Racionální podmnožiny monoidu

- $A \in \mathrm{Rat}(M)$ pro všechny ~~konečné~~ jednoprv. množiny A,
- pokud $A, B \in \mathrm{Rat}(M)$, pak také $A \cup B \in \mathrm{Rat}(M)$,
- pokud $A, B \in \mathrm{Rat}(M)$, pak také $A \cdot B \in \mathrm{Rat}(M)$,
- pokud $A \in \mathrm{Rat}(M)$, pak také $\langle A \rangle \in \mathrm{Rat}(M)$.

$$A \cdot B = \{ a \cdot b \mid = a \in A, b \in B \}$$

$$\langle A \rangle = \{ a_1 \cdots a_n \mid a_i \in A \} \qquad 1 \in \langle A \rangle$$

$$\langle A \rangle \cup \langle B \rangle \qquad \Sigma^* \qquad \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$$

Regulární výrazy

- $\cancel{\mathbf{1}}$, $\underline{\mathbf{0}}$ a $\underline{a} \in M$ jsou regulární výrazy (nazývané *atomické*);
- jsou-li r a s regulární výrazy, je i
  - $(r \cdot s)$ ✓
  - $(r + s)$ ✓
  - (r^*) ✓ KLEENE

Rozšířený regulární výraz

- je-li r regulární výraz, je i $(\overline{r})$ regulární výraz.

- Regulárnímu výrazu **0** odpovídá prázdná množina;
- regulárnímu výrazu **1** odpovídá množina $\{1_M\}$;
- regulárnímu výrazu $a \in \Sigma$ odpovídá množina $\{a\}$;
- regulárnímu výrazu $(r \cdot s)$, kde r je regulární výraz odpovídající množině A a s je regulární výraz odpovídající množině B, odpovídá množina $A \cdot B$;
- regulárnímu výrazu $(r + s)$, kde r je regulární výraz odpovídající množině A a s je regulární výraz odpovídající množině B, odpovídá množina $A \cup B$;
- regulárnímu výrazu r^*, kde r je regulární výraz odpovídající množině A, odpovídá množina $\langle A \rangle$.

- regulárnímu výrazu $\overline{r}$, kde r je regulární výraz odpovídající množině A, odpovídá množina $M \setminus A$ (tedy doplněk A v M).

$$\Sigma^* \qquad \overline{a} = \underbrace{\Sigma^* \cdot a \cdot \Sigma^* \cdot a \cdot \Sigma^* + \Sigma^* \cdot b \cdot \Sigma^* + 1}_{\Sigma^*}$$

$\Sigma = \{a, b, c\}$ $\qquad (a+b+c)^*$

Nedeterministický M-automat $\mathcal{A}$

NFA

$$\boxed{(Q, \delta, I, F)}$$

$w \in M$

P w ? $w \stackrel{?}{\in} L(\mathcal{A})$

$\{ m \mid \exists \text{ p. cesta} \}$

I   F

$$\boxed{(q_0, m_1, q_1, m_2, q_2, \ldots, m_k, q_k)}$$

$\in \delta$

PŘIJÍMAJÍCÍ CESTA

SLOVA

$m_1 \cdots m_k = m$

$\in \Sigma$

Q ... stavy

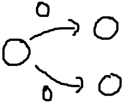
δ ... $(q, m, q') \in \delta$

$\delta \subseteq Q \times M \times Q$ KONEČNÉ

PŘECHODOVÁ RELACE

$I \subseteq Q$ poč.

$F \subseteq Q$ konc.



$\langle \Sigma \rangle = M$

Σ konečná

$m = s_1 \cdots s_n$
$= s_1' \cdots s_k'$

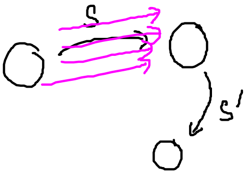
$\Sigma^{\#} = s_1 \cdots s_n$

Věta

Nechť je M monoid, $A \subseteq M$ a $M = \langle \Sigma \rangle$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. $A \in \mathrm{Rat}(M)$;
2. *existuje konečný nedeterministický M-automat přijímající A;*
3. *existuje konečný nedeterministický M-automat nad Σ s jediným vstupním stavem přijímající A;* || jedn. aut.
4. *existuje konečný nedeterministický M-automat nad $\mathrm{Rat}(M)$ přijímající A.* || slož. automat

ALT. EQ. DEF



4. $\delta \subseteq Q \times \mathrm{Rat}(M) \times Q$ $\quad$ δ KONEČNÉ

$m \in L(\mathcal{A})$

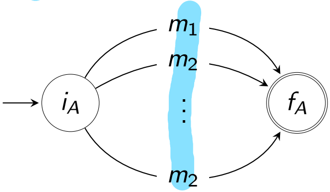
$\exists\, (q_1, \underset{\in S_1}{m_1}, q_2, \underset{\in S_2}{m_2}, \dots m_n\, q_{n+1})$

$m = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$

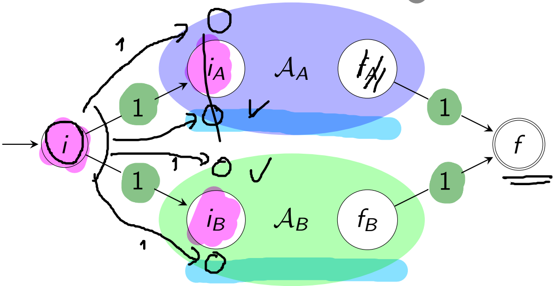
(1) ⇒ (2), tj. $A \in \mathrm{Rat}(M) \to$ automat

IND. PODLE RAT

- $A = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$

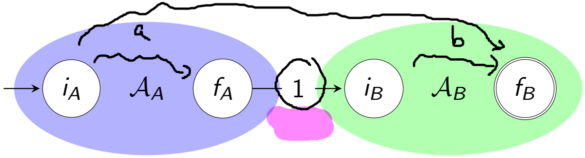


- Od automatů pro A a B k automatu pro $A \cup B$:



- Od automatů pro A a B k automatu pro $A \cdot B$:

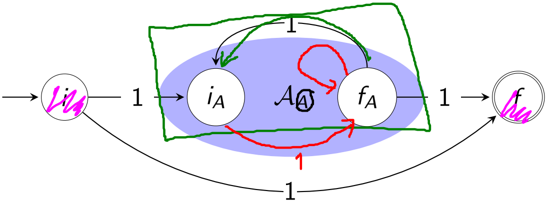
$a \cdot b$



- Automat pro $\langle A \rangle$ z automatu pro A:

$1 \notin A$

$1 \in \langle A \rangle$



generátory

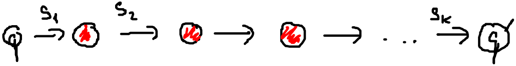
(2) ⇒ (3), tj. jediný vstup a pouze písmena

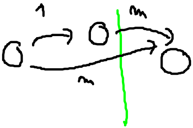
$\langle \Sigma \rangle = M$

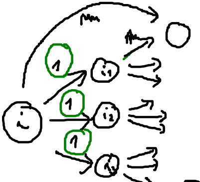
$1 \notin \Sigma$

$m = s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$

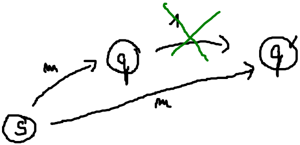
$s_i \in \Sigma$







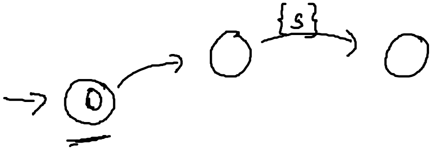
REDUKCE ε-přechodů



(3) $\Rightarrow$ (4) tj. od písmen k jazykům

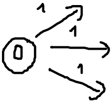
$$(q, m, q') \qquad (q, \{m\}, q')$$

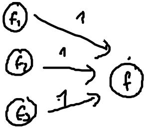
$s \in \Sigma$



(4) $\Rightarrow$ (1) od automatu s $\overset{\text{Rat}}{\text{jazyky}}$ k jednomu $\overset{\text{Rat}}{\text{jazyku}}$

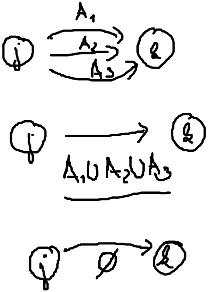
- jediný vstupní stav, jediný přijímající stav





(4) $\Rightarrow$ (1) od automatu s jazyky k jednomu jazyku

- jediný vstupní stav, jediný přijímající stav
- právě jeden přechod z každého stavu do každého stavu



(4) ⇒ (1) od automatu s jazyky k jednomu jazyku

- jediný vstupní stav, jediný přijímající stav
- právě jeden přechod z každého stavu do každého stavu
- eliminace vrcholu

A_{ii}

$$\boxed{A'_{j,k} = A_{j,k} \cup A_{j,i} \langle A_{i,i} \rangle A_{i,k}.}$$

$\forall j, l$

A_{jl}

A_{jl}

0 f

$\rightarrow$ 0 $\xrightarrow{L}$ f

$$L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$$

$$j \xrightarrow{A_{jk}} k$$

$$0 \xrightarrow{A_{0f}} f = L(\circ \to \circ) = L(\mathcal{A})$$