NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1
5. přednáška

Robert Šámal

Přehled

Spojité náhodné veličiny

Konkrétní spojitá rozdělení a jejich parametry

Náhodné vektory

Shrnutí, co už víme

- $F_X(x) := P(X \leq x)$ distribuční funkce, existuje vždy, je neklesající, zprava spojitá, $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ pro tzv. spojité n.v. Pro ty dále platí:
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t)dt$, spec. tedy $P(X = x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$
- obecněji: $P(X \in A) = \int_A f_X(t)dt$, kdykoli umíme přes množinu A integrovat
- spec. tedy $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1$
- $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)dt$
- $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t)dt$
- Pokud je hustota spojitá, tak navíc platí: $f_X = F_X'$ (základní věta kalkulu).

Uniformní rozdělení

- N.v. X má uniformní rozdělení na intervalu $[a, b]$, píšeme $X \sim U(a, b)$, pokud $f_X(x) = 1/(b - a)$ pro $x \in [a, b]$ a $f_X(x) = 0$ jinak.

Universalita uniformního rozdělení

Věta

Nechť F je rostoucí spojitá funkce s $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ a $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

1. *Nechť $U \sim U(0,1)$ a $X = F^{-1}(U)$. Pak X má distribuční funkci F.*
2. *Nechť X je n.v. s distribuční funkcí $F = F_X$. Pak $F(X) \sim U(0,1)$.*

Rozptyl spojité n.v.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_X(x)dx$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f_X(x)dx$$

Označíme-li $\mu = \mathbb{E}(X)$, tak

$$var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\ f_X(x)dx = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Přehled

Spojité náhodné veličiny

Konkrétní spojitá rozdělení a jejich parametry

Náhodné vektory

Uniformní rozdělení

- N.v. X má uniformní rozdělení na intervalu $[a, b]$, píšeme $X \sim U(a, b)$, pokud $f_X(x) = 1/(b-a)$ pro $x \in [a, b]$ a $f_X(x) = 0$ jinak.

Exponenciální rozdělení

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

Souvislost *Exp* a *Geom*

Normální rozdělení

- $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
- $\Phi(x)$ – primitivní funkce k φ
- *Standardní normální rozdělení* $N(0,1)$ má hustotu φ a distribuční funkci Φ.
- Pokud $Z \sim N(0,1)$, tak $\mathbb{E}(Z) = 0$, $var(Z) = 1$

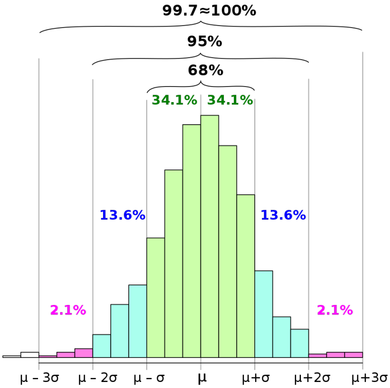
Normální rozdělení

- Pro $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ položme $X = \mu + \sigma \cdot Z$, kde $Z \sim N(0, 1)$.
- Píšeme $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ – obecné normální rozdělení.
- Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ má hustotu $\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.
- Pokud $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ a $X_1, \dots, X_k$ jsou n.n.v., pak

$$X_1 + \cdots + X_k \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Normální rozdělení

- Pravidlo 3σ (68–95–99.7 rule)
- CLT



(Obrázek z Wikipedie, autor Melikamp.)

Cauchyho rozdělení

- *Cauchyho rozdělení:* hustota $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
- nemá střední hodnotu!!!

Gamma rozdělení

- *Gamma*(w, λ), *gamma rozdělení s parametry* $w > 0$ *a* $\lambda > 0$ má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(w)} \lambda^w x^{w-1} e^{-\lambda x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

  kde $\Gamma(w) = (w-1)! = \int_0^\infty x^{w-1} e^{-x} dx$.
  Pro $w = 1$ dostáváme znovu exponenciální rozdělení.
  Pokud sečteme n n.n.v. s rozdělením *Exp*(λ), dostaneme n.v. $\sim$ *Gamma*(n, λ).
  Modeluje mj. životnost součástky.

Další stručněji

- *Beta*(s,t) – beta rozdělení s parametry $s,t>0$ má hustotu definovanou na $(0,1)$ předpisem

$$f(t)=\frac{1}{B(s,t)}x^{s-1}(1-x)^{t-1},$$

  přičemž *normovací konstanta* $B(s,t)$ je definovaná tak, aby vznikla hustota.
- χ^2 rozdělení s n stupni volnosti (χ^2_n) je jiné jméno $\Gamma(\frac{1}{2}n,\frac{1}{2})$. Je to rozdělení $Z_1+\cdots+Z_n$, kde $Z_i\sim N(0,1)$ jsou n.n.v.
- Student t-distribution
- atd. atd.

Přehled

Spojité náhodné veličiny

Konkrétní spojitá rozdělení a jejich parametry

Náhodné vektory

Sdružená distribuční funkce (Joint cdf)

Definice

Pro n.v. X, Y na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definujeme jejich sdruženou distribuční funkci (joint cdf) $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ předpisem

$$F_{X,Y}(x,y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x \& Y(\omega) \leq y).$$

- Mohli bychom definovat i pro více než dvě n.v. $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$.
- Můžeme odsud odvodit pravděpodobnost obdélníku: $P(X \in (a,b] \& Y \in (c,d]) =$

Sdružená hustota (Joint pdf)

- Často můžeme sdruženou distribuční funkci psát jako integrál pomocí nezáporné funkce $f_{X,Y}$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y) dx dy.$$

- Pak nazýváme n.v. X, Y sdruženě spojité. Funkce $f_{X,Y}$ je jejich *sdružená hustota.*
- Jako u jednorozměrného případu může být $f_{X,Y} > 1$.
- Stejně jako u jednorozměrného případu můžeme pak pomocí hustoty vyjádřit i další pravděpodobnosti:

$$P((X,Y) \in S) = \int_{S} f_{X,Y}(x,y) dx dy.$$

- $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$

LOTUS

- Stejně jako v diskrétním případu platí pro střední hodnotu funkce dvou n.v.

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dxdy.$$

- A stejně jako v diskrétním případu odsud odvodíme $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y) + c$.

Vícerozměrné normální rozdělení