Zápočtová písemka 30.10.2020

1.(6 bodů) Nalezněte infimum množiny

$$M = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\log n} \right\}.$$

Nezapomeňte podrobně dokázat obě vlastnosti infima.

2.(6 bodů) Spočtěte následující limitu

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4 + 3n^2 - 1} - \sqrt{n^4 + (-1)^n n}).$$

3.(10 bodů) Spočtěte následující limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! + 5^{n+1}}{n^n + n^3}.$$

Podrobně odůvodněte všechny limity.

4.(10 bodů) Spočtěte následující limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log(5^n + 4^n))}{\log(n^5 + n^4)}.$$

5.(8 bodů) Rozhodněte o pravdivosti následujících dvou implikací ($[x]$ značí celou část $x \in \mathbf{R}$):

A) Existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} [a_n] \Rightarrow$ Existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n$.

B) Existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow$ Existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} [a_n]$.

Podmínkou k udělení zápočtu je získání 20 bodů. Přeji Vám mnoho štěstí.

Náznak řešení je na další straně.

Stručné řešení

1. $\inf M = 0$

a) $\forall n \geq 2 \ \frac{1}{\log n} \geq 0$

b) $\forall y \in \mathbf{R},\ y > 0$ volme $n = \left[e^{\frac{1}{y}}\right] + 1$, pak $n > e^{\frac{1}{y}} \Rightarrow \log n > \frac{1}{y} \Rightarrow y > \frac{1}{\log n}$.

2. Standardně rozšíříme podle $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ a

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 1 - (-1)^n n}{\sqrt{n^4 + 3n^2 - 1} + \sqrt{n^4 + (-1)^n n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{n^2} - (-1)^n \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + 3\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}} + \sqrt{1 + (-1)^n \frac{1}{n^3}}} = \frac{3}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{3}{2},$$

kde použijeme aritmetiku limit a strážníky.

3. Vyjde 0 za použití strážníků

$$0 \leq \frac{(n+1)! + 5^{n+1}}{n^n + n^3} \leq \frac{(n+1)! + 5^{n+1}}{n^n}$$

a odhadů

$$\frac{5^{n+1}}{n^n} = 5\frac{5}{n}\frac{5}{n}\cdots\frac{5}{n} \leq 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{5}{n} = \frac{25}{n} \text{ pro } n \geq 5$$

a

$$\frac{(n+1)!}{n^n} = 1\frac{2}{n}\frac{3}{n}\cdots\frac{n+1}{n} \leq 1\frac{2}{n} \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{2(n+1)}{n^2}.$$

4. Vyjde $\frac{1}{5}$ za použití strážníků

$$\frac{\log(\log(5^n))}{\log(2n^5)} \leq \frac{\log(\log(5^n + 4^n))}{\log(n^5 + n^4)} \leq \frac{\log(\log(2 \cdot 5^n))}{\log(n^5)}.$$

Nyní

$$\frac{\log(\log(5^n))}{\log(2n^5)} = \frac{\log(n \log(5))}{\log 2 + 5 \log n} = \frac{\log n + \log\log(5)}{\log 2 + 5\log n} = \frac{1 + \frac{\log\log(5)}{\log n}}{\frac{\log 2}{\log n} + 5}$$

a podobně

$$\frac{\log(\log(2 \cdot 5^n))}{\log(n^5)} = \frac{\log(\log 2 + n \log 5)}{5 \log n} \leq \frac{\log(2n \log 5)}{5 \log n} = \frac{\log n + \log(2 \log 5))}{5 \log n}.$$

5.

$A)$ neplatí pro $a_n = \frac{3}{2} + (-1)^n \frac{1}{4}$, pak $\lim_{n\to\infty} [a_n] = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

$B)$ neplatí pro $a_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$, pak $[a_{2k}] = 1$ a $[a_{2k+1}] = 0$.