Ortogonální polynomy

Petr Tichý

10. prosince 2018

1 Ortogonální polynomy

weight function

assume

Uvažujme (obecně nekonečný) real interval $[a, b]$. Nechť funkce $v(x)$, kterou budeme nazývat vahou, je nezáporná a integrovatelná funkce taková, že

$$\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x > 0 \quad \text{a} \quad \mu_k \equiv \int_a^b x^k v\,\mathrm{d}x, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

jsou dobře definovaná konečná čísla. Čísla μ_k nazýváme *momenty.*

def

Definice. *Řekneme, že posloupnost polynomů p_i, $i = 0, 1, \ldots$ je ortogonální s vahou $v(x)$, jestliže je stupeň polynomu p_i roven i, tj. $\deg(p_i) = i$ a platí-li*

$$\int_a^b p_i\, p_j\, v\,\mathrm{d}x = 0, \quad i \neq j\,. \tag{1}$$

inner product

Množina všech polynomů tvoří vektorový (linear space) prostor (polynomy hrají roli vektorů). Podmínku (1) tak lze chápat jako podmínku ortogonality vzhledem ke skalárnímu součinu definovanému vztahem

$$\langle p, q\rangle_v \equiv \int_a^b p\, q\, v\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

kde p a q jsou polynomy. Lze lehce ověřit, že $\langle p, q\rangle_v$ je skutečně skalárním součinem dle definice. Poznamenejme, že níže popsaná teorie ortogonálních polynomů je formulována pro skalární součin (2). Lze ji přímočaře zobecnit pro obecnější skalární součin definovaný Riemann-Stieltjesovým integrálem

$$\langle p, q\rangle_\omega \equiv \int_a^b p\, q\,\mathrm{d}\omega(x),$$

kde $\omega(x)$ je neklesající funkce na intervalu (a, b) majíci konečné limity v a a b. Je-li $\omega(x)$ spojitě diferencovatelná, potom platí

$$\int_a^b p\, q\,\mathrm{d}\omega(x) = \int_a^b p\, q\, \omega'(x)\,\mathrm{d}x,$$

mesh size goes to zero

$$\int_a^b f(x)\, d\omega(x) \equiv \lim_{\|D\| \to 0} \sum_{x_j \in D} f(\xi_j)\,(\omega(x_{j+1}) - \omega(x_j))$$

where $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$

D ... a partitioning of $[a, b]$

$\|D\|$ ... $\max_j |x_{j+1} - x_j|$

a Riemann-Stieltjesův integrál lze uvažovat ve tvaru obyčejného integrálu s vahou $\omega'(x)$. Definice Riemann-Stieltjesova integrálu však umožnuje uvažovat obecnější nediferencovatelné distribuční funkce, například po částech konstantní funkci $\omega(x)$.

1.1 Existence ortogonálních polynomů

Věta. *Posloupnost ortogonálních polynomů existuje.*

Důkaz. Budeme ortogonalizovat mocninnou bázi $\{1, x, x^2, \dots\}$ prostoru polynomů. Množina polynomů obsahující jediný nenulový konstantní polynom p_0 tvoří ortogonální systém. Nyní předpokládejme, že polynomy $p_0, \dots, p_k$ tvoří ortogonální systém. Zkonstruujeme p_{k+1} tak, aby i množina $p_0, \dots, p_{k+1}$ tvořila ortogonální systém. Zvolme libovolné $c_{k+1} \neq 0$ a uvažujme polynom stupně $k+1$ ve tvaru

$$c_{k+1}x^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} c_i p_i. \tag{3}$$

Koeficienty $c_0, \dots, c_k$ určíme tak, že od polynomu $c_{k+1}x^{k+1}$ odečteme jeho ortogonální projekci do již sestrojené ortogonální báze $\{p_0, \dots, p_k\}$. Jinak řečeno, koeficienty $c_0, \dots, c_k$ určíme ze vztahů

$$\langle p_j, c_{k+1}x^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} c_i p_i \rangle_v = 0, \quad j = 0, \dots, k\,. \tag{4}$$

Z (4) a z ortogonality polynomů $p_0, \dots, p_k$ plyne pro $j = 0, \dots, k$

$$c_j = \frac{\langle p_j, x^{k+1}\rangle_v}{\langle p_j, p_j\rangle_v} c_{k+1}\,.$$

$\square$

Z předchozí konstrukce plyne, že polynom p_{k+1} je určen jednoznačně až na volitelnou normalizační konstantu c_{k+1}. Polynomy $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k$ tvoří ortogonální bázi prostoru všech polynomů stupně nejvýše k, kde ortogonalita je měřena skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$.

1.2 Kořeny ortogonálních polynomů

Monic

Pro jednoduchost značení uvažujme v dalším volbu $c_{k+1} = 1$, tj. budeme uvažovat posloupnost monických ortogonálních polynomů.

distinct

Věta. *Všechny kořeny polynomu p_k jsou reálné, jednoduché a leží v (a, b).*

Realize

Důkaz. Uvědomme se nejprve, že nenulový polynom $q(x)$ mění v reálném intervalu (a, b) znaménko, pouze pokud má v tomto intervalu kořen liché násobnosti. Jinak řečeno, nemáli $q(x)$ v intervalu (a, b) žádný kořen nebo pouze kořeny sudé násobnosti, potom v daném intervalu nemění znaménko. Jelikož je navíc skoro všude nenulový, platí

$$\int_a^b q(x)v(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

Book

See also numerical methods for special functions

Označme nyní $\theta_1, \dots, \theta_r$ různé kořeny polynomu p_k, které leží v intervalu (a,b) a mají lichou násobnost. Takových kořenů může být nejvýše $k = \deg(p_k)$. Pokud žádný takový kořen neexistuje, položíme $r = 0$. Polynom p_k pak lze formálně vyjádřit ve tvaru

$$p_k(x) = q(x)(x-\theta_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x-\theta_1)^{n_r},$$

kde $n_1, \dots, n_r$ jsou lichá kladná čísla a polynom $q(x)$ nemění v (a,b) znaménko. Definujme dále polynom p stupně r,

$$p(x) \equiv (x-\theta_1)\dots(x-\theta_r)$$

a pro $r = 0$ položíme $p \equiv 1$.

Uvažujme integrál

$$\langle p_k, p\rangle_v = \int_a^b p_k(x)\, p(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b q(x)(x-\theta_1)^{n_1+1} \cdot \dots \cdot (x-\theta_1)^{n_r+1}\, v(x)\, \mathrm{d}x$$

a ukažme sporem, že $r = k$.

Je-li $r < k$, potom je $\langle p_k, p\rangle_v = 0$, jelikož p_k je ortogonální k polynomům nižšího stupně. Zároveň však víme, že polynom $q(x)(x-\theta_1)^{n_1+1} \cdot \dots \cdot (x-\theta_1)^{n_r+1}$ nemění v intervalu (a,b) znaménko ($n_j + 1$ jsou sudá čísla a q nemění znaménko), je skoro všude nenulový a tudíž je výsledný intergrál nenulový. Dostáváme spor s předpokladem $r < k$. Musí tedy platit $r = k$, tj. p_k má v reálném intervalu (a,b) k různých kořenů.

Ukázali jsme, že ortogonální polynom p_k stupně k má v intervalu (a,b) právě k různých kořenů. Jinak řečeno, všechny kořeny p_k jsou reálné, jednoduché a leží v intervalu (a,b). □

Golub
Look [Meurant, p. 12]

1.3 Tříčlenná rekurence pro monické polynomy

satisfy or can be computed

Věta. *Monické ortogonální polynomy $p_0, p_1, \dots, p_n$ lze počítat tříčlennou rekurencí*

$$p_{k+1}(x) = (x-\alpha_k)p_k - \beta_k p_{k-1}(x), \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{5}$$

přičemž $p_0(x) = 1$, $p_1 = x - \alpha_0$. Koeficienty α_k pro $k = 0, \dots, n-1$ a β_k pro $k = 1, \dots, n-1$ jsou dány vztahy

where

$$\alpha_k = \frac{\langle p_k, xp_k\rangle_v}{\langle p_k, p_k\rangle_v}, \qquad \beta_k = \frac{\langle p_k, p_k\rangle_v}{\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle_v}.$$

$k = 0, \dots, n-1$ $\qquad$ $k = 1, \dots, n-1$

Důkaz. Polynom xp_k stupně $k+1$ lze vyjádřit v bázi ortogonálních polynomů $\{p_0, \dots, p_{k+1}\}$,

$$xp_k = \sum_{i=0}^{k+1} \gamma_i p_i. \tag{6}$$

Polynom xp_k je monický a proto $\gamma_{k+1} = 1$. Využijeme-li ortogonality polynomů p_i, platí

$$\langle xp_k, p_j\rangle_v = \gamma_j \langle p_j, p_j\rangle_v\,, \qquad j = 0, 1, \dots, k. \tag{7}$$

Skalární součin na levé straně (7) lze ekvivalentně vyjádřit ve tvaru $\langle p_k, xp_j\rangle_v$. Jelikož je polynom p_k ortogonální ve všem polynomům stupně nižšího, platí $\langle p_k, xp_j\rangle_v = 0$ pro $j = 0, \ldots, k-2$ a tudíž je i $\gamma_j = 0$ pro tyto indexy. Pro $j = k-1$ a $j = k$ dostáváme

$$\gamma_{k-1} = \frac{\langle p_k, xp_{k-1}\rangle_v}{\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle_v} = \frac{\langle p_k, p_k\rangle_v}{\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle_v}, \qquad \gamma_k = \frac{\langle p_k, xp_k\rangle_v}{\langle p_k, p_k\rangle_v}.$$

Označením $\beta_k \equiv \gamma_{k-1}$ a $\alpha_k \equiv \gamma_k$ dostaneme tvrzení věty. □

num. stabilita

1.4 Normalizované ortogonální polynomy

compute root via 3D sym. m

Dosud jsme uvažovali monické ortogonální polynomy. Z numerického hlediska je praktičtější generovat *ortonormální* ortogonální polynomy

$$\psi_k(x) \equiv \frac{p_k(x)}{\|p_k(x)\|_v}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

kde

$$\|p(x)\|_v \equiv \sqrt{\langle p, p\rangle_v} = \sqrt{\int_a^b p^2(x)\, v(x) \mathrm{d}x}.$$

Polynomy ψ_k jsou normalizovány tak, že platí $\|\psi_k(x)\|_v = 1$, $k = 0, \ldots, n$. Jelikož ψ_k jsou skalárními násobky p_k, jde rovněž o posloupnost ortogonálních polynomů, pouze s jinou volbou normalizačního koeficientu c_{k+1}.

Koeficient β_k z věty o tříčlenné rekurenci lze vyjádřit pomocí norem ve tvaru

$$\beta_k = \frac{\|p_k\|_v^2}{\|p_{k-1}\|_v^2}.$$

Platí tedy

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k - \frac{\|p_k\|_v^2}{\|p_{k-1}\|_v^2} p_{k-1}(x)$$

a po úpravě

$$\frac{\|p_{k+1}\|_v}{\|p_k\|_v} \frac{p_{k+1}(x)}{\|p_{k+1}\|_v} = (x - \alpha_k)\frac{p_k(x)}{\|p_k\|_v} - \frac{\|p_k\|_v}{\|p_{k-1}\|_v} \frac{p_{k-1}(x)}{\|p_{k-1}\|_v}.$$

Využijeme-li definice ψ_k a β_k, získáme tříčlennou rekurenci pro výpočet ψ_{k+1},

$$\sqrt{\beta_{k+1}}\psi_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)\psi_k - \sqrt{\beta_k}\psi_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{8}$$

kde

$$\psi_{-1} = 0, \qquad \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}, \qquad \beta_0 = \int_a^b v(x)\, \mathrm{d}x.$$

1.5 Tříčlenná rekurence a tridiagonální matice

Označíme-li vektor

$$P_n(x) \equiv [p_0, p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)]^T,$$

lze tříčlenné rekurence (5) zapsat ve tvaru

$$xP_n(x) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} P_n(x) + p_n(x)e_n, \tag{9}$$

kde e_n je n-tý sloupec jednotkové matice velikosti n. Podobně lze označit vektor normalizovaných ortogonálních polynomů

$$\Phi_n(x) \equiv [\psi_0, \psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)]^T$$

a zapsat tříčlenné rekurence (8) zapsat ve tvaru

$$x\Phi_n(x) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \Phi_n(x) + \sqrt{\beta_n}\psi_n(x)e_n. \tag{10}$$

Matici ve vztahu (10) označíme jako J_n a budeme ji nazývat *Jacobiho maticí*. Poznamenejme, že zatímco matice koeficientů v (9) je obecně nesymetrická, matice J_n je vždy symetrická.

Ukažme nyní vztah mezi vlastními čísly matice J_n a kořeny ortogonálního polynomu ψ_n. Nechť μ je kořenem ortogonálního polynomu ψ_n, tj. $\psi_n(\mu) = 0$. Potom platí

$$\mu\Phi_n(\mu) \;=\; J_n\Phi_n(\mu), \qquad \Phi_n(\mu) = [\psi_0(\mu), \psi_1(\mu), \ldots, \psi_{n-1}(\mu)]^T.$$

Protože je $\psi_0 = \beta_0^{-1/2} \neq 0$, je $\Phi_n(\mu)$ nenulový vektor a je tedy vlastním vektorem matice J_n a μ příslušným vlastním číslem J_n. Jelikož navíc víme, že kořeny ortogonálního polynomu ψ_n jsou jednoduché a každý kořen je vlastním číslem J_n, jsou vlastní čísla Jacobiho matice J_n právě kořeny ortogonálního polynomu $\overset{\psi}{\cancel{p}}_n$. Kořeny ortogonálního polynomu ψ_n lze tedy počítat jako vlastní čísla Jacobiho matice J_n.

→ more usual [illegible] 3-term rec.

Vlastní vektory symetrické matice příslušné k různým vlastním číslům jsou ortogonální. V našem případě, jsou-li $\theta_1, \ldots, \theta_n$ kořeny ortogonálního polynomu ψ_n, potom má matice

$$\tilde{S}_n = [\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n] \equiv \begin{bmatrix} \beta_0^{-1/2} & \beta_0^{-1/2} & \ldots & \beta_0^{-1/2} \\ \psi_1(\theta_1) & \psi_1(\theta_2) & \ldots & \psi_1(\theta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{n-1}(\theta_1) & \psi_{n-1}(\theta_2) & \ldots & \psi_{n-1}(\theta_n) \end{bmatrix}$$

do not know roots (except cheb)

ortogonální sloupce. Normalizujeme-li sloupce matice $\tilde{S}_n$,

$$S_n \equiv \left[\frac{\tilde{s}_1}{\|\tilde{s}_1\|}, \dots, \frac{\tilde{s}_n}{\|\tilde{s}_n\|} \right] \tag{11}$$

získáme spektrální rozklad matice J_n,

$$J_n = S_n \Theta_n S_n^T,$$

kde $\Theta_n \equiv \mathrm{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$.

1.6 Příklady ortogonálních polynomů

Speciální volbou váhové funkce dostaneme konkrétní typy ortogonálních polynomů. Ortogonální polynomy definované na omezeném intervalu je zvykem uvádět pro referecní interval $[-1, 1]$. Na obecný interval $[a, b]$ je lze snadno transformovat pomocí lineární transformace

$$y = \frac{x(b-a) + a + b}{2}.$$

Ortogonální polynomy uvádíme s normalizací obvyklou v literatuře.

Legendreovy polynomy jsou ortogonální polynomy na $[-1, 1]$ s vahou $v(x) = 1$, platí

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x\, P_n(x) - \frac{n}{n+1}\, P_{n-1}(x).$$

Čebyševovy polynomy jsou ortogonální polynomy na $[-1, 1]$ s vahou $v(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2\, x\, T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Laguerrovy polynomy jsou ortogonální polynomy na intervalu $[0, \infty]$ s $v(x) = e^{-x}$. Splňují tříčlennou rekurenci

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_{n+1}(x) = \frac{2n+1-x}{n+1}\, L_n(x) - \frac{n}{n+1}\, L_{n-1}(x).$$

Hermitovy polynomy jsou ortogonální polynomy na intervalu $[-\infty, \infty]$ s $v(x) = e^{-x^2}$. Splňují tříčlennou rekurenci

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x).$$

Jacobiovy polynomy jsou ortogonální polynomy na $[-1,1]$ s vahou $v(x) = (1-x)^\alpha(1-x)^\beta$, kde $\alpha, \beta > -1$,

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(2n+\alpha+\beta-1)\left[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x+\alpha^2-\beta^2\right]}{2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &\quad - \frac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)} P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x), \end{aligned}$$

pro $n = 2, 3, \ldots$, kde

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1 \quad , P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)\,x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,.$$

Pro speciální volbu $\alpha = \beta = 0$ dostáváme Legendrovy polynomy, pro $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ pak Čebyševovy polynomy.

2 Gaussova kvadratura

Naším cílem je numericky aproximovat hodnotu integrálu

$$\int_a^b f(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{12}$$

kde $v(x)$ je váha uvažovaná v definici ortogonálních polynomů. Integrál (12) se budeme snažit aproximovat výrazem tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\, f(\lambda_i)\,, \tag{13}$$

který se nazývá *kvadraturní formule.* Čísla w_i nazýváme *váhy* kvadraturního vzorce a body λ_i, ležící v intervalu $[a,b]$, jeho *uzly.* Uzly a váhy kvadraturního vzorce jsou nezávislé na integrované funkci. Platí-li

$$\int_a^b p(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} w_i\, p(\lambda_i)$$

pro libovolný polynom p stupně nejvýše m, říkáme, že kvadraturní vzorec (13) má *algebraickou* přesnost m. V následujícím se budeme zabývat otázkou, jaké nejvyšší algebraické přesnosti kvadraturního vzorce lze dosáhnout pomocí vhodné volby uzlů a vah. Jelikož má kvadraturní vzorec (13) $2n$ volných parametrů (n uzlů a n vah) lze očekávat, že bude možné dosáhnout algebraické přesnosti $2n-1$. Ukážeme, že kvadraturní vzorec (13) s algebraickou přesností $2n-1$ existuje a nazveme jej *Gaussův.*

2.1 Gaussův kvadraturní vzorec

Věta. *Kvadraturní vzorec (13) je Gaussův právě tehdy, když*

$$\lambda_i = \theta_i \quad a \quad w_i = \int_a^b \ell_i(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x\,, \qquad i = 1, \ldots, n$$

kde θ_i jsou kořeny ortogonálního polynomu ψ_n a ℓ_i jsou elementární Lagrangeovy interpolační polynomy na interpolačních uzlech θ_i.

no proof

Důkaz. Nechť p je libovolný polynom stupně nejvýše $2n-1$. Uvažujme Lagrangeův interpolační polynom L_{n-1} stupně nejvýše $n-1$ interpolující p v bodech λ_i,

$$L_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n} p(\lambda_j)\, \ell_j(x).$$

Polynom $p(x) - L_{n-1}(x)$ má v bodech λ_i kořeny, je tedy násobkem polynomu $\omega_n(x)$,

$$\omega_n(x) \equiv \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i), \qquad \text{a} \quad p(x) - L_{n-1}(x) = q(x)\omega_n(x)\,, \tag{14}$$

pro nějaký polynom q stupně nejvýše $n-1$.

Ukažme nyní ekvivalenci. Nejprve předpokládejme, že daný kvadraturní vzorec je Gaussův. Potom pro libovolný polynom p, stupně nejvýše $2n-1$, platí

$$\int_a^b p(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} w_j\, p(\lambda_j)\,.$$

Využijeme-li vyjádření (14), dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} w_j\, p(\lambda_j) &= \int_a^b \left[L_{n-1}(x) + q(x)\omega_n(x)\right]\, v(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{n} p(\lambda_j)\, \ell_j(x) + q(x)\omega_n(x)\right]\, v(x)\, \mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Polynom p můžeme volit libovolně. Zvolme jej tedy tak, že $p(\lambda_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Potom pro libovolný polynom q stupně nejvýše $n-1$ musí vzhedem k (15) platit,

$$0 = \int_a^b q(x)\omega_n(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{16}$$

Polynom $\omega_n(x)$ je tedy nutně násobkem ortogonálního polynomu ψ_n, který je kolmý ke všem polynomům nižšího stupně, a λ_i jsou rovny kořenům θ_i polynomu ψ_n. Dosadíme-li do (15) postupně za integrovaný polynom p polynomy $\ell_j(x)$, dostaneme vyjádření vah w_i.

Naopak, nechť platí podmínka ortogonality a vzorec pro váhy w_i. Nechť p je libovolný polynom stupně nejvýše $2n-1$. Pomocí vyjádření (14) a tvaru polynomu $L_{n-1}(x)$ snadno zjistíme, že platí

$$\int_a^b p(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} w_j p(\theta_j)$$

□

Protože víme, že při libovolné nezáporné váze má ortogonální polynom libovolného stupně n v intervalu (a, b) n různých kořenů, lze je zvolit za uzly Gaussovy kvadratury a tím je její existence pro libovolné n dokázána. Zároveň je vidět, že uzly i váhy jsou určeny jednoznačně.

Všimněme si ještě, že elementární Lagrangeův interpolační polynom ℓ_j je stupně n, čtverec ℓ_j^2 je stupně $2n$ a musí tedy být Gaussovým kvadraturním vzorcem s $n+1$ uzly integrován přesně. Dostaneme

$$\int_a^b v(x)\, \ell_j^2(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} w_i\, \ell_j^2(\theta_i) = w_j\,.$$

Odtud je vidět, že všechny váhy Gaussova kvadraturního vzorce jsou kladné. Gaussův kvadraturní vzorec lze také chápat tak, že místo dané funkce integrujeme přesně její Hermitovský interpolační polynom.

Různé volby váhových funkcí dávají různé známé typy kvadratur. Pro $v(x) = 1$ máme Gaussovu-Legendreovu kvadraturu, pro $v(x = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ Gaussovu-Čebyševovu kvadraturu. Vhodnou volbou váhových funkcí můžeme získat i kvadraturní vzorce pro nekonečné intervaly. Volba $v(x) = e^{-x}$ dává kvadraturní vzorec pro interval $[, \infty)$. Na nekonečných intervalech však přesnost kvadratury není velká.

2.2 Uzly a váhy Gaussovy kvadratury

Ukažme nyní, jak spočíst váhy. Nejprve však připomeňme větu o dělení polynomů [Hoffman, Kunze, p. 128, Theorem 4].

Věta. *Nechť p a $q \neq 0$ jsou polynomy. Potom existují polynomy r a s takové, že*

$$p = q \cdot s + r, \tag{17}$$

přičemž

$$\textit{buď} \quad r = 0 \quad \textit{nebo} \quad \deg(r) < \deg(q). \tag{18}$$

Polynomy s a r jsou podmínkami (17) *a* (18) *určeny jednoznačně.*

Libovolný polynom p stupně nejvýše $2n-1$ lze je pomocí předchozí věty vyjádřit ve tvaru

$$p(x) = \psi_n(x)s(x) + r(x), \tag{19}$$

kde ψ_n je ortonormální polynom (8). Jelikož je ψ_n stupně n, jsou s i r polynomy stupně nejvýše $n-1$. Polynom $r(x)$ lze tedy vyjádřit v bázi $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$,

$$r(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varrho_j \psi_j(x). \tag{20}$$

S využitím (19) a $\deg(s) \leq n-1$ dostáváme

$$\int_a^b p(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b r(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

Rozepíšeme-li $r(x)$ pomocí (20), platí

$$\int_a^b r(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n-1} \varrho_j \int_a^b \psi_j(x)\, \psi_0(x) v(x)\, \mathrm{d}x = \varrho_0.$$

Z předchozího víme, že uzly Gaussovy kvadratury jsou právě kořeny ortogonálního polynomu ψ_n. Volme nyní váhy w_j jako řešení soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \psi_1(\theta_1) & \psi_1(\theta_2) & \ldots & \psi_1(\theta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{n-1}(\theta_1) & \psi_{n-1}(\theta_2) & \ldots & \psi_{n-1}(\theta_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Z (19) plyne $p(\theta_j) = r(\theta_j)$ a proto

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\, p(\theta_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i\, r(\theta_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} \varrho_j \psi_j(\theta_i) \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \varrho_j \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \psi_j(\theta_i) \right) = \varrho_0,$$

kde jsme v poslední rovnosti použili (21).

Celkově jsem ukázali, že pokud volíme uzly kvadratury jako kořeny ψ_n a váhy w_i podle (21), potom pro libovolný polynom stupně nejvýše $2n-1$ platí

$$\int_a^b p(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = \varrho_0 = \sum_{i=1}^{n} w_i\, p(\theta_i),$$

tj. kvadraturní vzorec je Gaussův.

Váhy w_j lze díky (21) vyjádřit následovně. Přenásobíme-li (21) maticí $\tilde{S}_n^T$ a využijeme-li ortogonality matice $\tilde{S}_n$, lze w_j vyjádřit ve tvaru

$$w_j = \frac{1}{\|\tilde{s}_j\|^2} = s_{1,j}^2,$$

kde $s_{1,j}$ jsou první složky sloupců matice S_n normalizovaných vlastních vektorů, viz (11).

2.3 Golub-Welsch algoritmus

5.3.2
Book Num. methods
Special f.