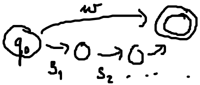
Vztah racionálních a rozpoznatelných podmnožin

Věta (McKnight)

Inkluze $\mathrm{Rec}(M) \subseteq \mathrm{Rat}(M)$ *platí, právě když je monoid* M *konečně generovaný.*

DFA NFA

$\Leftarrow$



$w = s_1 s_2 \dots$

M není kon. gen. $\Rightarrow$? rozpoz. ne-racionální

$M \to 1$

POZOROVÁNÍ: každá rac. množina je obsažena v nějaké kon. gen.
- KON ✓
- $A \cup B$ ✓
- $A \cdot B$ ✓
- $\langle A \rangle$ ✓

$\delta : Q \times M \to Q$ (det.)

$M = \langle \Sigma \rangle$

$\delta_{Nedet} \quad Q \times \Sigma \times Q$ konečná

$A \cup B$ $\quad \langle G_A \rangle \supseteq A \quad \langle G_B \rangle \supseteq B \quad \langle G_A \cup G_B \rangle \supseteq A \cup B$

$A \cdot B \quad \langle G_A \cdot G_B \rangle \supseteq A \cdot B$

Věta (Kleene)

Σ konečná

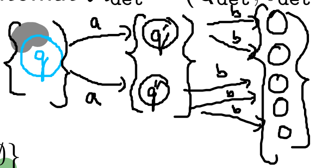
Pro konečnou abecedu Σ *platí* $\mathrm{Rec}(\Sigma^*) \overset{\subseteq}{=} \mathrm{Rat}(\Sigma^*)$.

Důkaz: $\supseteq$

Nedeterministický automat $\mathcal{A} = (Q, \delta, I, F)$ nad Σ

$\Downarrow$ DETERMINIZACE

Deterministický Σ^*-automat $\mathcal{A}_{\mathtt{det}} = (Q_{\mathtt{det}}, \delta_{\mathtt{det}}, q_0, F_{\mathtt{det}})$



- $Q_{\mathtt{det}} = \mathcal{P}(Q)$
- $q_0 = I$
- $F_{\mathtt{det}} = \{S \mid S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta_{\mathtt{det}}$:

$u = a \cdot b = c \cdot d$

$a, b, c, d \in \Sigma$

$$S \odot a = \{q \in Q \mid (q', a, q) \in \delta \text{ pro nějaké } q' \in S\}.$$

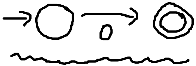
$q(u) \cdot v = q(uv)$

$q \cdot u = ?$

$u = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot a$

$\square$

$Z = \{+1, -1\}$



$\delta = \{(q_0, 0, f)\}$

- Ukažte, že $\{0\}$ není rozpoznatelnou množinou monoidu $(\mathbb{Z}, +)$ (a inkluze z věty je tedy v tomto případě ostrá).
- Co selže při pokusu rozšířit nedeterministický automat přijímající $\{0\}$ v $(\mathbb{Z}, +)$ na deterministický?
- Je $\{0\}$ rozpoznatelnou množinou monoidu $(\mathbb{N}, +)$?
- Je $\mathbb{N}$ racionální množinou monoidu $(\mathbb{N}, \cdot)$?