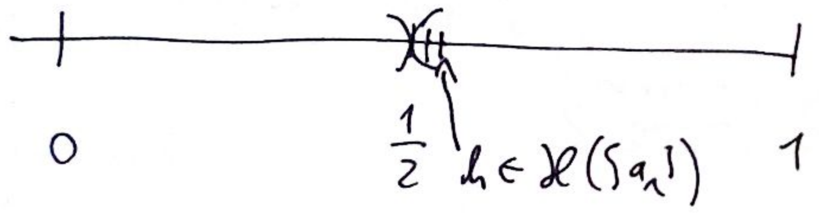
Nápověda 11 cv. příklad 8c.

$h \in \mathcal{H}(\{a_n\}) \overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ vybraná posl. z $\{a_n\}$, která má $\lim\limits_{n\to+\infty}$ rovnu h.



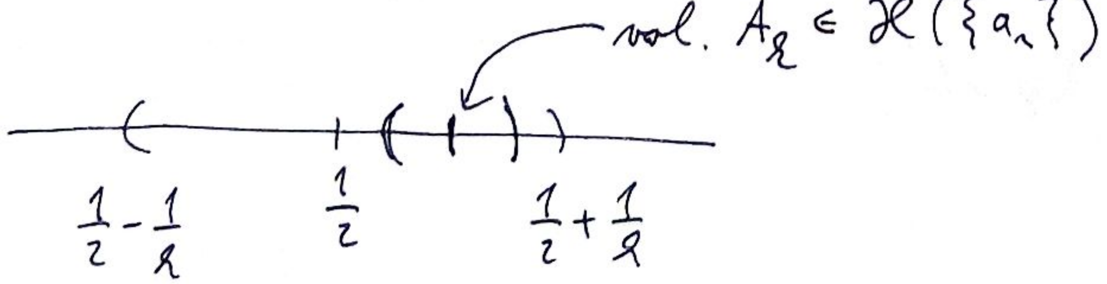
Hypotéza: Není to možné.

Ukážeme: Pokud $\mathcal{H}(\{a_n\}) \supset [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$, pak

$$\mathcal{H}(\{a_n\}) \supset [0,1].$$

Chceme: $\frac{1}{2} \in \mathcal{H}(\{a_n\})$. Musíme vytvořit vybranou posl. z $\{a_n\}$, která konverguje k $\frac{1}{2}$ ($\{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$

Chci: $\left| a_{n_k} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$



$\perp$

9/6 $\{x_n\}, \{y_n\}$ divergentní

? $\{x_n + y_n\}$ je divergentní

(divergentní = nemá vlastní limitu)

obecně neplatí: $x_n = n$; $y_n = 2-n$

$$x_n + y_n = 2 \xrightarrow{n\to+\infty} 2$$

? $\{x_n \cdot y_n\}$ je divergentní

$$x_n = \begin{cases} 0 \\ n \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} n & n \text{ sudé} \\ 0 & n \text{ liché} \end{cases}$$

$\{x_n\}, \{y_n\}$ mají nekonečnou limitu

? $\{x_n \cdot y_n\}$ má nekonečnou limitu ✓ AL obecná verze

9/7 Neplatí!

11/2 Víme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$n^a \leq n^k$; $k \in \mathbb{N}$ ... Volíme $k \in \mathbb{N}$, $k > a$ dle Archimédovy vl.

$$1 \leq \sqrt[n]{n^a} \leq \sqrt[n]{n^k} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^k \xrightarrow{n\to+\infty} 1$$

AL ... součin

$\downarrow n\to+\infty$

1 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$

Policajti

11/6 Víme $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n}$ ~~...~~ $\frac{n}{a^n} = 0$ pro $a > 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^n}\right)^k = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{b^n}\right)^k = 0,$$

protože $b > 1$ a AL (k krát).

11/3 $$(n^4+n)^{50} = \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} (n^4)^{50-k} n^k =$$

$$= n^{200} + 50\, n^{196+1} + \ldots$$

další členy s mocninou < 197

11/4 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{(2n)!}$

Nápověda na 11/4:

$$\sqrt[2n]{(2n)!} \geq \sqrt[2n]{n^n} = \sqrt{n} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot \underbrace{\underset{>n}{(n+1)} \cdot \ldots \cdot \underset{>n}{2n}}_{n \times} \geq n^n$$

$$\sqrt[2n+1]{(2n+1)!} \geq \sqrt[2n+2]{(2n)!} \geq \sqrt[2n+2]{n^{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2n+2]{n}}$$

$$= \sqrt{n} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n+1]{\sqrt{n}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$