NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1
3. přednáška

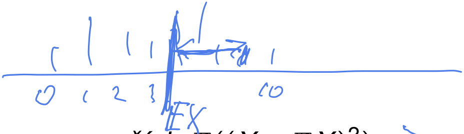
Robert Šámal

Přehled

Parametry náhodných veličin

Náhodné vektory

Rozptyl



Definice

Rozptyl (variance) n.v. X nazveme číslo $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)$. ≥ 0

$\mathbb{E}(X)$

Značíme jej $var(X)$.

Věta

$$var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

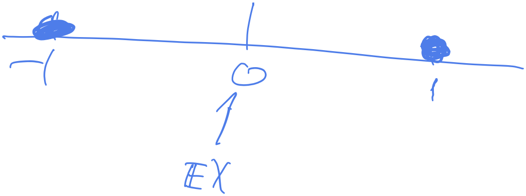
≥ 0

Pozn: $var(X) = 0$

$\Updownarrow$

$P(X \neq \mathbb{E}X) = 0$

$\mathbb{E}X^2 = 1$ $\qquad \mathbb{E}(X-0)^2$ //



$X = \begin{cases} +1 & p = \frac{1}{2} \\ -1 & p = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\mathbb{E}X = 0$

Parametry rozdělení – Bernoulliho

Pro $X \sim Bern(p)$ je

- $\mathbb{E}(X) = p$
- $var(X) = p - p^2$

$X = \begin{cases} 1 & pst \quad p \\ 0 & \quad 1-p \end{cases}$

$\mathbb{E}X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = \underline{p}$

$X^2 = X \Rightarrow \mathbb{E}X^2 = p$

$var\, X = p - p^2$

Parametry rozdělení – binomické

Pro $X \sim Bin(n, p)$ je

- $\mathbb{E}(X) = np$
- $var(X) = np(1-p)$

$$n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

$$\|$$

$$EX = \sum_{k=0}^{n} k\, p_X(k) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underline{p n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}}$$

$$= pn \cdot \left(p + (1-p)\right)^{n-1} = pn \cdot 1$$

Parametry rozdělení – geometrické

Pro $X \sim Geom(p)$ je

- $\mathbb{E}(X) = 1/p$
- $var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

„počet úspěchů $\doteq pN$"

$\Rightarrow$ ø čekání na úspěch $\frac{N}{pN} = \frac{1}{p}$

XX • $\boxed{\text{XXX} \bullet}$ • XX • • ....

$EX = \sum k \cdot p_X(k) = \dots$

N hodně velké
opak. Bern (p)

alt. postup

X n.v. $Im\, X \subseteq \mathbb{N}_0 \Rightarrow EX = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$

pro $X \sim Geom(p)$ $\quad P(X > k) = (1-p)^k$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Parametry rozdělení – Poissonovo

Pro $X \sim Pois(\lambda)$ je

- $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- $var(X) = \lambda$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \text{(pro } k=0 \text{ vyjde } 0\text{)}$$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}}_{=1} = \underline{\lambda}$$

Přehled

Základní popis náhodných vektorů

- X, Y – náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Budeme chtít uvažovat (X, Y) jako jeden objekt – náhodný vektor.
- Jak to udělat?
- Příklad: házíme dvakrát čtyřstěnnou kostkou, $X =$ první hod, $Y =$ druhý hod.

X\Y	1	2	3	4
1	1/16	1/16	—	...
2	-	-	-	
3				
4	-	-	-	-

vs.

X\Y	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	0	1/4	0	0
3	0	0	1/4	0
4	0	0	0	1/4

Sdružené rozdělení

přip. $p_X(x) = P(X=x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega)=x\})$

Definice

Pro diskrétní n.v. X, Y na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definujeme jejich sdruženou pravděpodobnostní funkci (joint pmf) $p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ předpisem

$$p_{X,Y}(x,y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \& Y(\omega) = y\}).$$

$= P(X=x, Y=y)$

- Mohli bychom definovat i pro více než dvě n.v. $p_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$.

Marginální rozdělení

sdružená p.f. marginální p.f.

- Máme-li dáno $p_{X,Y}$, jak zjistit rozdělení jednotlivých složek, tj. p_X a p_Y?

① Jde z $p_{X,Y}$ jednozn. určit $\boxed{p_X}$ a p_Y? Ano

② A naopak? Z p_X, p_Y určit $p_{X,Y}$? Ne

x\y	1	2	3	4	Σ
1	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
2					1/4
3					1/4
4					1/4
Σ	1/4	1/4	1/4	1/4	1

vs.

x\y	1	2	3	4	
1	1/4	0	0	0	1/4
2	0	1/4	0	0	1/4
3	0	0	1/4	0	1/4
4	0	0	0	1/4	1/4
	1/4	1/4	1/4	1/4	

$$\underline{P(X=1)} = P(X=1 \,\&\, Y=1) + P(X=1 \,\&\, Y=2) + \dots$$

Věta: diskr. n.v. X, Y

1) $P_X(x) = P(X=x) = \sum_{y \in \operatorname{Im} Y} P(X=x \,\&\, Y=y)$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$= \sum_{y \in \operatorname{Im} Y} P_{X,Y}(x,y).$

2) $P_Y(y) = \sum_{x \in \operatorname{Im} X} P_{X,Y}(x,y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Dk}}$ $P(\{\omega : X(\omega)=x\}) = P\left(\bigcup_{y \in \operatorname{Im} Y} \{\omega : X(\omega)=x \,\&\, Y(\omega)=y\}\right)$

$= \sum_{y \in \operatorname{Im} Y} P(X=x, Y=y)$

Funkce náhodného vektoru

$Z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$

Věta

Nechť X, Y jsou n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, nechť $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce.

- *Pak $Z = g(X, Y)$ je n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*
- *a platí pro ni*

$$\mathbb{E}(Z) \qquad \mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x \in ImX} \sum_{y \in ImY} g(x, y) \underbrace{P(X = x, Y = y)}_{P_{X,Y}(x,y)}.$$

Dk - jako minule "LOTUS"

Linearita stř. hodnoty

Věta

Pro X, Y n.v. a ~~a, b~~ $\in \mathbb{R}$ platí

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

$a \sum x P(X=x) = a \cdot EX$

$\boxed{Dk}$ $g(x,y) = ax + by$

$= E(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y (ax+by) P(X=x, Y=y) = a \sum_x x \sum_y P(X=x, Y=y) + \sum_y \sum_x by P(X=x, Y=y)$

Důkaz věty o rozptylu

$$var(X) \overset{Def}{=} E\left((X - EX)^2\right) \overset{?}{=} EX^2 - (EX)^2$$

$$= E\left(1 \cdot X^2 - 2EX \cdot X + (EX)^2\right)$$

$$+ (-2EX) \cdot X + (EX)^2$$

$$= E(X^2) + (-2EX) \cdot EX + (EX)^2$$

$$= E(X^2) - (EX)^2$$

$$E(aX + b \cdot Y + c \cdot Z)$$

$$= aEX + bEY$$

$$+ cEZ$$

$\vdots$

Nezávislost náhodných veličin

Definice

Diskrétní n.v. X, Y jsou nezávislé (independent) pokud pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ jsou jevy $\{X = x\}$ a $\{Y = y\}$ nezávislé. To nastane, právě když

$$P_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y). = P_X(x)\,P_Y(y)$$

$P(X=1, Y=1) \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

$P(X=1, Y=2) \neq$

X \ Y	1	2	3	4	
1	1/16	1/16	—	- -	1/4
2	-	1/16			1/4
3					1/4
4	- -	-	-	—	1/4
	1/4				

vs.

X \ Y	1	2	3	4	
1	1/4	0	0	0	1/4
2	0	1/4	0	0	
3	0	0	1/4	0	
4	0	0	0	1/4	
	1/4	1/4			

Součin nezávislých n.v.

Věta

Pro nezávislé diskrétní n.v. X, Y platí

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

$\mathbb{E}(X \cdot X) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}X$ NEPLATÍ ŠKODA VÁLCE

(pozn. nezávislost naopak neplatí!)

Dk $\quad EXY = \sum_{x \in Im X} \sum_{y \in Im Y} x \cdot y \; P(X=x, Y=y)$

$g(x,y) = x \cdot y$

$= P(X=x) \cdot P(Y=y)$

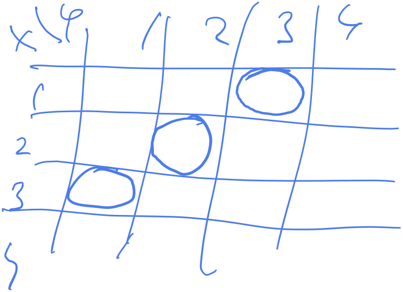
$$\left[\sum_{x \in Im X} x \, P(X=x)\right] \cdot \left[\sum_{y \in Im Y} y \cdot P(Y=y)\right]$$

$= \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

Součet nezávislých n.v.

- Máme-li dáno $p_{X,Y}$, jak zjistit rozdělení součtu, $Z = X + Y$?

$\longrightarrow p_Z(4) =$



$P(Z=4) = \sum$

$= P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=2)$

$+ P(X=3, Y=1)$

$\underbrace{P(\{\omega : Z(\omega) = 4\})}$

$\{\omega : X(\omega) = 1 \;\&\; Y(\omega) = 3\} \cup \{X=2, Y=2\}$

$\cup \{X=3, Y=1\}$

Součet nezávislých n.v. – konvoluce

$\boxed{\text{diskrétní}}$

Věta

Pokud X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny (zkráceně n.n.v.), tak jejich součet $Z = X + Y$ má pravděpodobnostní funkci

$$P(Z = z) = \sum_{x \in ImX} P(X = x)P(Y = z - x).$$

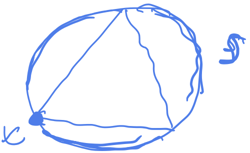
Dk

$$\{\omega : Z(\omega) = z\} = \bigcup_{x \in ImX} \{X = x \ \&\ Y = z - x\}$$

$$P(Z = z) = \sum_{x \in ImX} P(X = x, Y = z - x) =$$

náhodná tětiva kruhu

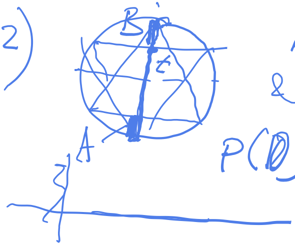
D : tětiva je delší než strana rs. Δ



1) náhodné dva body x, y

$P(D) = P(y \in S) = \underline{1/3}$

2)



náh. směr & unif. poloha

$P(D) = P(t \in A \cup B)$

$= \underline{\frac{1}{2}}$