Minimalita pomocí inverzů

Nyní ukážeme dvě pomocná lemmata charakterizující pravé inverzy racionálních matic.

Lemma 1. Nechť $\mathbf{G}$ je racionální matice typu $b \times c$ s b-tým invariantním faktorem α_b/β_b ve zkráceném tvaru. Následující podmínky jsou ekvivalentní

(1) $\alpha_b = 1$
(2) $\mathbf{G}$ má polynomiální pravý inverz.
(3) Pro každé $\mathbf{u} \in \mathbb{F}(D)^b$ platí: $\mathbf{uG} \in \mathbb{F}[D]^c \Rightarrow \mathbf{u} \in \mathbb{F}[D]^b$.

Důkaz. Nechť je

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \,|\, \mathbf{0}) \cdot \mathbf{B},$$

kde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\beta_1} & & & \\ & \frac{\alpha_2}{\beta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\alpha_b}{\beta_b} \end{pmatrix},$$

Smithův rozklad matice $\mathbf{G}$.
(1) $\Rightarrow$ (2): Je-li $\alpha_b = 1$, pak $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_b = 1$. Pak je $\mathbf{D}^{-1}$ polnomiální a $\mathbf{B}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ je polynomiální pravý inverz $\mathbf{G}$, kde $\mathbf{B}'$ je prvních b sloupců $\mathbf{B}^{-1}$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Nechť je $\mathbf{G}'$ polynomiální pravý inverz matice $\mathbf{G}$. Je-li $\mathbf{uG}$ polynom, je také $\mathbf{u} = \mathbf{uGG}'$ polynom.
(3) $\Rightarrow$ (1): Dokážeme nepřímo. Nechť je $\alpha_b \neq 1$ a položme $\mathbf{u} = \frac{\beta_b}{\alpha_b}\mathbf{e}_i\mathbf{A}^{-1}$. Protože $\frac{\beta_b}{\alpha_b}\mathbf{e}_i = \mathbf{uA}$ není polynomiální, není polynomiální ani $\mathbf{u}$. Naproti tomu $\mathbf{uG}$ polynomiální je, protože to je b-tý řádek matice $\mathbf{B}$. □

Podobné tvrzení dostaneme pro pravý inverz, jehož koeficienty leží v $\mathbb{F}[D^{-1}]$ (takovému inverzu říkáme *pravý inverz polynomiální v* D^{-1}).

Lemma 2. Nechť $\mathbf{G}$ je racionální matice typu $b \times c$ a α_b/β_b je b-tý invariantní faktor matice G v okruhu $\mathbb{F}[D^{-1}]$ ve zkráceném tvaru. Následující podmínky jsou ekvivalentní

(1) $\alpha_b = 1$
(2) $\mathbf{G}$ má pravý inverz polynomiální v D^{-1}.
(3) Pro každé $\mathbf{u} \in \mathbb{F}(D)^b$ platí: $\mathbf{uG} \in \mathbb{F}[D^{-1}]^c \Rightarrow \mathbf{u} \in \mathbb{F}[D^{-1}]^b$.

Důkaz. Plyne z předchozího lemmatu po substituci D^{-1} za D, vzhledem k tomu, že $\mathbb{F}(D) = \mathbb{F}(D^{-1})$. □

1. Příklad

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1+D & D & 1 \\ D & 1+D & 1 \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{G}_1$ má polynomiální pravý inverz

$$\mathbf{G}_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1+D & D \end{pmatrix}$$

a Smithův rozklad

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+D & D & 1 \\ D & 1+D & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

přičemž

$$\begin{pmatrix} 1+D & D & 1 \\ D & 1+D & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+D & D & 1 \end{pmatrix}$$

V $\mathbb{F}[C]$, $C = D^{-1}$, platí

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+C & 1 & C \\ 1 & 1+C & C \end{pmatrix}$$

a Smithův rozklad je

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1+C & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1+C & C \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

přičemž

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+C & C \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1+C & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Platí $\mathcal{K}(\mathbf{u})\mathbf{G}_1 = \mathcal{K}(\mathcal{Z}(\mathbf{u})\mathbf{G}_1) = (1,1,0)$ pro

$$\mathbf{u} = \left(D^{-1}+1, 1\right)$$

2. Příklad

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} D^2+D & 1 & D^2 \\ D^2 & \frac{D+1}{D} & D^2+D+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+C}{C^2} & 1 & \frac{1}{C^2} \\ \frac{1}{C^2} & C+1 & \frac{C^2+C+1}{C^2} \end{pmatrix}$$

Smithovy rozklady:

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} D & D+1 \\ 1+D & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{D} & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & D \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+C+C^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{C^2} & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C+1 & C^2 & 1 \\ 1 & C & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Platí:

$$(D^{-1}+1, 1) \cdot \mathbf{G}_2 = (1,0,1)$$

a

$$(C^{-1}+1+C, C^{-1}) \cdot \mathbf{G}_2 = (1, C, 0)\,.$$

3. Příklad

$$\mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} D+1 & D & 1 \\ D & D & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C+1 & 1 & C \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Smithovy rozklady:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Polynomiální pravý inverz v C:

$$\mathbf{G}_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & C+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Příklad

$$\mathbf{G}_4 = \begin{pmatrix} D & 1+D & 1 \\ 1+D+D^2 & D^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1+C & 1 \\ 1+C+C^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Smithovy rozklady:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & 1+D & 1 \\ 1+D+D^2 & D^2 & 0 \\ D & 1+D & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{C^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+C+C^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1+C & 1 \\ C+C^2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Polynomiální pravé inverzy:

$$\mathbf{G}_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1+D \\ 0 & D \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^2 \\ 1 & C+C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$