

2. cvičení z PSt — 12. a 15.10.2020

Nezávislé jevy

1. Pokud jsou jevy A , B nezávislé, tak jsou nezávislé i jevy A , B^c . A také jevy A^c , B^c .
2. Mohou být dva jevy nezávislé a zároveň disjunktní?
3. Najděte jevy A , B , C takové, že $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, ale jevy nejsou po dvou nezávislé.

Bayesova věta

4. Petr dostává hodně emailů, ale 80 % z nich jsou spamy. Jeho spamový filtr 90 % spamů správně označí, ale také 5 % řádných emailů označí jako spam.
 - (a) Kolik procent emailů bude označeno jako spamy?
 - (b) Kolik procent řádných emailů je mezi těmi, co jsou označeny jako spamy?
 - (c) Kolik procent spamů je mezi emaily, které testem prošly?
5. Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přenesou jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenášejí nezávisle.
 - (a) Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?
 - (b) Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?
 - (c) Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?
6. Pokud vidíme bílého pudla, zvyšuje to naši důvěru, že je každá vrána černá?

Hrátky s konkrétními rozděleními

7. Nechtě $X \sim \text{Geom}(1/2)$. Jaké je rozdělení n.v. $Y = X \bmod 2$?
8. Nechtě $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Jaké je rozdělení n.v. $Y = X \bmod 2$?
9. Nechtě $X \sim \text{Geom}(p)$. Jaká je $P(X > k)$?
10. Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu $1/10$, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.
 - (a) Jaká je distribuce X ?
 - (b) Jaká je $\mathbb{E}(X)$?
 - (c) Jaká je $P(X \geq 10 \mid X \geq 5)$?

Střední hodnota

11. Nechtě $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Určete $\mathbb{E}(X)$.
12. Nechtě $X \sim \text{Geom}(p)$. Určete $\mathbb{E}(X)$.
13. Nechtě $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Určete $\mathbb{E}(X)$.
14. Nechtě X je diskrétní n.v. nabývající jen hodnot z $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ukažte, že platí

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).$$

Bonusy

15. Paní C umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je $1/8500$. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C je nevinná je $1/8500^2$, což je hodně málo.

Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nelezněte v nich dvě chyby.

K procvičení

16. Logická formule $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní obměně $\neg B \Rightarrow \neg A$. Budeme se zabývat analogiemi zahrnujícími pravděpodobnost.

(a) Ukažte, že pokud $P(B | A) = 1$, tak také $P(A^c | B^c) = 1$.

(b) Ukažte, že je však možné, aby $P(B | A) \doteq 1$, ale $P(A^c | B^c) \doteq 1$.

17. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla. Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli „dvouorlovou“ minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)

18. Na chorobu C máme dva testy, A a B . Test A má sensitivitu i specificitu $p = 0.95$. Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $P(C) = 0.01$.

(a) Spočtete pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Rozmyslete si, co to říká o užitečnosti obou testů.

(b) Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

19. Ve volbách hlasují lidé pro dva kandidáty, A a B . Při odchodu z volební místnosti jsou voliči náhodně požádáni o účast v exit-poll. Předpokládejme, že kdo odpoví, odpoví popravdě koho volil, ale ne všichni se zúčastní. Označíme-li E množinu voličů, kteří se exit-pollu zúčastní, tak předpokládejme $P(E | A) = 0.7$ a $P(E | A^c) = 0.4$. Výsledky exit-pollu jsou 60 % pro A . Jaký je skutečný podíl lidí, kteří hlasovali pro A ?

20. Máme tři normální hrací kostky a jednu kostku, kde jsou tři jedničky a tři dvojky. Vybereme uniformně náhodně jednu z kostek, hodíme a padne jednička. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali normální kostku?