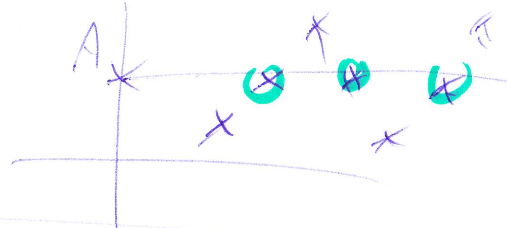
Def $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

Věta 2.12 $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^* \iff \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = A$

V2.13 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n, \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in H(\{a_n\})$

$\forall A \in H(\{a_n\}): \quad \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$



Důsledky: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak

a) $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$

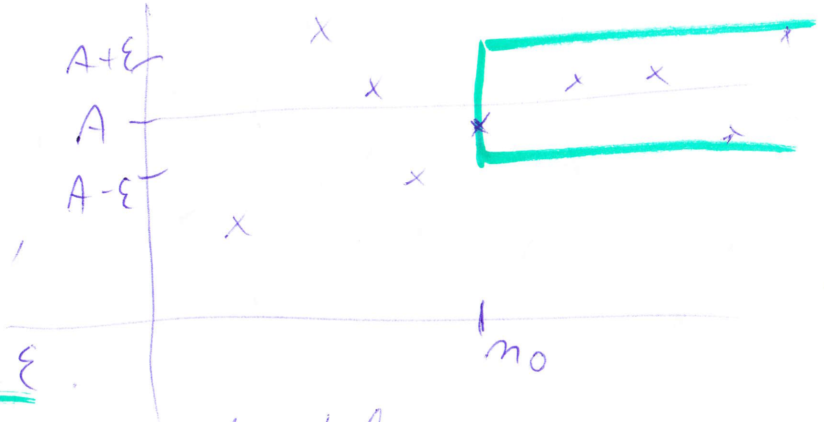
b) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \min H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \max H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$

c) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, pak $H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{A\}$.

Věta T 2.14 (BC podmínka) ~~Bolzano~~

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu, právě tehdy když splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku, tedy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m,n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$



Dk: "$\Rightarrow$" Nechť $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$.

Tedy $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$ a $n \geq n_0$ platí

$|a_m - a_n| \leq |a_m - A| + |A - a_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

"$\Leftarrow$" Nechť $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku.

Nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m,n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Toto použiju pro $m = n_0$ a dostanu $\forall n \geq n_0$ $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$.

Tedy a_n je omezená posloupnost a definujeme $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ a $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Z definice b_n a c_n dostaneme

$\forall n \geq n_0$ $\quad a_{n_0} - \varepsilon \leq c_n \leq b_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$

Tedy podle V2.5 $\quad a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$.

Odtud $0 \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n - \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq 2\varepsilon$. Toto platí $\forall \varepsilon > 0$, tedy

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Podle V2.12 $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ $\square$

$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots$

$c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots$

• PÍSEMNÁ ZKOUŠKA • ÚSTNÍ ZKOUŠKA

50b ≥ 25b 40b ≥ 25b (+10b)

SOUČET PÍSEMNÉ + ÚSTNÍ ≥ 50b

BUDE 1 TERMÍN V ZÁŘÍ.

PÍSEMKA:

120 minut.

1. limita posloupnosti (10b)
2. limita funkce (10b)
3. průběh funkce (20b)
4. teoretický příklad (10b)

} 50b ≥ 25b

Libovolná literatura. Žádná technika.

RADA 1: Začněte příklady 1, 2 a 3. (4. lze ignorovat)

ÚSTNÍ ČÁST:

1) klíčový pojem (0b)
2) 3 definice nebo znění věty (3×4b = 12b)
3) LV + důkaz (4 + 8 = 12b)
4) TV + důkaz (4 + 12 = 16b)

} 40b ≥ 25b

není časový limit

RADA 2: Musím umět důkazy? 12 + 4 + 4 = 20 < 25 ☹

Stačí umět lehké důkazy? 12 + 12 + 4 = 30 > 25 ☺

< 50 ☹

≥ 50b — [50, …, 59) … 3

≥ 60b (IMPLIKACE 10b) ≥ 70b 2

≥ 85b 1

(1) ⇐⇒ (2)

⇘⇖ ⇙⇗

(3)

3. Funkce jedné reálné proměnné – limita a spojitost

3.1. Základní definice

Def Funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení $f: M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

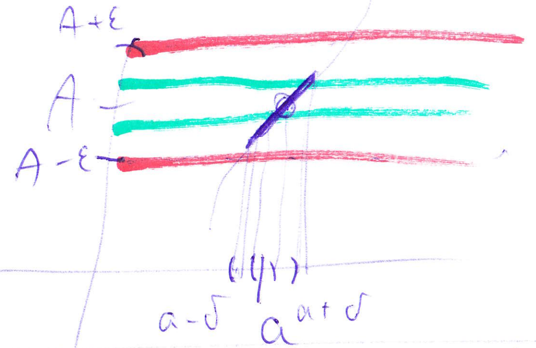
Def Řekneme, že funkce $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je

sudá, jestliže $\forall x \in M: (-x \in M) \,\&\, (f(x) = f(-x))$

lichá, jestliže $\forall x \in M: (-x \in M) \,\&\, (f(x) = -f(-x))$

periodická, jestliže $\exists p > 0, \forall x \in M: (x+p \in M) \,\&\, (f(x) = f(x+p))$

Def Řekneme, že funkce $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je omezená (omezená shora, omezená zdola) jestliže $f(M)$ je omezená (shora omezená, zdola omezená).



$P(+\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, \infty)$

$U(+\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$

$\forall x \in P(a, \delta): f(x) \in U(A, \varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}: f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon).$