NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1
6. přednáška

Robert Šámal

Přehled

Náhodné vektory

Zpátky k základům

Limitní věty – zákony velkých čísel

Sdružená distribuční funkce (Joint cdf)

Definice

Pro n.v. X, Y na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definujeme jejich sdruženou distribuční funkci (joint cdf) $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ předpisem

$$F_{X,Y}(x,y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x \& Y(\omega) \leq y\}).$$

- Mohli bychom definovat i pro více než dvě n.v. $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$.
- Můžeme odsud odvodit pravděpodobnost obdélníku: $P(X \in (a,b] \ \& \ Y \in (c,d]) =$

Sdružená hustota (Joint pdf)

- Často můžeme sdruženou distribuční funkci psát jako integrál pomocí nezáporné funkce $f_{X,Y}$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dtds.$$

- Pak nazýváme n.v. X, Y sdruženě spojité. Funkce $f_{X,Y}$ je jejich *sdružená hustota.*
- Jako u jednorozměrného případu může být $f_{X,Y} > 1$!
- Stejně jako u jednorozměrného případu můžeme pak pomocí hustoty vyjádřit i další pravděpodobnosti:

$$P((X,Y) \in S) = \int_{S} f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

- $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$

LOTUS

- Stejně jako v diskrétním případu platí pro střední hodnotu funkce dvou n.v.

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dxdy.$$

- A stejně jako v diskrétním případu odsud odvodíme $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y) + c$.

Nezávislost spojitých náhodných veličin

Definice

Libovolné náhodné veličiny nazveme nezávislé (independent), pokud jevy $\{X \leq x\}$ *a* $\{Y \leq y\}$ *jsou nezávislé pro libovolná* $x, y \in \mathbb{R}$*. Ekvivalentně,*

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y),$$
$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Věta

Nechť X, Y *mají sdruženou hustotu* f_X, f_Y*. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- X, Y *jsou nezávislé*
- $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$

Vícerozměrné normální rozdělení

- $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$
- $f(t_1, \dots, t_n) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)\cdots\varphi(t_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_1^2+\cdots+t_n^2}{2}}$
- $f(t_1, \dots, t_n) = (2\pi)^{-n/2} e^{-r^2/2}$, kde $r^2 = t_1^2 + \cdots + t_n^2$
  radiálně symetrická funkce
- Necht $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ má hustotu f.
- $Z/\|Z\|$ je uniformně náhodný bod na n-rozměrné sféře.
- $Z_i \sim N(0, 1)$
- tudíž skal. součin s libovolným jednotkovým vektorem je $N(0, 1)$
- $\langle u, Z\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i Z_i$ má také rozdělení $N(0, 1)$

Vícerozměrné normální rozdělení obecné

- Obecněji můžeme vzít náhodný vektor s hustotou $c \cdot e^{Q(t)}$, kde $c > 0$ je vhodná konstanta a $Q(t)$ je obecná kvadratická funkce.
- Používá se ve strojovém učení.
- Souřadnice nejsou nezávislé!

Součet spojitých n.v.

Věta

Nechť spojité X, Y jsou n.n.v. Pak $Z = X + Y$ je také spojitá n.v. a její hustotu dostaneme jako konvoluci funkcí f_X, f_Y, neboli

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx.$$

Podmiňování

Definice

X je n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $B \in \mathcal{F}$.

$$F_{X|B}(x) := P(X \leq x \mid B)$$

K tomu přísluší hustotní funkce $f_{X|B}$.

Věta

Nechť $B_1, B_2, \ldots$ je rozklad Ω. Pak

$$F_X(x) = \sum_i F_{X|B_i} P(B_i) \quad a$$

$$f_X(x) = \sum_i f_{X|B_i} P(B_i).$$

Důkaz – spec. případ byl na cvičení (dva algoritmy).

Podmíněná hustota

Definice

Pro spojité n.v. X, Y definujeme podmíněnou hustotu (conditional pdf) předpisem

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

pokud je $f_Y(y) > 0$, jinak ji nedefinujeme.

- připomeňme, že $f_Y(y) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$
- pro fixované y je $f_{X|Y}(x|y)$ hustota

Podmíněná, sdružená a marginální hustota

Věta

$$f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy$$

Spojitá Bayesova věta

Přehled

Kovariance

Definice

Pro n.v. X, Y definujeme jejich kovarianci (covariance) předpisem

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)\big).$$

Věta

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

- $var(X) = cov(X,X)$
- $cov(X, aY + bZ + c) = a\,cov(X,Y) + b\,cov(X,Z)$
- $cov(X,Y) = 0$ pokud X, Y jsou nezávislé
- ale nejen tehdy

Korelace

Definice

Korelace náhodných veličin X, Y je definována předpisem

$$\varrho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)\, var(Y)}}.$$

- je to přenormovaná kovariance
- $-1 \leq \varrho(X,Y) \leq 1$ (cvič.)
- korelace neznamená příčinnou souvislost!

Rozptyl součtu

Věta

Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$*. Pak*

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) + \sum_{i \neq j} cov(X_i, X_j).$$

Spec. jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ *nezávislé, pak*

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i).$$

Rozptyl součtu – ukázka

Problém šatnářky: n klobouků přiřadíme náhodně n lidem.
X_i je indikátor jevu „i-tý člověk dostal svůj klobouk“
$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Přehled

První zákon velkých čísel

Věta

Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou n.n.v. se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Pak

$$\mathbb{E}\big((S_n - \mu)^2\big) \to 0.$$

Říkáme, že posloupnost průměrů konverguje k μ v L_2-normě (in mean square).

Slabý zákon velkých čísel (weak law of large numbers)

Věta

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou n.n.v. se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

Říkáme, že posloupnost S_n konverguje k μ v pravděpodobnosti (in probability).

Silný zákon velkých čísel (strong law of large numbers)

Věta

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou n.n.v. se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \mu \quad \textit{skoro jistě (tj. s pravděpodobností 1).}$$

Říkáme, že posloupnost S_n konverguje k μ skoro jistě (almost surely).

CLT