NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1
3. přednáška

Robert Šámal

Přehled

Rozptyl

Definice

Rozptyl (variance) n.v. X nazveme číslo $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)$. Značíme jej $var(X)$.

Věta

$$var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Parametry rozdělení – Bernoulliho

Pro $X \sim Bern(p)$ je

- $\mathbb{E}(X) = p$
- $var(X) = p - p^2$

Parametry rozdělení – binomické

Pro $X \sim Bin(n, p)$ je

- $\mathbb{E}(X) = np$
- $var(X) = np(1 - p)$

Parametry rozdělení – geometrické

Pro $X \sim Geom(p)$ je

- $\mathbb{E}(X) = 1/p$
- $var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Parametry rozdělení – Poissonovo

Pro $X \sim Pois(\lambda)$ je

- $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- $var(X) = \lambda$

Přehled

Základní popis náhodných vektorů

- X, Y – náhodné veličiny na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Budeme chtít uvažovat (X, Y) jako jeden objekt – náhodný vektor.
- Jak to udělat?
- Příklad: házíme dvakrát čtyřstěnnou kostkou, $X =$ první hod, $Y =$ druhý hod.

Sdružené rozdělení

Definice

Pro diskrétní n.v. X, Y na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definujeme jejich sdruženou pravděpodobnostní funkci (joint pmf) $p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ předpisem

$$p_{X,Y}(x, y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \& Y(\omega) = y).$$

- Mohli bychom definovat i pro více než dvě n.v. $p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$.

Marginální rozdělení

- Máme-li dáno $p_{X,Y}$, jak zjistit rozdělení jednotlivých složek, tj. p_X a p_Y?

Funkce náhodného vektoru

Věta

Nechť X, Y jsou n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, nechť $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce.

- *Pak $Z = g(X, Y)$ je n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*
- *a platí pro ni*

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x \in ImX} \sum_{y \in ImY} g(x, y) P(X = x, Y = y).$$

Věta

Pro X, Y n.v. a $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Důkaz věty o rozptylu

Nezávislost náhodných veličin

Definice

Diskrétní n.v. X, Y jsou nezávisle (independent) pokud pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ jsou jevy $\{X = x\}$ a $\{Y = y\}$ nezávislé. To nastane, právě když

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Součin nezávislých n.v.

Věta

Pro nezávislé diskrétní n.v. X, Y platí

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Součet nezávislých n.v.

- Máme-li dáno $p_{X,Y}$, jak zjistit rozdělení součtu, $Z = X + Y$?

Součet nezávislých n.v. – konvoluce

Věta

Pokud X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny (zkráceně n.n.v.), tak jejich součet $Z = X + Y$ má pravděpodobnostní funkci

$$P(Z = z) = \sum_{x \in ImX} P(X = x)P(Y = z - x).$$