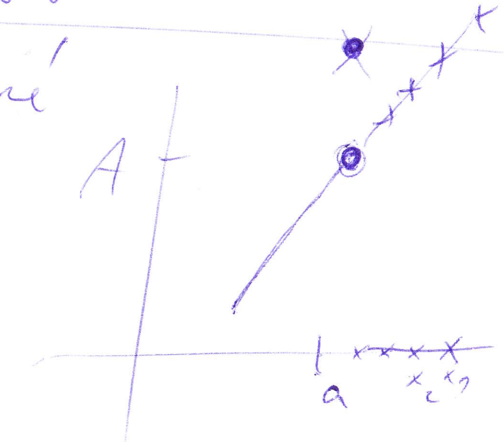
V3.1 NPJE (i) $\lim_{x\to a} f(x) = A$

$a, A \in \mathbb{R}^*$ (ii) $\forall x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $\boxed{x_n \neq a}$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.



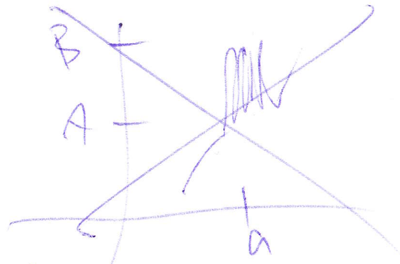
__Poznámka:__ ~~Ex~~ Existují varianty pro jednostranné limity a pro spojitost f v a.

(A) (i) $\lim_{x\to a_+} f(x) = A$

(ii) $\forall x_n \to a$, $x_n > a$, pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

(B) (i) f je spojitá v a, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

(ii) $\forall x_n \to a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.



Věta L3.2 (o jednoznačnosti limity)

Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

__Dk:__ Sporem. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} f(x) = B$, $A \neq B$.

Nechť x_n je posloupnost, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $x_n \neq a$ $\forall n$.

Podle Heineho věty $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B$.

To je spor s jednoznačností limity posloupnosti. $\square$

Příklad: Motivační – spojité úročení.

~~a % ročně~~ $a>0$, $100\cdot a\,\%$ ročně. Na začátku částka 1.

na konci roku $1\cdot(1+a)$

úroky 2x ročně $1\cdot\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{a}{2}\right)>(1+a)$

4x ročně $1\cdot\left(1+\frac{a}{4}\right)\left(1+\frac{a}{4}\right)\left(1+\frac{a}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{a}{4}\right)>\left(1+\frac{a}{2}\right)^2$

12x $\left(1+\frac{a}{12}\right)^{12}$

365 $\left(1+\frac{a}{365}\right)^{365}>$

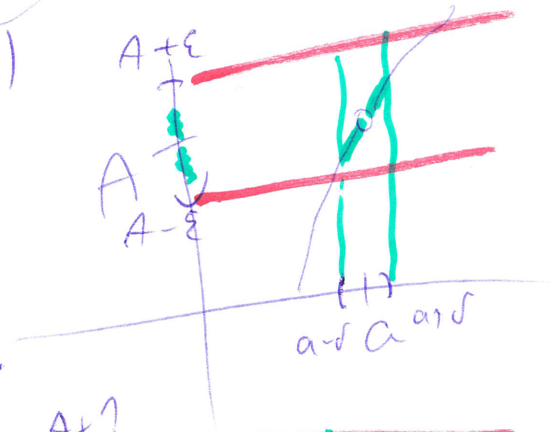
Kolik je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$ výsledek pro spojité úročení.

zlepší?

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ .. Věta o limitě složené funkce + + standardní opičárny

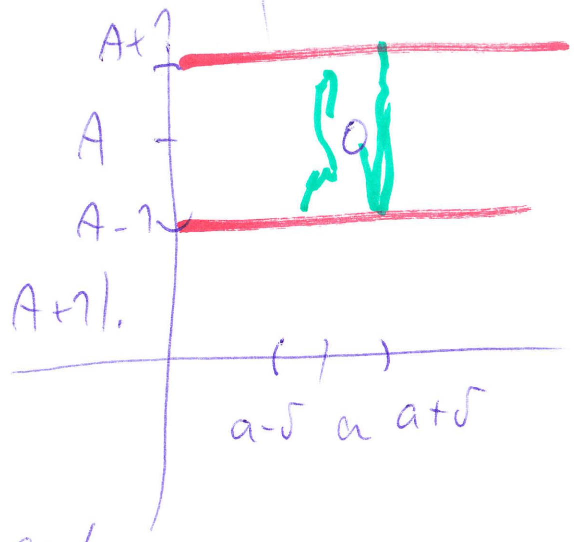
$= e^a$

$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \dots \quad \underbrace{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in P(a,\delta)^{*}: f(x) \in U(A,\varepsilon)}_{f(P(a,\delta)) \subset U(A,\varepsilon)}$



$\boxed{\text{Věta L 3.3}}$ (limita a omezenost)

Nechť f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že f je na $P(a,\delta)$ omezená.



Dk. Označme $A = \lim_{x\to a} f(x)$. Víme $A \in \mathbb{R}$.

Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ tak, že

$$\forall x \in P(a,\delta): f(x) \in B(A,1) = (A-1, A+1).$$

Tedy $f(P(a,\delta)) \subset (A-1, A+1)$.

Z toho plyne, že f je na $P(a,\delta)$ omezená.

$\square$

Věta L 3.4 (o aritmetice limit)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí

(i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B$, má-li pravá strana smysl.

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$, má-li pravá strana smysl

(iii) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, má-li pravá strana smysl.

Dk: (i) Nechť x_n je posloupnost, $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a$ a $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Podle Heineho věty (i)$\Rightarrow$(ii) dostaneme

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A \quad \text{a} \quad \lim_{n \to \infty} g(x_n) = B.$$

Podle aritmetiky limit pro posloupnosti

$$\lim_{n \to \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B.$$

Nyní z Heineho věty (ii)$\Rightarrow$(i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B$ $\square$

(ii) a (iii) analogicky.

Heine NPJE (i) $\lim_{x \to a} f(x) = A$

(ii) $\forall x_n \to a, x_n \neq a, \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$

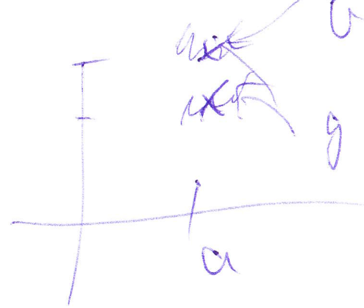
Důsledek věty 3.4: Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak jsou funkce $f+g$, $f \cdot g$ spojité v a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v a.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$
$$\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim f(x) + \lim g(x) = f(a)+g(a)$$

Speciálně polynomy jsou spojité na $\mathbb{R}$ a racionální lomené funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jsou spojité ve všech x, kde $Q(x) \neq 0$.

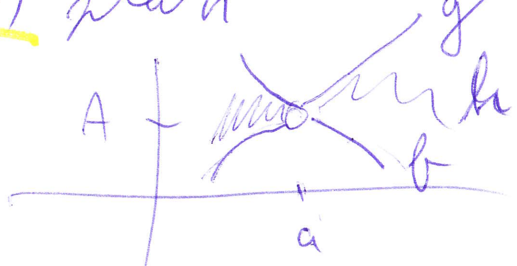
Věta L3.5 (limita a uspořádání) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(i) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje prstencové okolí $P(a,\delta)$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta): f(x) > g(x)$

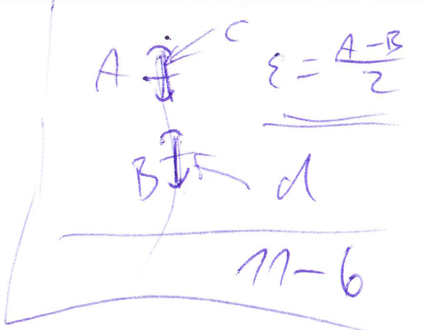


(ii) nechť existuje prstencové okolí bodu $P(a,\delta)$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta): f(x) \leq g(x)$. Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$. Potom platí $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

(iii) Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(a,\eta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\lim_{x\to a} h(x)$ a rovná se jim.



Dk: (i) $\lim f(x) > \lim g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$ na $P(a,\delta)$.



Označme $A = \lim_{x\to a} f(x)$ a $B = \lim_{x\to a} g(x)$. Víme $A > B$.

Nalezneme $\varepsilon > 0$ tak, aby $B(A,\varepsilon) \cap B(B,\varepsilon) = \emptyset$.

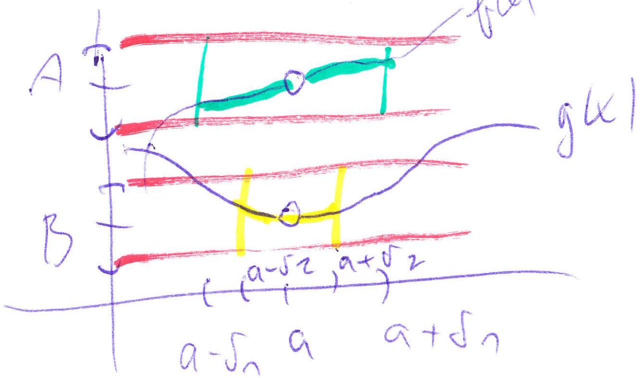
Navíc $\forall c \in B(A,\varepsilon)\ \forall d \in B(B,\varepsilon)$ platí $c > d$.

K tomuto $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta_1 > 0$ a $\delta_2 > 0$ tak, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1): f(x) \in B(A,\varepsilon)$$

$$\forall x \in P(c,\delta_2): g(x) \in B(B,\varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak $\forall x \in P(c,\delta)$ $f(x) \in B(A,\varepsilon)$ a $g(x) \in B(B,\varepsilon)$ $\Rightarrow f(x) > g(x)$.



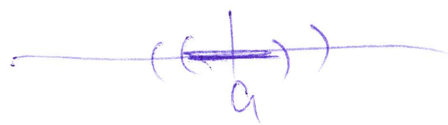
□

(ii) Sporem. Víme $f(x) \le g(x)$ na $P(a,\delta)$, ale $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$.

Podle části (i) $\exists \delta_1$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta_1): f(x) > g(x)$.

To je spor s $f(x) \le g(x)$ na $P(a,\delta)$. ↯

□



Dk: (iii) Označme $A = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.

Nechť nejprve $A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 > 0$ tak, že
$\forall x \in P(a, \delta_1)$ platí $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, $A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon$.

Nechť $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Pak
$\forall x \in P(a, \delta)$ $A - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < A + \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$

Celkem $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : h(x) \in B(A, \varepsilon)$. ✓

Nechť $A = +\infty$. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 > 0$ tak, že
$\forall x \in P(a, \delta_1) : f(x) \in U(+\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$

Nechť $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Pak
$\forall x \in P(a, \delta)$ $\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \le h(x) \Rightarrow h(x) \in U(+\infty, \varepsilon)$

Analogicky pro $A = -\infty$

$\square$