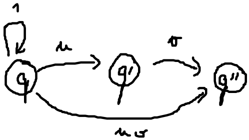
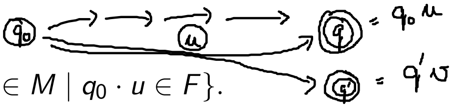
Deterministický M-automat

$$\mathcal{A} = (Q, \delta, q_0, F)$$



- Q množina *stavů*,
- $q_0 \in Q$ je *počáteční stav*
- $F \subseteq Q$ je množina *přijímajících stavů*
- *přechodová funkce* $\delta : Q \times M \to Q$
  - $(q \odot u) \cdot v = q \odot (u \cdot v)$
  - $q \odot 1 = q$
- *konečný* (DFA), pokud je množina stavů Q konečná.
- $\mathcal{A}$ *přijímá* množinu

$\delta(q, u) = q'$ qu



$$L(\mathcal{A}) = \{u \in M \mid q_0 \cdot u \in F\}.$$

Rozeznatelnost $\to$ automat

Nechť $\varphi : M \to N$ rozeznává množinu $L \subseteq M$

$\mathcal{A}_\varphi = (N, \delta, 1_N, F)$

- δ: $\varphi(u) \odot v = \varphi(u \cdot v)$
- $F = \varphi(L)$

Pak

$$L(\mathcal{A}_\varphi) = L$$

Automat → rozeznatelnost

Uvažujme DFA $\mathcal{A} = (Q, \delta, q_0, F)$

$\delta : Q \times M \to Q$

Každé $u \in M$ definuje *transformaci množiny* stavů

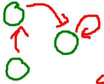
$u \in$

$$\boxed{\delta_u} : \begin{aligned} Q &\to Q \\ q &\mapsto q \odot u \end{aligned}$$

$\delta(\_, u) = \_$

δ_u

Transformace s operací skládání zleva



$$\boxed{\delta_u \,;\, \delta_v := \delta_{uv},}$$

tvoří monoid $T(\mathcal{A})$, *transformační monoid automatu* $\mathcal{A}$

$1 = id$

$T(\mathcal{A})$ rozeznává $L(\mathcal{A})$ pomocí homomorfismu $\varphi : u \mapsto \delta_u$.

$\mathrm{Rec}(M)$: podmnožiny M rozeznávané nějakým konečným monoidem.

Věta

Nechť $L \subseteq M$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

- $L \in \mathrm{Rec}(M)$;
- *L je přijímán konečným deterministickým automatem nad M;*
- *syntaktická ~~kongruence~~ L je konečná.*

monoid

- $\mathrm{Synt}(\mathsf{L})$ - nejmenší rozeznávající monoid pro L
- ? - nejmenší automat přijímající L

Rozeznatelnost $\to$ automat

Nechť $\varphi : M \to N$ rozeznává množinu $L \subseteq M$

Synt.

NE

$\mathcal{A}_\varphi = (N, \delta, 1_N, F)$

?

Automat $\to$ rozeznatelnost

Uvažujme DFA $\mathcal{A} = (\overset{N}{Q}, \delta, q_0, F)$

$T(\mathcal{A}) = \{\delta_u \mid u \in M\}$ rozeznává $L(\mathcal{A})$.

✓

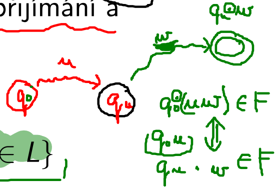
$\neq$

N

Minimální automat

- dosažitelné stavy: $q_u = q_0 \cdot u,\ u \in M$

Na stavu nás zajímá výhradně jeho *chování*! Tj. přijímání a nepřijímání prvků.

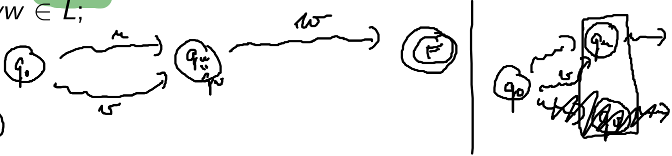


- „chování“ stavu $q_u = q_0 \cdot u$ je množina

$$L(u) := u^{-1}L := \{w \in M \mid uw \in L\}$$

- pokud $q_0 \cdot u = q_0 \cdot v$, pak pro jakékoli $w \in M$ platí, že $uw \in L$ právě když $vw \in L$;

$$L(u) = L(v)$$



Definujme tedy

$\{L(u) \mid u \in L\}$

$\|$

q_0

$$\mathcal{A}_L = (Q_L, \delta, L, F)$$

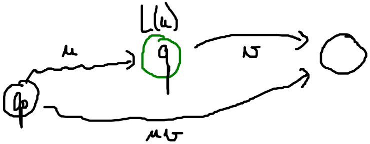
$$Q_L = \{L(u) \mid u \in M\}$$

$$L(u) \odot v = L(u \cdot v)$$

$L(1) = \{w \mid q_0 \cdot w \in F\}$

$\|$ $\quad$ $\|$

L $\quad$ $L(1)$



$q_u \cdot 1 \in L$

$u \in L$

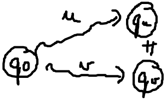
MINIMALITA: $\quad L(\mathcal{A}_L) = L$

$L(u) \neq L(v)$ $\quad$ ROZLIŠUJÍCÍ SLOVO w

$q_u \neq q_v$

$u \cdot w \in L$

$v \cdot w \notin L$



Myhillova-Nerodova ekvivalence $\sim_R$:

$q_u \overset{?}{=} q_v$ $\quad u \sim_R v$

$$u \sim_R v, \text{ právě když } L(u) = L(v)$$

- $\sim_R$ není kongruence
- $u \sim_R v \not\Rightarrow u \cdot s \sim_R v \cdot s$

$\forall r, s$ $\quad r \cdot u \cdot s$ $\quad r \cdot v \cdot s$

$$u \sim_R v \Leftrightarrow L(u) = L(v)$$

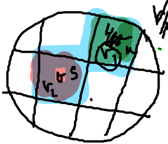
$$u \sim_L v \Leftrightarrow C_L(u) = C_L(v)$$

PRAVÝ KONTEXT

KONTEXT

$\underbrace{u \; v}_{uv \in L}$

$$C_L(u) = \{(r, s) \mid rus \in L\}$$



$v_1 u s \in L$

$v_2 u s \notin L$

- $\mathrm{Synt}(\mathsf{L})$ - nejmenší rozeznávající monoid pro L
- ? - nejmenší automat přijímající L

Rozeznatelnost $\to$ automat

Nechť $\varphi : M \to \overset{\mathrm{Synt}}{\cancel{N}}$ rozeznává množinu $L \subseteq M$

$\mathcal{A}_\varphi = (\underset{\mathrm{Synt}}{\cancel{N}}, \delta, 1_N, F)$ NENÍ

Automat $\to$ rozeznatelnost

Uvažujme DFA $\mathcal{A} = (\overset{L(u)}{Q}, \delta, q_0, F)$

$T(\mathcal{A}) = \{\delta_u \mid u \in M\}$ rozeznává $L(\mathcal{A})$. MON. TRANS.

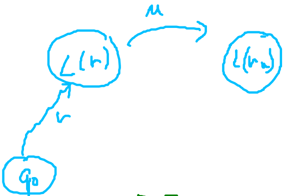
$\boxed{\mathrm{Synt}}$

Věta

Monoid transformací minimálního automatu je isomorfní syntaktickému monoidu.

Důkaz

$$\delta_u \in T(\mathcal{A}_L) : L(r) \mapsto L(ru)$$



$\delta_u \mapsto [u]$

Ukážeme, že zobrazení

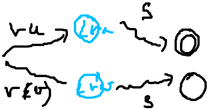
$T(\mathcal{A}) \longleftrightarrow \mathrm{Synt}(L)$ ISO

$$\delta_u \mapsto [u]$$

je isomorfismus $T(\mathcal{A}_L)$ a $\mathrm{Synt}(\cancel{M})$.

Surjektivní homomorfismus:

$$\delta_u \cdot \delta_v = \delta_{uv} \mapsto [uv] = [u] \cdot [v].$$



Prostota:

$\exists r$

$$\delta_u \neq \delta_v : \quad \delta_u(L(r)) = L(ru) \neq L(rv) = \delta_v(L(r))$$

Tedy pro nějaké $s \in M$ platí $rus \in L \not\Leftrightarrow rvs \in L$, tedy $[u] \neq [v]$.