Cvičenie 1

Dáša Teššerová

Prehľad používaných štruktúr

Formálna premenná D (z angl. delay), zvolené teleso $\mathbb{F}$

$\mathbb{F}[D]$ polynómy v D nad $\mathbb{F}$ $\sum_{i=0}^{n} f_i D^i;\, n \in \mathbb{N}$

invertibilné prvky : prvky $\mathbb{F}$

Prehľad používaných štruktúr

Formálna premenná D (z angl. delay), zvolené teleso $\mathbb{F}$

$\mathbb{F}[D]$	polynómy v D nad $\mathbb{F}$	$\sum_{i=0}^{n} f_i D^i$; $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{F}[D^{-1}, D]$	Laurentovské polynómy	$\sum_{i=n}^{m} f_i D^i$; $m, n \in \mathbb{Z}$

invertib. prvky: monočleny

$f_i D^i$, $f_i \neq 0$

$f_i^{-1} D^{-i}$

Prehľad používaných štruktúr

Formálna premenná D (z angl. delay), zvolené teleso $\mathbb{F}$

$\mathbb{F}[D]$	polynómy v D nad $\mathbb{F}$	$\sum_{i=0}^{n} f_i D^i$; $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{F}[D^{-1}, D]$	Laurentovské polynómy	$\sum_{i=n}^{m} f_i D^i$; $m, n \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{F}[[D]]$	formálne mocninové rady	$\sum_{i=n}^{\infty} f_i D^i$; $n \in \mathbb{N}$

invertib. prvky: $\sum_{i=0}^{\infty} f_i D^i$; $f_0 \neq 0$

Prehľad používaných štruktúr

Formálna premenná D (z angl. delay), zvolené teleso $\mathbb{F}$

$\mathbb{F}[D]$	polynómy v D nad $\mathbb{F}$	$\sum_{i=0}^{n} f_i D^i; n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{F}[D^{-1}, D]$	Laurentovské polynómy	$\sum_{i=n}^{m} f_i D^i; m, n \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{F}[[D]]$	formálne mocninové rady	$\sum_{i=n}^{\infty} f_i D^i; n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{F}(D)$	racionálne funkcie	$\frac{\sum_{i=0}^{n} f_i D^i}{\sum_{j=0}^{m} g_j D^j}; m, n \in \mathbb{N}$

invertib. prvky: nenulové

Prehľad používaných štruktúr

Formálna premenná D (z angl. delay), zvolené teleso $\mathbb{F}$

$\mathbb{F}[D]$	polynómy v D nad $\mathbb{F}$	$\sum_{i=0}^{n} f_i D^i;\ n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{F}[D^{-1}, D]$	Laurentovské polynómy	$\sum_{i=n}^{m} f_i D^i;\ m, n \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{F}[[D]]$	formálne mocninové rady	$\sum_{i=n}^{\infty} f_i D^i;\ n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{F}(D)$	racionálne funkcie	$\frac{\sum_{i=0}^{n} f_i D^i}{\sum_{j=0}^{m} g_j D^j};\ m, n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{F}((D))$	Laurentove rady	$\sum_{i=n}^{\infty} f_i D^i;\ n \in \mathbb{Z}$

invertib. prvky: nenulové

Prehľad používaných štruktúr

Formálna premenná D (z angl. delay), zvolené teleso $\mathbb{F}$

$\mathbb{F}[D]$	polynómy v D nad $\mathbb{F}$	$\sum_{i=0}^{n} f_i D^i;\ n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{F}[D^{-1}, D]$	Laurentovské polynómy	$\sum_{i=n}^{m} f_i D^i;\ m, n \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{F}[[D]]$	formálne mocninové rady	$\sum_{i=n}^{\infty} f_i D^i;\ n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{F}(D)$	racionálne funkcie	$\frac{\sum_{i=0}^{n} f_i D^i}{\sum_{j=0}^{m} g_j D^j};\ m, n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{F}((D))$	Laurentove rady	$\sum_{i=n}^{\infty} f_i D^i;\ n \in \mathbb{Z}$

Na zamyslenie

Prečo nie $\mathbb{F}(D^{-1}, D)$?

$\sum_{-\infty}^{\infty} f_i D^i$

$\mathbb{F}((D^{-1}, D))$

nejednoznačný inverz

Postupnosti a Laurentove rady

postupnosť	"D-transformácia"
$f = (f_0, f_1, \dots)$	$f(D) = \sum_{i=n}^{\infty} f_i D^i$

Postupnosti a Laurentove rady

postupnosť	"D-transformácia"
$f = (f_0, f_1, \dots)$	$f(D) = \sum_{i=n}^{\infty} f_i D^i$
konvolúcia	násobenie
$h = f * g$	$h(D) = f(D) \cdot g(D)$

Postupnosti a Laurentove rady

postupnosť	"D-transformácia"
$f = (f_0, f_1, \dots)$	$f(D) = \sum_{i=n}^{\infty} f_i D^i$
konvolúcia	násobenie
$h = f * g$	$h(D) = f(D) \cdot g(D)$

$$
\begin{aligned}
(f * g)_k &= \sum_{i+j=k} f_i g_j \\
&= \sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i}
\end{aligned}
$$

Príklad 1

Nájdite inverz k $(1 + D)$ v telese $\mathbb{R}((D))$.

$$\frac{1}{1+D}$$

$$1 : (1+D) = 1 - D + D^2 - D^3 + D^4 - \dots$$

$$\begin{aligned}
&-1 - D\\
&\quad -D\\
&\quad +D + D^2\\
&\qquad D^2\\
&\qquad -D^2 - D^3\\
&\qquad\quad -D^3
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i D^i}_{} = \sum_{i=0}^{\infty} (-D)^i$$

$$1 : D + 1 = D^{-1} - D^{-2} + D^{-3} \dots$$

$$\begin{aligned}
&-1 - D^{-1}\\
&\quad -D^{-1}\\
&\quad +D^{-1} + D^{-2}\\
&\qquad\ D^{-2}
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} D^{-i}$$

Príklad 2

Spočítajte $\frac{\cancel{2}+D-D^2+\cancel{D^3}}{1-D^2}$ nad $\mathbb{Q}$. Akej postupnosti to odpovedá?

$$(2+D-D^2+D^3):(1-D^2)=2+D+D^2+2D^3+D^4+2D^5+\dots$$

$$-2\quad+2D^2$$

$$D+D^2+D^3$$

$$-D\quad+D^3$$

$$D^2+2D^3$$

$$-D^2\quad+D^4$$

$$+2D^3+D^4$$

$$2D^3\quad-2D^5$$

$$D^4+2D^5$$

$$2+D+\sum_{i=1}^{\infty}(1+2D)D^{2i}$$

$$(2,1,1,2,1,2,\dots)=$$

$$(2,1,\overline{1,2})$$

$$(2,1,-1,1)\text{ " }:(1,\dots)$$

Príklad 3

Spočítajte $(1,1,0,1) * (1,0,1)$ nad $\mathbb{R}$.

$$(1,1,0,1) * (1,0,1) = (1\ 1\ 1\ 2\ 0\ 1)$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

$$(1+D+D^3)*(1+D^2) = 1+D+D^3+D^2+D^3+D^5$$

$$= 1+D+D^2+2D^3+D^5$$

Príklad 4

Spočítajte $(1, 1, 0, 1) * \overline{(1, 0)}$ nad $\mathbb{R}$.

$(1, 1, 0, 1) * \overline{(1, 0)} = (1, 1, \overline{1, 2})$

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \ldots &
\end{array}$$

Príklad 2

$$\frac{2 + D - D^2 + D^3}{1 - D^2} = 2 + D + \sum_{i=1}^{\infty} (1 + 2D) D^{2i},$$

čo odpovedá postupnosti $(2, 1, \overline{1, 2})$. Táto postupnosť je nakoniec periodická.

Príklad 2

$$\boxed{\frac{2 + D - D^2 + D^3}{1 - D^2}} = 2 + D + \sum_{i=1}^{\infty} (1 + 2D) D^{2i},$$

čo odpovedá postupnosti $(2, 1, \overline{1, 2})$. Táto postupnosť je nakoniec periodická.

Otázka 1

Odpovedá každá nakoniec periodická postupnosť racionálnej funkcii?

Príklad 2

$$\frac{2 + D - D^2 + D^3}{1 - D^2} = \underbrace{2 + D + \sum_{i=1}^{\infty}(1 + 2D)D^{2i}},$$

čo odpovedá postupnosti $(2, 1, \overline{1, 2})$. Táto postupnosť je nakoniec periodická.

Otázka 1

Odpovedá každá nakoniec periodická postupnosť racionálnej funkcii?

Otázka 2

Dostaneme delením dvoch polynómov vždy Laurentov rad odpovedajúci nakoniec periodickej postupnosti?

Otázka 1

$\{u_0, u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+p}, u_{m+p+1}, \ldots, u_{m+p}, \ldots\}$

- Nech u je nakoniec periodická postupnosť nad $\mathbb{F}$ s periódou p. Potom určite existujú polynómy f a g z $\mathbb{F}[D]$ také, že $u(D) = f(D) + \sum_{i=0}^{\infty} D^{ip} g(D)$, kde $p = 1 + \deg g$.

Otázka 1

- Nech u je nakoniec periodická postupnosť nad $\mathbb{F}$ s periódou p. Potom určite existujú polynómy f a g z $\mathbb{F}[D]$ také, že $u(D) = f(D) + \sum_{i=0}^{\infty} D^{ip} g(D)$, kde $p = 1 + \deg g$.
- Potom $u(D)(1 - D^p) = f(D)(1 - D^p) + \sum_{i=0}^{\infty} D^{ip} g(D) - \sum_{i=0}^{\infty} D^{(i+1)p} g(D)$.

Otázka 1

- Nech u je nakoniec periodická postupnosť nad $\mathbb{F}$ s periódou p. Potom určite existujú polynómy f a g z $\mathbb{F}[D]$ také, že $u(D) = f(D) + \sum_{i=0}^{\infty} D^{ip} g(D)$, kde $p = 1 + \deg g$. $\sum_{j=1}^{\infty} D^{jp} g(D)$
- Potom
  ,,
  $u(D)(1 - D^p) = f(D)(1 - D^p) + \sum_{i=0}^{\infty} D^{ip} g(D) - \sum_{i=0}^{\infty} D^{(i+1)p} g(D)$.
  $j = i+1$
- Posledné dve sumy sú takmer totožné, druhá je iba posunutá o 1, preto sa vyrušia a ostane iba nultý člen prvej sumy, teda $u(D)(1 - D^p) = f(D)(1 - D^p) + \underline{g(D)}$.

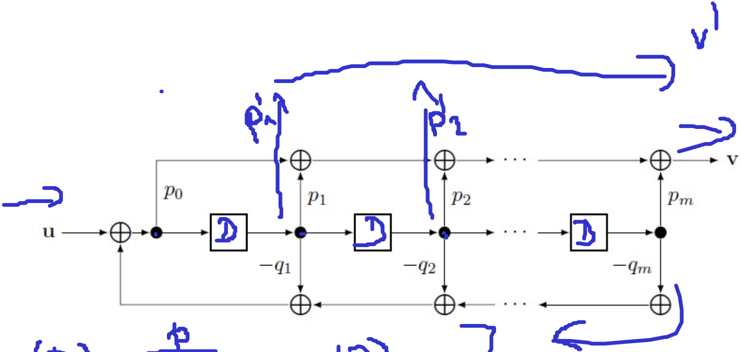
Otázka 1

- Nech u je nakoniec periodická postupnosť nad $\mathbb{F}$ s periódou p. Potom určite existujú polynómy f a g z $\mathbb{F}[D]$ také, že $u(D) = f(D) + \sum_{i=0}^{\infty} D^{ip} g(D)$, kde $p = 1 + \deg g$.
- Potom $u(D)(1 - D^p) = f(D)(1 - D^p) + \sum_{i=0}^{\infty} D^{ip} g(D) - \sum_{i=0}^{\infty} D^{(i+1)p} g(D)$.
- Posledné dve sumy sú takmer totožné, druhá je iba posunutá o 1, preto sa vyrušia a ostane iba nultý člen prvej sumy, teda $u(D)(1 - D^p) = f(D)(1 - D^p) + g(D)$.
- Z toho vyplýva, že

$$u(D) = f(D) + \frac{g(D)}{1 - D^p} = \frac{f(D) - D^p(f(D)) + g(D)}{1 - D^p}$$

a odpoveď na Otázku 1 je *áno*.

Posuvný register (LFSR)



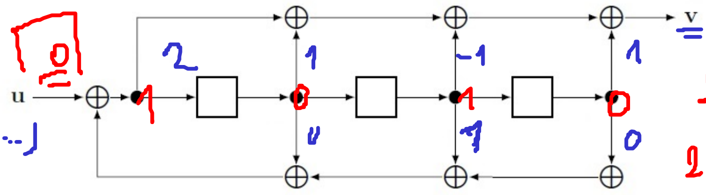
$$u(D) \cdot \frac{p}{q} = v(D)$$

$$p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i D^i$$

$$q = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} q_i D^i$$

Príklad 4

$(1, 0, \ldots) = (1)$



$= (2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \ldots)$

1.) posun

– 2.) feedback

3.) výstup

$u(D) = 1$

$p = 2 + D - D^2 + D^3$

$q = 1 - D^2$

$$1 \cdot \frac{2 + D - D^2 + D^3}{1 - D^2} = 2 + D + \sum_{i=0} (1 + 2D) D^{2i}$$

$v = (2, 1, 1, 2)$