Z \sim Exp(\lambda)$ nezávislé náhodné veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X + Y$?

(b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

8. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.

(b) Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|X}$.

9. Buďte $X, Y \sim Exp(\lambda)$ nezávislé náhodné veličiny.

(a) Určete sdruženou hustotu X a $X + Y$.

(b) Odvoďte, že podmíněná hustota $f_{X,X+Y}(x, a)$ je konstantní na $(0, a)$.

(c) Diskutujte, co to znamená.

10. Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[0, 1]$ a $[1, 0]$, tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
(b) Najděte marginální hustotu f_Y.
(c) Najděte podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ a podle věty o rozboru možností spočtěte $\mathbb{E}(X)$ (pomocí $\mathbb{E}(Y)$).
(e) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí předchozí části a symetrie.

Bonusy

11. Bod na sféře můžeme popsat pomocí zeměpisné délky $\lambda \in (-\pi, +\pi]$ a šířky $\varphi \in [-\pi/2, +\pi/2]$. Připomeňme, že takový bod pak má souřadnice $x = R\cos\varphi\cos\lambda$, $y = R\cos\varphi\sin\lambda$, $z = R\sin\varphi$. Pro jednoduchost položíme $R = 1$. Vybereme uniformně náhodný bod na sféře, jeho zeměpisná délka a šířka budou Λ, Φ.
(a) Ukažte, že $f_{\Lambda,\Phi}(\lambda, \varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi$ na množině $[-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ (a nula jinde).
(b) Ukažte, že podmíněná hustota „na rovníku“ je $f_{\Lambda|\Phi}(\lambda|\varphi = 0) = \frac{1}{2\pi}$.
(c) Ukažte, že podmíněná hustota „na hlavním poledníku“ je $f_{\Phi|\Lambda}(\varphi|\lambda = 0) = \frac{1}{2}\cos\varphi$?
(d) Přemýšlejte o tom, co to znamená: proč je to divné (když na sféře jsou všechny hlavní kružnice stejné). A taky, proč to není spor. Případně si přečtěte něco o Borel–Kolmogorově paradoxu, např. `https://en.wikipedia.org/wiki/Borel%E2%80%93Kolmogorov_paradox`.

K procvičení

12. Volme uniformně náhodně bod z kruhu o poloměru 1 se středem v počátku. Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.
(a) Najděte (podle pravidla LOTUS) $\mathbb{E}(\sqrt{X^2 + Y^2})$.
(b) Najděte (podle pravidla LOTUS) $\mathbb{E}(X^2 + Y^2)$.