DEF. Rozdělení n.v. je subexponenciálního typu, (NEZÁPORNÉ N.V. X) (18.)

když pro dist. fci $P(x)$ platí, že

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - P^{n*}(x)}{1 - P(x)} = n, \quad n = 2, 3, \dots$$

$\approx 1 - P(x)$ konvergují k 0 pomaleji než u exp. rozdělení.

Pozn. $X_1, \dots, X_n$ iid s d.f. $P(x)$

$$\frac{P(X_1 + \dots + X_n > x)}{P(\max(X_1, \dots, X_n) > x)} = \frac{1 - P^{n*}(x)}{1 - P^n(x)} = \frac{\boxed{\dfrac{1 - P^{n*}(x)}{(1 - P(x))}}}{\cdot \underbrace{(1 + \dots + P^{n-1}(x))}_{\xrightarrow[x \to \infty]{} n}}$$

P^n … dist. fce maxima

$\xrightarrow[x \to \infty]{} 1$

tj. pravd., že úhrn škod přesáhne výši x je přibližně rovna psti, že alespoň jedna škoda je vyšší než x.

(= vysoké úhrny jsou způsobeny jednou vysokou škodou)

$\approx$ SINGLE BIG JUMP PRINCIPLE

VŽDY $\liminf_{x \to \infty} \dfrac{1 - P^{n*}(x)}{1 - P(x)} \geq n$

KRITÉRIUM:

nechť pro každé $0 < \lambda \leq 1$ existuje limita

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - P(\lambda x)}{1 - P(x)}$$ spojitá pro $\lambda = 1$.

Potom $P(x)$ je subexp. typu.

Př. Paretovo rozdělení: $a > 0$, $\alpha > 0$, $x \geq a$

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{\lambda x}{a}\right)^{-\alpha}}{\left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}} = \lambda^{-\alpha} \quad \checkmark$$

? Gamma

VYSOKÉ ŠKODY

$\boxed{\text{Př.}}$ Ověřte, že rozdělení s hust. $p(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{a^2}{2x}}$ je nebezp. typu:

$a > 0,\ x \geq 0$ / $x > 0$ / $x \geq \infty$?

d.f. $P(x) \stackrel{?}{=} 2 \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right]$

$$T(t) = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - P(tx)}{1 - P(x)} \stackrel{L.H.}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{t \cdot p(tx)}{p(x)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{t \cdot \cancel{\frac{a}{\sqrt{2\pi}}} \cdot t^{-\frac{3}{2}} \cdot \cancel{x^{-\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{a^2}{2tx}}}{\cancel{\frac{a}{\sqrt{2\pi}}} \cdot \cancel{x^{-\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{a^2}{2x}}} = \underbrace{t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{a^2}{2tx} + \frac{a^2}{2x}}}_{\lim \to \infty} =$$

$$= t^{-\frac{1}{2}} \lim_{x \to \infty} e^{\frac{-a^2 + ta^2}{2tx}} = t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{t}},$$

$t \in (0,1)$

$\boxed{\text{Př.}}$ Lognormální rozdělení:

$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad P(e^{\xi} \leq x) = P(\xi \leq \log x) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$

$$T(t) = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \Phi\left(\frac{\log tx - \mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{-\varphi\left(\frac{\log tx - \mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1 \cdot t}{\sigma tx}}{-\varphi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-\frac{(\overset{\log t + \log x}{\downarrow}{\log (tx)} - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}} = \lim_{x \to \infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \left(\log^2 t - 2\mu \log t + \overbrace{2 \log t}^{\leq 0} \cdot \underbrace{\log x}_{\to \infty}\right)}$$

$= \infty$

$\lightning$?

krit. nefungují; ALE JE !!!

Př. Pro vysoké škody platí $\psi(u) \sim \frac{1}{\theta \mu_1} \int_u^\infty (1-P(y))\,dy \xrightarrow[u\to\infty]{} 1$
(model Ruinování)

Odvoďte asymptotickou formuli pro $\psi(u)$, $u \to \infty$, mají-li výše škod LN rozdělení.

$$L = L_1 + \dots + L_N$$
$$\mu_1 = E L_i$$

$$P(y) = \Phi\left(\overbrace{\frac{\log y - \mu}{\sigma}}^{\oplus}\right)$$

- Pro $N(0,1)$:

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad x \to \infty, \text{ neboť}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\Phi(x)}{\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\varphi(x)}{P'(x)} = 1$$

$$P'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \int_u^\infty \underbrace{(1-P(y))\,dy}_{\overset{?}{=}\ 1-P_1(u)} \overset{*}{\approx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty \frac{\sigma}{\log y - \mu} \cdot e^{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}}\,dy$$

$$x = \frac{\log y - \mu}{\sigma}$$

Hledáme funkci: $g(u)$, aby $\lim_{u\to\infty} \frac{\int_u^\infty f(y)\,dy}{g(u)} = 1$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{-f(u)}{g'(u)}$$

KDE

$g^{(y)} \Rightarrow$

odstranit pro konst.

$$f(y) = \frac{1}{\log y} e^{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \approx g'(y)$$

(u) úvaha

$$e^{\log u}$$

$$1 = \lim_{u\to\infty} \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(\log u)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{u^{\frac{\mu}{\sigma^2}}}{\log u}}{g'(u)}, \text{ kde}$$

- TYPNU:

$$g(u) = \sigma^2 \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{u^{\frac{\mu}{\sigma^2}+1}}{(\log u)^2} \cdot e^{-\frac{(\log u)^2}{2\sigma^2}}$$

↑ derivace e^{--u--}

$g'(u) = \dots$ dosadíme a vyjde to :)

1. člen: roste ke nule

$(\log u) \to \infty$

2. člen ale ztratil