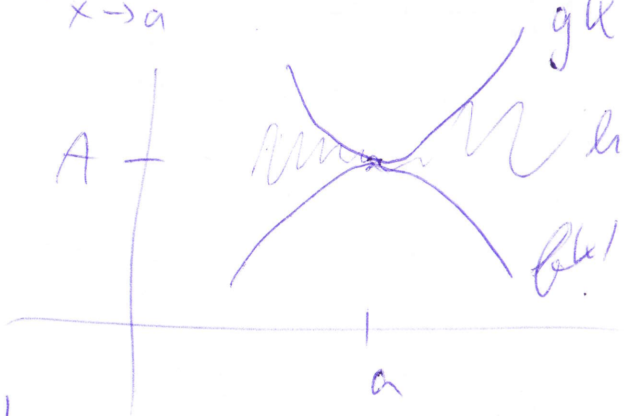
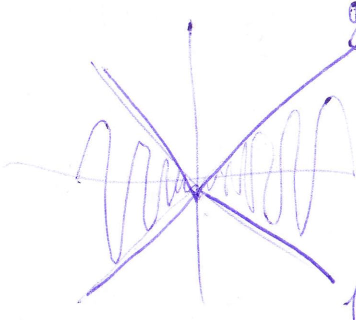
V3.5 (iii) na $P(a,\delta)$ $\quad f(x) \le h(x) \le g(x)$

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Pak $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$



Příklady: ①

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \sin\frac{1}{x}$$



$\cancel{\le \left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|}$

$$\underbrace{-|x|}_{f(x)} \le \underbrace{x\cdot\sin\frac{1}{x}}_{h(x)} \le \underbrace{|x|}_{g(x)}$$

$f(x) \xrightarrow{x\to 0+} 0$, $\quad h(x) \to 0$, $\quad g(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$

Podle strážníků

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x} = 0.$$

$\sqrt{a} \le a \quad \forall a \ge 1$

② $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{1+x^2} = 1$ $\qquad 1 \le \sqrt{1+x^2} \le 1+x^2$

$1 \xrightarrow{x\to 0} 1, \quad \sqrt{1+x^2} \to 1, \quad 1+x^2 \to 1$

podle strážníků

CHCEME $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{1+x^2} \overset{?}{=} \sqrt{\lim\limits_{x\to 0} 1+x^2} = \sqrt{1} = 1$

$\sqrt{\ }$ je spojitá funkce + nějaká věta

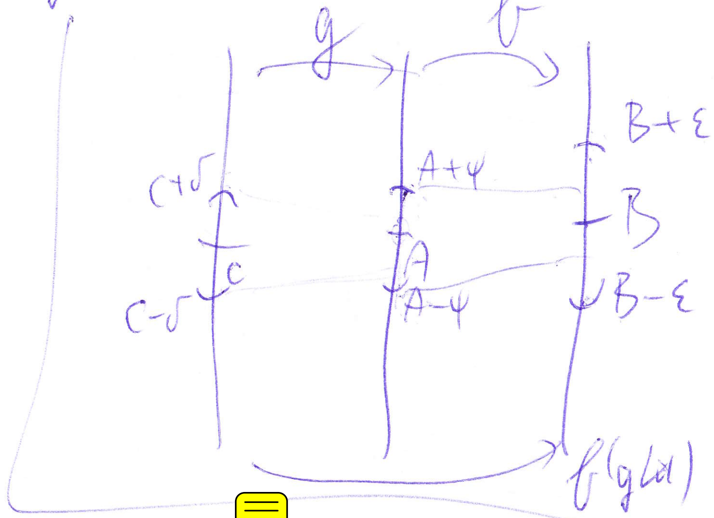
Věta T 3.6 (limita složené funkce) 12-2

Nechť funkce f a g splňují $\lim_{x\to c} g(x)=A$ a $\lim_{y\to A} f(y)=B$.
Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(S) f je spojitá v A

(P) $\exists \eta>0\ \forall x\in P(c,\eta): g(x)\neq A$

Pak platí $\lim_{x\to c} f(g(x))=B$.



Dk: (S) Nechť $\varepsilon>0$. Z $\lim_{y\to A} f(y)=B$

$\exists \psi>0$ tak, že $f(P(A,\psi))\subset U(B,\varepsilon)$.

f je spojitá v $A \Rightarrow B=\lim_{y\to A} f(y)=f(A) \Rightarrow$ dokonce $f(U(A,\psi))\subset U(B,\varepsilon)$.

K našemu $\psi>0$ z $\lim_{x\to c} g(x)=A$ $\exists \delta>0$: $g(P(c,\delta))\subset U(A,\psi)$.

Nyní $f(g(P(c,\delta)))\subset f(U(A,\psi))\subset U(B,\varepsilon)$, $\Rightarrow \lim_{x\to c} f(g(x))=B$.

(P) Nechť $\varepsilon>0$. Z $\lim_{y\to A} f(y)=B$ $\exists \psi>0$: $f(P(A,\psi))\subset U(B,\varepsilon)$.

K $\psi>0$ z $\lim_{x\to c} g(x)=A$ $\exists \delta>0$: $g(P(c,\delta))\subset U(A,\psi)$.

BÚNO $\delta<\eta$. Z (P) $g(x)\neq A$ $\forall x\in P(c,\delta)\subset P(c,\eta)$

Tedy dokonce $g(P(c,\delta))\subset P(A,\psi)$.

Nyní $f(g(P(c,\delta)))\subset f(P(A,\psi))\subset U(B,\varepsilon)$

□

h spojitá v $c \iff \lim_{x\to c} h(x)=h(c)$

$\lim_{x\to c} h(x)=A$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in P(c,\delta)$: ~~[illegible]~~ $f(x)\in U(A,\varepsilon)$

$f(P(c,\delta))\subset U(A,\varepsilon)$

Příklady: 1) $f(x)=\sqrt{x}$ je spojitá na $(0,\infty)$. (rozmyslete i v 0 zprava) 12-3

$$\sqrt{a} \overset{??}{=} \lim_{x\to a} \sqrt{x} = \lim_{x\to a} \sqrt{x}-\sqrt{a} + \sqrt{a} = \qquad \forall a\in(0,\infty)$$

$$\overset{\times}{=} \lim_{x\to a} (\sqrt{x}-\sqrt{a}) \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} + \lim_{x\to a} \sqrt{a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} + \sqrt{a} = 0 + \sqrt{a} \quad \checkmark$$

$$\boxed{\underset{\substack{\downarrow x\to a \\ 0}}{\frac{-|x-a|}{\sqrt{a}}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}} \underset{\text{strážníci}}{\le} \underset{\substack{\downarrow x\to a \\ 0}}{\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}}}$$

---

2) $\lim\limits_{x\to 0} \underset{f(g(x))}{\sqrt{1+x^2}} = 1$ $\qquad g(x)=1+x^2 \quad f(y)=\sqrt{y}$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} 1+x^2 = 1$$

$$\lim_{y\to 1} f(y) = \lim_{y\to 1} \sqrt{y} \overset{\sqrt{\ } \text{ je spojitá}}{=} \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1$$

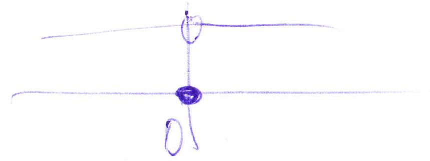
VOLSF s podmínkou (S) $f(y)=\sqrt{y}$ je spojitá v 1.

---

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \overset{\text{Heine}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+x^2} = 1 \qquad \frac{1}{n}\to 0$

---

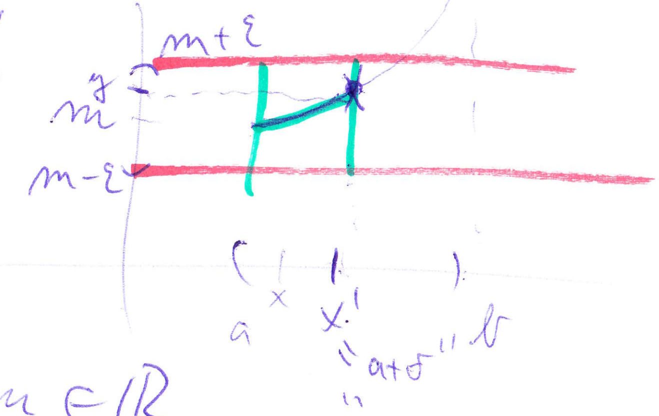
4) $g(x)\equiv 0$, $f(x)=\begin{cases} 1 & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$



$$\lim_{\underset{\substack{\| \\ c}}{x\to 0}} g(x) = \underset{\substack{\| \\ A}}{0}, \quad \lim_{\underset{\substack{\| \\ A}}{y\to 0}} f(y) = \underset{\substack{\| \\ B}}{1}, \quad \lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \neq B$$

Věta L3.7 (limita monotonní funkce)

Nechť f je monotonní na intervalu (a,b), $a,b \in \mathbb{R}^*$.
Potom existuje $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$.



Dk: Nechť f je neklesající, pro nerostoucí je důkaz analogický.

Označme $m = \inf_{x\in(a,b)} f(x) = \inf f((a,b))$

Dokážeme $\lim_{x\to a+} f(x) = m$ v případě $m \in \mathbb{R}$.

Případ $m = -\infty$ a $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$ je analogický.

Nechť $\varepsilon > 0$. Z vlastnosti infima $\exists\, y \in f((a,b))$ tak, že $y < m+\varepsilon$

Z definice $f((a,b))$ $\exists\, x' \in (a,b)$: $f(x') = y$

f je neklesající, a proto $\forall x \in (a,x')$: $f(x) \le f(x') = y < m+\varepsilon$.

m je dolní závora $f((a,b))$, tedy
$\forall x \in (a,b)$: $m-\varepsilon < m \le f(x)$

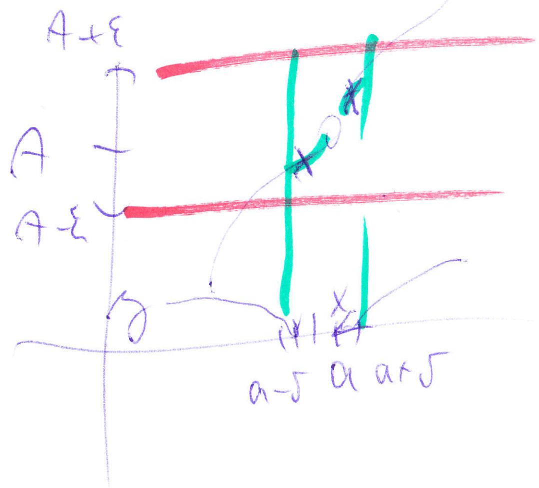
Celkem $\forall x \in (a,x')$ $m-\varepsilon < f(x) < m+\varepsilon$

Tedy $\lim_{x\to a+} f(x) = m$. $\square$

Věta 3.8 (Bolzano - Cauchyova podmínka pro funkce)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a $\delta_0 > 0$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na $P(a, \delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x \to a} f(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzano - Cauchyova) podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in P(a, \delta): \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$



Věta (BC pro posl)

$$\exists \text{ vlastní } \lim_{n \to \infty} a_n \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0: \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$