NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1
3. přednáška

Robert Šámal

Přehled

Střední hodnota

- $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X = x)$
- $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$

- linearita: $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y) + c$
- LOTUS: $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in Im(X)} g(x) \cdot P(X = x)$
- $\mathbb{E}(X \mid A)$, rozbor možností
- „Kolik čekáme, že průměrně dostaneme, když budeme opakovat nezávislé pokusy s výsledkem popsaným X“ ... bude tzv. zákon velkých čísel

Rozptyl

- $var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)$
- $var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
- *Směrodatná odchylka (standard deviation)* $\sigma_X = \sqrt{var(X)}$ – „stejné jednotky jako X“.
- Měří, jak je daleko „typicky“ je X od $\mathbb{E}(X)$. Mohli bychom to měřit i jinak (např. $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)$, ale rozptyl je výhodnější).

Přehled

Shrnutí k střední hodnotě a rozptylu

Podmíněné rozdělení

Spojité náhodné veličiny

Podmíněné rozdělení

X, Y – diskrétní náhodné veličiny na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $A \in \mathcal{F}$

- $p_{X|A}(x) := P(X = x \mid A)$
  příklad: X je výsledek hodu kostkou, $A =$ padlo sudé číslo
- $p_{X|Y}(x|y) = P(X = x \mid Y = y)$ příklad: X, Z jsou výsledky dvou nezávislých hodů kostkou, $Y = X + Z$.

$$p_{X|Y}(6|10) =$$

- $p_{X|Y}$ z $p_{X,Y}$:

Sdružené vs. podmíněné rozdělení

$p_{X,Y}$	...	10	11	12
1				
2				
3				
4				
5				
6				

$p_{X\|Y}$	...	10	11	12
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Přehled

Obecná náhodná veličina

Definice

Náhodná veličina (random variable) na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je zobrazení* $X : \Omega \to \mathbb{R}$, *které pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *splňuje*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

- diskrétní n.v. je n.v.

Distribuční funkce

Definice

Distribuční funkce (cumulative distribution function, CDF) n.v. X je funkce

$$F_X(x) := P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

- F_X je nerostoucí funkce
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- F_X je zprava spojitá

Distribuční funkce – další ukázky

Spojitá náhodná veličina

Definice

N.v. X se nazývá spojitá (continuous), pokud existuje nezáporná reálná funkce f_X tak, že

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x).$$

(Někdy se též používá pojem absolutně spojitá veličina.) Funkce f_X se nazývá hustota (probability density function, pdf) náhodné veličiny X.

Práce s hustotou

Věta

Nechť spojitá n.v. X má hustotu f_X. Pak

1. $P(X = x) = 0$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$.
2. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t)dt$ *pro každé* $a, b \in \mathbb{R}$.

Uniformní rozdělení

- N.v. X má uniformní rozdělení na intervalu $[a, b]$, píšeme $X \sim U(a, b)$, pokud $f_X(x) = 1/(b - a)$ pro $x \in [a, b]$ a $f_X(x) = 0$ jinak.

Věta

Nechť X je n.v. s distribuční funkcí $F = F_X$. Pak $F(X) \sim U(0, 1)$.

Věta

Nechť $U \sim U(0, 1)$ a F je rostoucí spojitá funkce s $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ a $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. Pak $F^{-1}(U)$ je n.v. s distribuční funkcí F.

Universalita unif.

Střední hodnota spojité n.v.

Definice

Nechť spojitá n.v. X má hustotu f_X. Pak její střední hodnota (expectation, expected value, mean) je označována $\mathbb{E}(X)$ a definována

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

pokud integrál má smysl, tj. pokud se „nejedná o typ $\infty - \infty$".

- Analogie s výpočtem těžiště tyče ze znalosti hustoty.

Spojitý LOTUS

Věta (LOTUS)

Pokud X je spojitá n.v. s hustotou f_X a g reálná funkce, tak

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx,$$

pokud integrál má smysl.

(Důkaz vynecháme.)