3. cvičení z PSt — 19. a 22.10.2020

Střední hodnota a rozptyl – vlastnosti

1. V testu je 20 otázek s volbami a,b,c,d. Za správnou odpověď (vždy je jen jedna odpověď správná) je 1 bod, za špatnou $-1/4$ bodu, za nevyplněnou otázku nula. Každá otázka je s pravděpodobností p jednou z těch, co se Kvído naučil a tedy zná správnou odpověď. Pokud správnou odpověď nezná, ví o tom, a může se rozhodnout, zda tipovat.

(a) Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Kvído získá, pokud bude odpovídat jenom otázky, u kterých zná odpověď?

(b) A co když bude tipovat, když nezná správnou odpověď?

(c) Jak by se musela změnit penalizace za chybnou odpověď, aby byly odpovědi v částech a, b stejné?

2. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n rublů. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

3. (a) Pokud $\mathbb{E}(X^2) = 0$, tak $P(X = 0) = 1$.

(b) Předpokládejme, že $var(X) = 0$, dále že $\mathbb{E}(X)$ existuje a je konečná. Pak $X = \mathbb{E}(X)$ s.j.

4. Nechť X je diskrétní n.v. nabývající jen hodnot z $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ukažte, že platí

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).$$

5. Nechť X, Y jsou n.n.v., $a \in \mathbb{R}$.

(a) Vyjádřete $var(aX)$ pomocí $var(X)$.

(b) Ukažte, že $var(X + b) = var(X)$ pro libovolné reálná b.

(c) * Ukažte, že $var(X + Y) = var(X) + var(Y)$.

6. Ukažte, že jevy A, B jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé jejich indikátorové veličiny.

Parametry konkrétních rozdělení

7. Nechť X má uniformní rozdělení na množině $\{a, a + 1, a + 2, \dots, b\}$ (pro celá čísla $a < b$). Určete $\mathbb{E}(X)$ a $var(X)$.

8. Nechť X je součet n nezávislých náhodných veličin s rozdělením $Bern(p)$.

(a) Ukažte, že $X \sim Bin(n, p)$.

(b) Ukažte na příkladu, že tvrzení nemusí být pravda pro závislé n.v.

9. Nechť $X \sim Bin(n, p)$. Určete $\mathbb{E}(X)$, $var(X)$.

10. Nechť $X \sim Bin(m, p)$ a $Y \sim Bin(n, p)$ jsou n.n.v. Pak $X + Y \sim Bin(m + n, p)$.

11. Nechť $X \sim Pois(\lambda)$, $Y \sim Pois(\mu)$ jsou n.n.v. Pak $X + Y \sim Pois(\lambda + \mu)$.

Náhodné vektory

12. Ze standardního balíčku s 52 kartami vytáhneme dvě karty. Označíme X počet vytažených es, Y počet králů. Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pstní funkce p_X, p_Y.

13. Ukažte, že pro diskrétní nezávislé n.v. X, Y platí

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y).$$

14. Označme X_1, X_2, X_3 výsledky tří nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, …, 4).

(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $\max(X_1, X_2)$?

(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $\max(X_1, X_2, X_3)$?

Bonusy

15. Na kostce padne číslo i s pravděpodobností p_i pro $i = 1, \dots, 6$. Hodíme n-krát a označíme X_i počet hodů, kdy padlo i.

(a) Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro n.v. $X_1, \dots, X_n$.

(b) Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých n.v. X_i?

16. Připomeňte si definici indikátorové náhodné veličiny I_A.

(a) Jaká je $\mathbb{E}(I_A)$?

(b) Nechť $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Ověřte rovnost

$$1 - I_A = \prod_{i=1}^{n} (1 - I_{A_i}).$$

(c) Roznásobte, použijte větu o linearitě střední hodnoty, abyste získali princip inkluze a exkluze.

17. V pytlíku N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme dva, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

(a) Určete $\mathbb{E}(X)$.

(b) * A co když vytáhneme tři, čtyří, $\dots$, k bonbónů?

K procvičení

18. N.n.v. $X_1, \dots, X_n$ mají geometrické rozdělení s parametry $p_1, \dots, p_n$. Jaké je rozdělení $\min(X_1, \dots, X_n)$?

19. Na dvanáctistěnné kostce je jedna stěna označena jedničkou, dvě dvojkou, čtyři čtyřkou a pět pětkou, všechny stěny padají stejně často. Označíme X výsledek jednoho hodu. Spočítejte $\mathbb{E}(X)$ a $var(X)$, vyčíslete taky tzv. *směrodatnou odchylku*, která je definovaná jako $\sigma_X = \sqrt{var(X)}$.