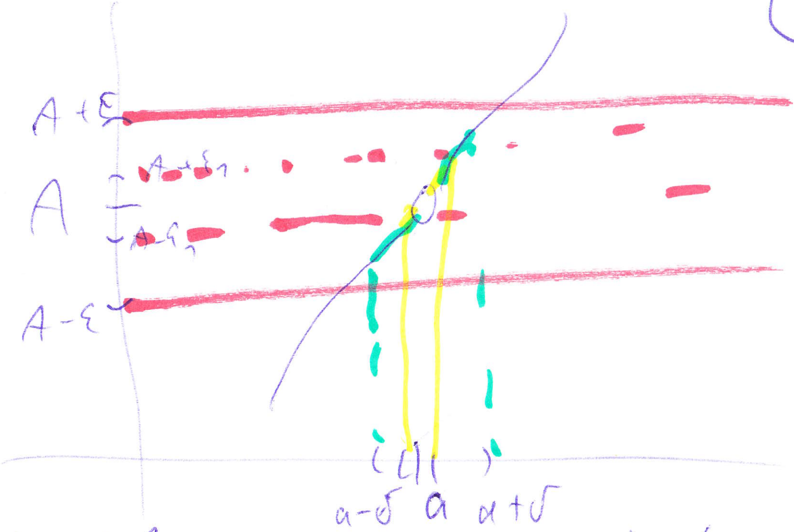
$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}:\ f(x)\in(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$$




$\boxed{\text{Definice}}$ Nechť $\delta>0$ a $a\in\mathbb{R}$.

Prstencové okolí bodu je

$P(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$, $P(+\infty,\delta)=(\frac{1}{\delta},+\infty)$, $P(-\infty,\delta)=(-\infty,-\frac{1}{\delta})$

Pravé a levé prstencové okolí bodu a je

$P_+(a,\delta)=(a,a+\delta)$ ; $P_-(a,\delta)=(a-\delta,a)$.

Okolí bodu je $B(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$; $B(+\infty,\delta)=(\frac{1}{\delta},+\infty)$ ; $B(-\infty,\delta)=(-\infty,-\frac{1}{\delta})$.

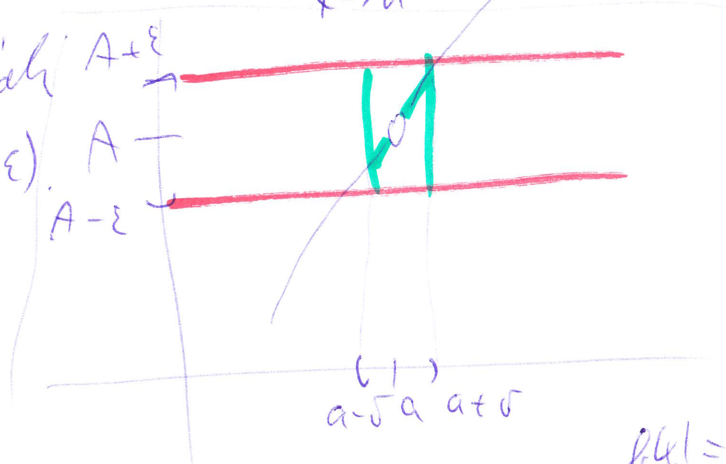
Pravé a levé okolí bodu a je

$B_+(a,\delta)=[a,a+\delta)$ ; $B_-(a,\delta)=(a-\delta,a]$.

**Definice** Nechť $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $f$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Značíme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.



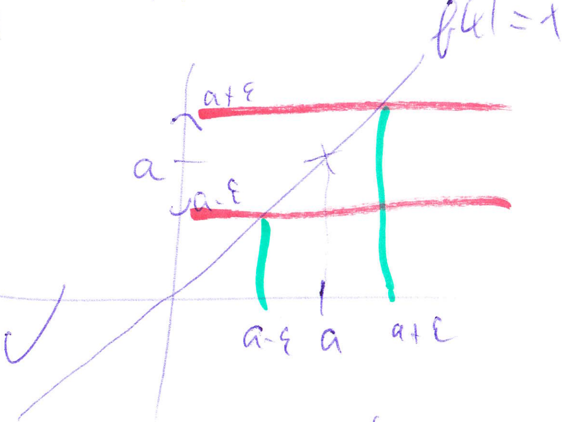

**Poznámky:** 1) pro $a \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}$ lze definovat jako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}: f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon).$$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ lze ekvivalentně zapsat

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: f(P(a, \delta)) \subset B(A, \varepsilon).$$

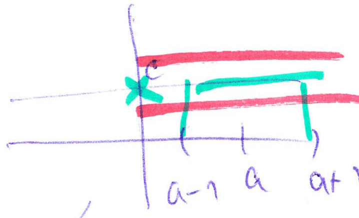
**Příklad:** 1) $\lim\limits_{x \to a} x = a$




K $\varepsilon > 0$ volme $\delta = \varepsilon$, pak

$\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ platí $f(x) = x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
$= (a-\delta, a+\delta)$. ✓

2) $\lim\limits_{x \to a} c = c$ pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$.




K $\varepsilon > 0$ volme $\delta = 1$, pak

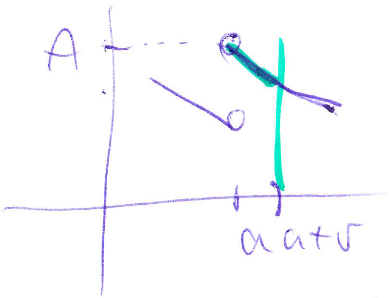
$\forall x \in (a-1, a+1) \setminus \{a\}$ platí $f(x) = c \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ ✓

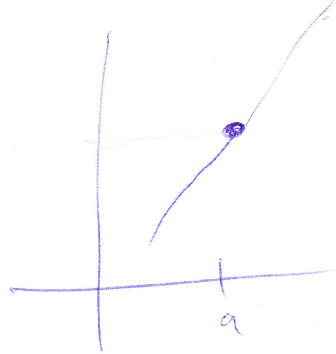
**Def** Nechť $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $f$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu zprava (zleva) rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

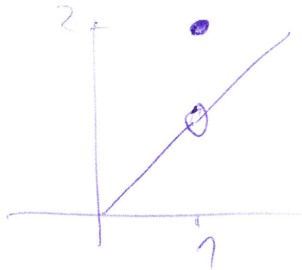
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(a,\delta): f(x) \in B(A,\varepsilon)$$

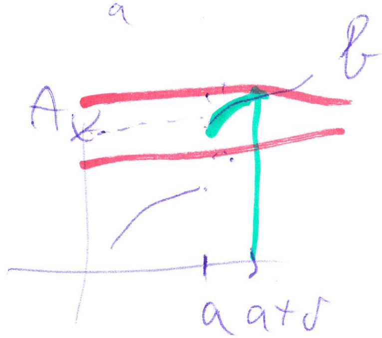
$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(a,\delta): f(x) \in B(A,\varepsilon)\right)$$

! Tady není $B_+(A,\varepsilon)$



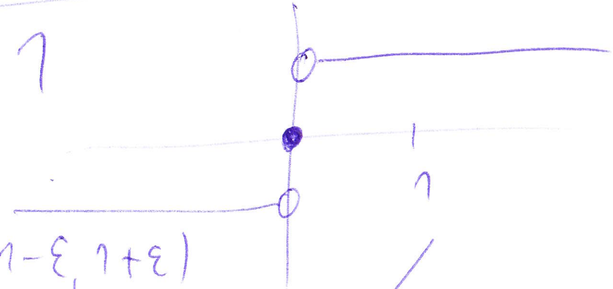




**Příklad:** 1) $\lim_{x \to 0_+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x \to 0_-} \operatorname{sgn} x = -1$

Speciálně neexistuje $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$.

K $\varepsilon > 0$ vol $\delta = 1$, pak $\forall x \in \underset{(0,1)}{\underbrace{(0,\delta)}}: f(x) = 1 \in \underset{(A-\varepsilon,A+\varepsilon)}{\underbrace{(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)}}$ ✓

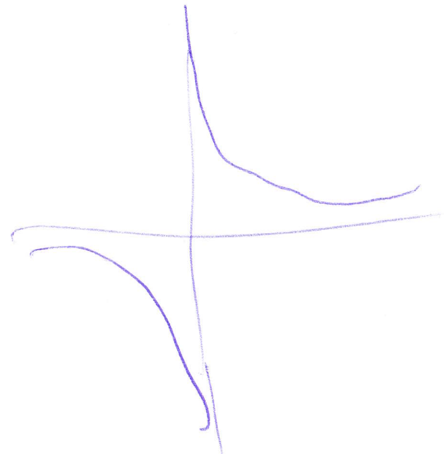



2) $\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (0,\delta): f(x) \in \left(\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty\right).$$

K $\varepsilon > 0$ volme $\delta = \varepsilon$. Pak $\forall x \in (0,\varepsilon)$ platí

$$f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x} \in \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right). \ ✓$$

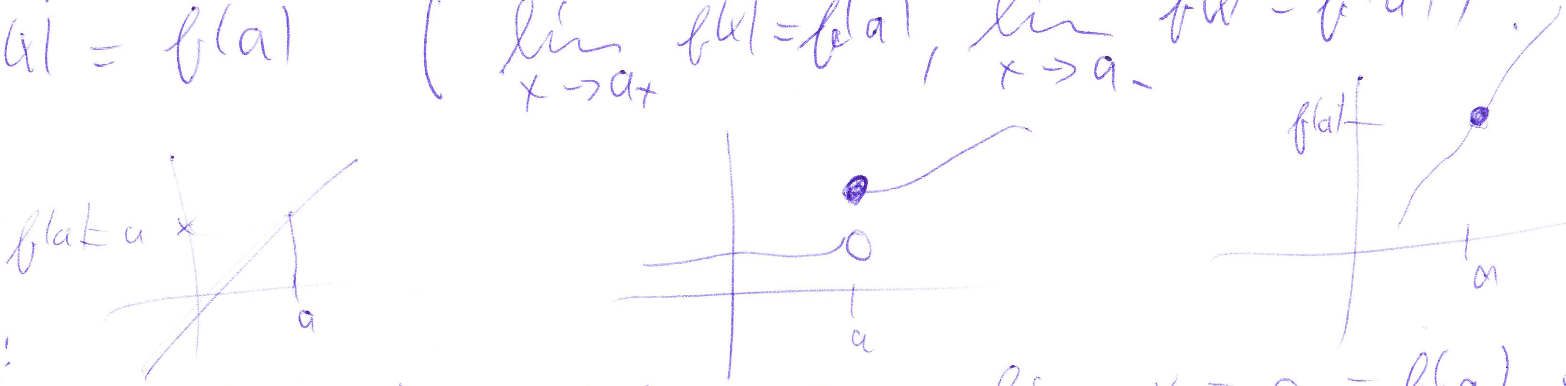


Poznámka: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \iff \lim\limits_{x\to a+} f(x)=A$ a $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=A$

$(P(a,\delta)=P_+(a,\delta)\cup P_-(a,\delta))$

Def: Nechť $f: M\to\mathbb{R}$, $M\subset\mathbb{R}$, $a\in M$. Řekneme, že $f$ je v $a$ spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva), jestliže

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \quad \left(\lim_{x\to a+} f(x)=f(a),\ \lim_{x\to a-} f(x)=f(a)\right)$$

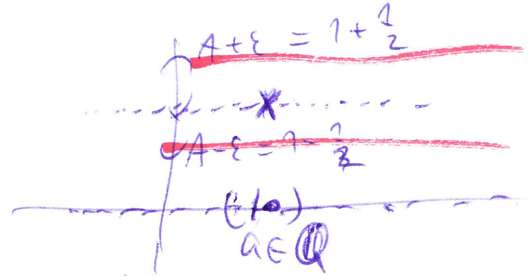



Příklady:

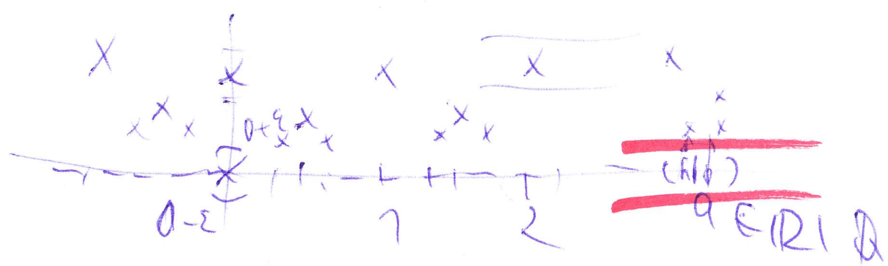
a) funkce $f(x)=x$ je spojitá na $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to a} x = a = f(a)$ ✓

b) Dirichletova funkce $D(x)=\begin{cases}1 & \text{pro } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{pro } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

není nikde spojitá




c) Riemannova funkce $R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{pro } x\in\mathbb{Q},\ x=\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N} \text{ nesoudělná}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$




$\lim\limits_{x\to 2} R(x) = \overset{R(2)}{1}$

1) není nikde sp.

~~2)~~ je sp. v $\mathbb{Q}$

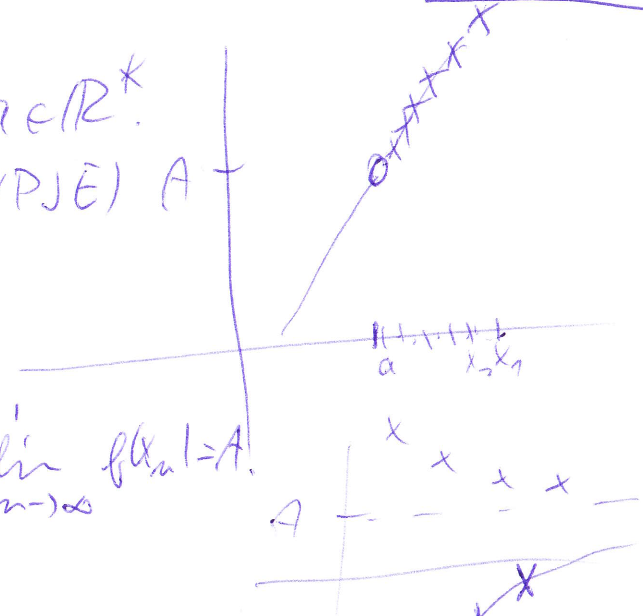
3) je sp. v $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ✓

## 3.2. Věty o limitách

$\boxed{\text{Věta T 3.1}}$ (Heine) Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $f: M \to \mathbb{R}$ a $f$ je definována na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$. Následující podmínky jsou ekvivalentní: (NPJE)

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = A$

(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.




Dk: (i) ⇒ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in M$, $x_n \neq a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Podle (i)

$\exists \delta > 0 \ \forall x \in P(a,\delta): f(x) \in B(A,\varepsilon)$. (*)

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, tedy k tomuto $\delta > 0$

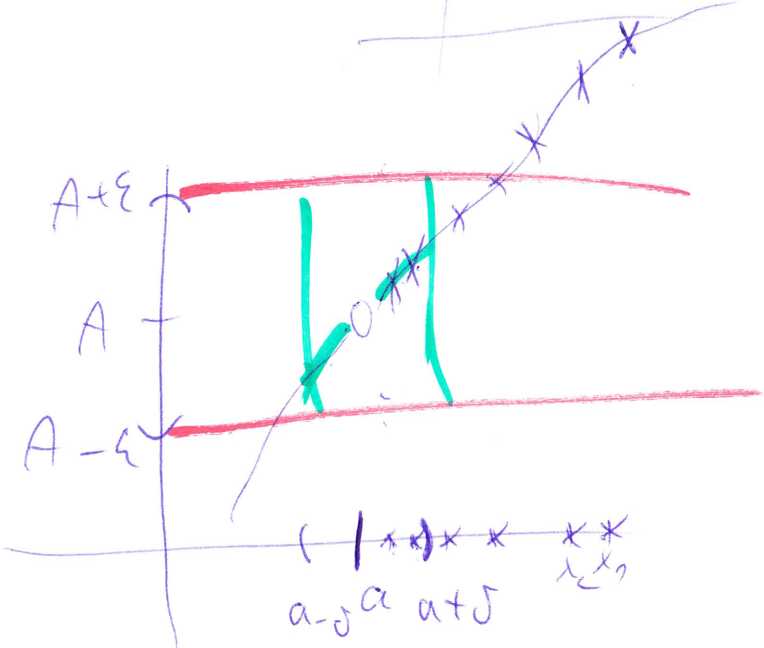
$\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ x_n \in B(a,\delta)$. Dále $x_n \neq a$,

tedy $x_n \in P(a,\delta)$.

Tedy z (*) dostaneme

$f(x_n) \in B(A,\varepsilon)$.

To je přesně definice $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.




chceme $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0: f(x_n) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$

(i) $\lim f(x) = A$ (ii) $\forall x_n, x_n \to a, x_n \neq a$ $\lim f(x_n) = A$

Dk: (ii) $\Rightarrow$ (i): Dokážeme $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$.

$\neg(i)$: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in P(a, \delta) : \neg (f(x) \in B(A, \varepsilon))$

Toto použijeme pro $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

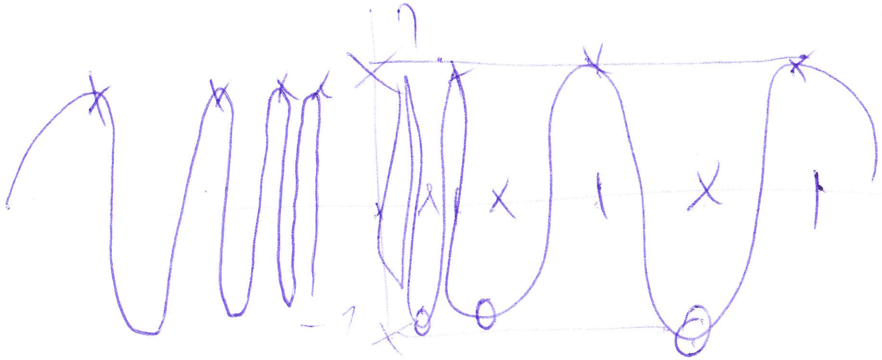
Dostaneme $\exists x_n \in P(a, \frac{1}{n}) : f(x_n) \notin B(A, \varepsilon)$.

Nyní $x_n \to a$. a $x_n \neq a$ $\Rightarrow$ na $\{x_n\}$ můžeme použít (ii)

$\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

a dostaneme $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$. Toto je spor s $f(x_n) \notin B(A, \varepsilon)$. $\square$

Příklad: $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$



zvolme $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi 2} \xrightarrow{k \to \infty} 0$

$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi 2$

Tak $\lim_{k \to \infty} \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = \lim_{k \to \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$

Podle Heineho věty $\lim \sin \frac{1}{x} = 1$, pokud existuje

zvolme $y_k = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi} \to 0$

Tak $\lim_{k \to \infty} \sin\left(\frac{1}{y_k}\right) = \lim_{k \to \infty} \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) = -1$ $\Rightarrow \lim \sin \frac{1}{x} = -1$

$\Rightarrow \lim \sin \frac{1}{x}$ neex