Kuželosečky a kvadriky - výpisky + příklady

Postupně vznikající text k části předmětu Geometrie.

Ve výpiscích naleznete výpisky z přednášky, poznámky, řešené příklady a příklady na procvičení. Podrobnější výklad tématu naleznete ve studijním textu, na který je odkaz v Moodle. Tam je téma vyložené do detailů, v obecnější verzi než zde, tvrzení jsou uvedeny s důkazy a zdůvodněním.

Tento text je první verze, může a asi i bude obsahovat chyby. Pokud nějakou naleznete, budu ráda, pokud mne na ni upozorníte.

Poslední aktualizace 12. 1. 2016.

Kuželosečka Q v obecné poloze má rovnici

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Přejdeme k homogenním souřadnicím pomocí substituce $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ a vynásobíme rovnici x_0^2, tím dostaneme rovnici kuželosečky v homogenních souřadnicích

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_0x_1 + 2ex_0x_2 + fx_0^2 = 0.$$

Definice. Symetrickou matici

$$C = \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & b \\ e & b & c \end{pmatrix}$$

nazveme *maticí kuželosečky* Q v $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$ s rovnicí $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_0x_1 + 2ex_0x_2 + fx_0^2 = 0$.

- Platí

$$\begin{pmatrix} x_0, x_1, x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & b \\ e & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = fx_0^2 + 2dx_0x_1 + 2ex_0x_2 + ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

Definice. Kvadrika Q v $\mathbb{P}_3^{\mathbb{C}}$ jsou popsány kvadratickou rovnicí

$$a_{00}x_0^2+2a_{01}x_0x_1+2a_{02}x_0x_2+2a_{03}x_0x_3+a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2 = 0$$

a symetrickou maticí 4×4

$$C = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Definice. Kuželosečku (kvadriku) nazveme *regulární*, pokud její matice C je regulární. Kuželosečku (kvadriku) nazveme *singulární*, pokud její matice C je singulární.

- Každou symetrickou matici C lze převést na diagonální matici pomocí vhodné posloupnosti řádkových úprav, které jsou následovány analogickými sloupcovými úpravami. To odpovídá tomu, že aplikujeme na kuželosečku (kvadriku) Q zadanou maticí C vhodnou změnu projektivní soustavy souřadnic. (Výsledná vhodná soustava souřadnic je dána polární bází symetrické matice C)
- Kuželosečka (kvadrika), která má matici C' má stejnou hodnost a je stejného projektivního typu jako kuželosečka (kvadrika) odpovídající matici C.
- Například v $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$ rozlišujeme pět projektivních typů kuželoseček.

1. Regulární imaginární kuželosečka, která nemá žádný reálná bod.
2. Regulární reálná kuželosečka. Do tohoto projektivního typu patří elipsa, parabola a hyperbola, které jsou z hlediska projektivní geometrie stejné, protože existuje kolineace převádějící jednu na druhou.
3. Reálná singulární kuželosečka hodnosti 2, která je tvořena dvojicí reálných přímek.
4. Imaginární singulární kuželosečka hodnosti 2, která je tvořena dvojicí imaginárních přímek.
5. Singulární kuželosečka hodnosti 1, kterou tvoří jedna dvojnásobná přímka.

Příklad. Převeďte matici $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ na diagonální tvar pomocí řádkových úprav následovaných sloupcovými úpravami. (T.j. Najděte vyjádření matice C vůči její polární bázi.)

Řešení: Od druhého řádku odečtu trojnásobek prvního řádku. Pak od druhého sloupce odečtu trojnásobek prvního sloupce.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -9 & 18 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -9 & 18 \\ -5 & 18 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

Dále k třetímu řádku přičtu pětinásobek prvního řádku a poté k třetímu sloupci přičtu pětinásobek prvního sloupce.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -21 \end{pmatrix} \sim$$

Nakonec k třetímu řádku přičtu dvojnásobek druhého řádku a pak k třetímu sloupci přičtu dvojnásobek druhého sloupce.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Výsledná matice má na diagonále 1, -9 a 35.

- Diagonální matici z předešlého příkladu odpovídá rovnice kuželosečky $x_0^2 - 9x_1^2 + 35x_2^2 = 0$

Uděláme úmluvu: Vždy budeme chtít, aby kladných čísel na diagonále matice v diagonálním tvaru bylo více nebo stejně jako záporných. Pokud by tomu taky nebylo, vynásobíme matici -1. To odpovídá vynásobení rovnice kuželosečky -1, což můžeme beztrestně udělat.

Definice. Buď C' diagonální matice vzniklá z matice C. Označme n počet nul na diagonále matice C' dále p počet kladných čísel a q počet záporných čísel na diagonále matice C'. Pak trojici (n, p, q) nazveme *signaturou matice* C.

Hodnost matice C odpovídá součtu $p + q$. Regulární matice má $n = 0$.

Příklad. Určete signaturu matice kuželosečky $2x_0^2 + 9x_1^2 + 8x_2^2 + 8x_0x_1 - 4x_0x_2 - 10x_1x_2 = 0$

Řešení: Napíši matici kuželosečky.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Matici upravím na diagonální tvar. Od druhého řádku odečtu dvojnásobek prvního řádku a pak od druhého sloupce odečtu dvojnásobek prvního sloupce.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

Dále k třetímu řádku přičtu první řádek a pak ke třetímu sloupci přičtu první sloupec

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

Nakonec přičtu k třetímu řádku druhý řádek a pak k třetímu sloupci druhý sloupec.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Výsledná signatura je $(0, 3, 0)$.

Příklad. Určete signaturu matice kvadriky $x_0^2 + 9x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 6x_0x_1 + 2x_2x_3 = 0$

Řešení: Napíši matici kuželosečky.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Upravím na diagonální tvar tak, že odečtu od druhého řádku trojnásobek prvního a pak od druhého sloupce trojnásobek prvního sloupce. Dále třetí řádek přičtu ke čtvrtému a třetí sloupec přičtu ke čtvrtému sloupci.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Výsledná signatura by byla $(1, 1, 2)$, ale udělali jsme úmluvu, že vždy budeme chtít, aby počet záporných čísel na diagonále nebyl větší než počet kladných, proto matici vynásobíme -1.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledná signatura je tedy $(1, 2, 1)$.

Určování (afinního) typu kuželoseček a kvadrik

Připomeňme, že vynecháním jedné přímky z projektivního roviny $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$ získáme afinní rovinu. Projektivní rovina s význačnou přímkou (tzv. nevlastní přímkou) je rozšířená afinní rovina $\overline{A_2^{\mathbb{C}}}$. Podobně projektivní prostor $\mathbb{P}_3^{\mathbb{C}}$ s význačnou rovinou (tzv. nevlastní rovinou) je rozšířený afinní prostor $\overline{A_3^{\mathbb{C}}}$.

Zvolme za nevlastní přímku (rovinu) s rovnicí $x_0 = 0$. Matice kuželosečky (kvadriky) Q je pak $C = \begin{pmatrix} c_{00} & c^T \\ c & \bar{C} \end{pmatrix}$, kde $\bar{C}$ symetrická čtvercová matice, vzniklá z matice C vynecháním prvního sloupce a prvního řádku.

Definice. Signaturu matice C nazýváme *hlavní signatura* a signaturu matice $\bar{C}$ nazýváme *vedlejší signatura* kvadriky (kuželosečky).

Věta. Nechť Q je kuželosečka / kvadrika s maticí jejíž hlavní signatura je (n, p, q). Pak xistuje maximálně $(p-1)$-rozměrný reálný podprostor v $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$ / $\mathbb{P}_3^{\mathbb{C}}$, který nemá s Q žádný (reálný) průsečík.

- Tedy pokud máme například kuželosečku s hlavní signaturou $(0, 2, 1)$ tak existuje přímka, která nemá s touto kuželosečkou žádný průsečík.

Podle následujících tabulek můžeme určit typ kuželosečky (kvadriky) Q na základě hlavní a vedlejší signatury matice kuželosečky (kvadriky).

Afinní klasifikace kuželoseček v $\overline{A_2^{\mathbb{C}}}$ pomocí signatury

Signatura $(0,+,-)$ hlavní	vedlejší	Rovnice v nehomogenních souřadnicích	typ kuželosečky
$(0,3,0)$	$(0,2,0)$	$x^2+y^2=-1$	imaginární elipsa
$(0,2,1)$	$(0,2,0)$	$x^2+y^2=1$	elipsa
$(0,2,1)$	$(0,1,1)$	$x^2-y^2=1$	hyperbola
$(0,2,1)$	$(1,1,0)$	$x^2+2y=0$	parabola
$(1,2,0)$	$(0,2,0)$	$x^2+y^2=0$	imaginární různoběžky
$(1,2,0)$	$(1,1,0)$	$x^2+1=0$	imaginární rovnoběžky
$(1,1,1)$	$(0,1,1)$	$x^2-y^2=0$	reálné různoběžky
$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$x^2-1=0$	reálné rovnoběžky
$(1,1,1)$	$(2,0,0)$	nelze vyjádřit	1 vlastní a 1 nevlastní přímka
$(2,1,0)$	$(1,1,0)$	$x^2=0$	jedna dvojnásobná přímka
$(2,1,0)$	$(2,0,0)$	nelze vyjádřit	jedna dvojnásobná nevlastní přímka

- Kuželosečka jejíž matice má hodnost 3 je regulární kuželosečka.
- Kuželosečka jejíž matice má hodnost 2 je dvojce přímek.
- Kuželosečka jejíž matice má hodnost 1 je tvořena jednou přímkou.

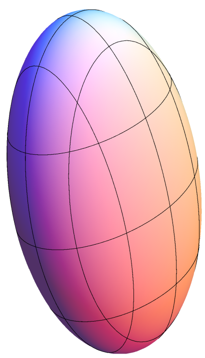
Afinní klasifikace kvadrik v $\overline{A_3^{\mathbb{C}}}$ pomocí signatury

Signatura $(0,+,-)$ hlavní	vedlejší	Rovnice v nehomogenních souřadnicích	typ kvadriky
$(0,4,0)$	$(0,3,0)$	$x^2+y^2+z^2=-1$	imaginární elipsoid
$(0,3,1)$	$(0,3,0)$	$x^2+y^2+z^2=1$	elipsoid
$(0,3,1)$	$(0,2,1)$	$x^2-y^2-z^2=1$	dvojdílný hyperboloid
$(0,3,1)$	$(1,2,0)$	$x^2+y^2+2z=0$	eliptický paraboloid
$(0,2,2)$	$(0,2,1)$	$x^2+y^2-z^2=1$	jednodílný hyperboloid
$(0,2,2)$	$(1,1,1)$	$x^2-y^2+2z=0$	hyperbolický paraboloid
$(1,3,0)$	$(0,3,0)$	$x^2+y^2+z^2=0$	imaginární kuželová plocha
$(1,3,0)$	$(1,2,0)$	$x^2+y^2+1=0$	imaginární eliptická válcová plocha
$(1,2,1)$	$(0,2,1)$	$x^2+y^2-z^2=0$	reálná kuželová plocha
$(1,2,1)$	$(1,2,0)$	$x^2+y^2-1=0$	eliptická válcová plocha
$(1,2,1)$	$(1,1,1)$	$x^2-y^2-1=0$	hyperbolická válcová plocha
$(1,2,1)$	$(2,1,0)$	$x^2+2y=0$	parabolická válcová plocha
$(2,2,0)$	$(1,2,0)$	$x^2+y^2=0$	dvojce komplexně sdružených imag. různoběžných rovin
$(2,2,0)$	$(2,1,0)$	$x^2+1=0$	dvojce komplexně sdružených imag. rovnoběžných rovin
$(2,1,1)$	$(1,1,1)$	$x^2-y^2=0$	dvojce reálných různoběžných rovin
$(2,1,1)$	$(2,1,0)$	$x^2-1=0$	dvojce reálných rovnoběžných rovin
$(2,1,1)$	$(3,0,0)$	nelze vyjádřit	jedna vlastní a jedna nevlastní rovina
$(3,1,0)$	$(2,1,0)$	$x^2=0$	dvojnásobná vlastní rovina
$(3,1,0)$	$(3,0,0)$	nelze vyjádřit	dvojnásobná nevlastní rovina

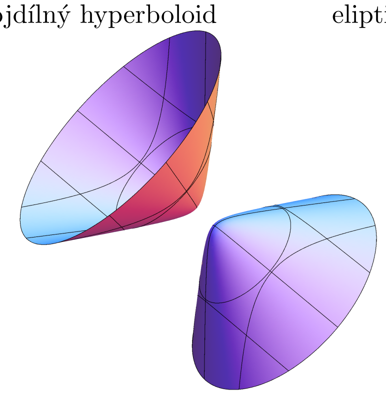
- Kvadrika jejíž matice má hodnost 4 je regulární kvadrika.
- Kvadrika jejíž matice má hodnost 3 je kuželová nebo válcová plocha.
- Kvadrika jejíž matice má hodnost 2 je tvořena dvojicí rovin.
- Kvadrika jejíž matice má hodnost 1 je tvořena jednou rovinou.

Reálné kvadriky

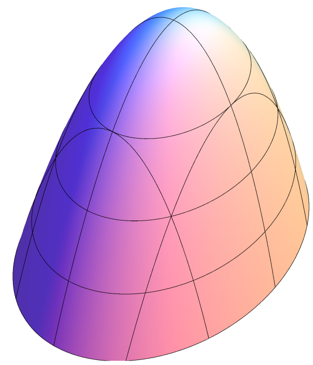
elipsoid



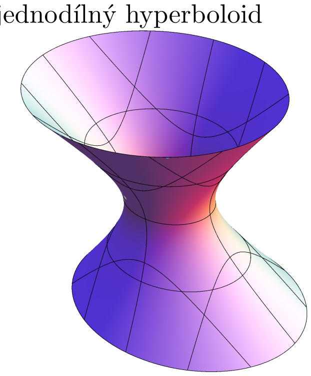
dvojdílný hyperboloid



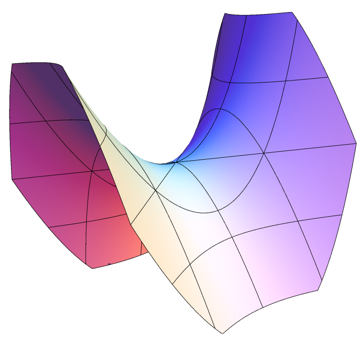
eliptický paraboloid



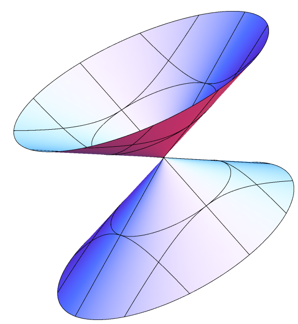
jednodílný hyperboloid



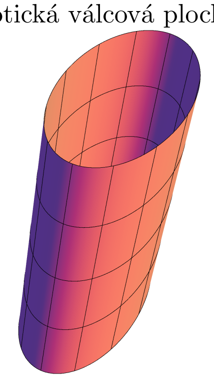
hyperbolický paraboloid



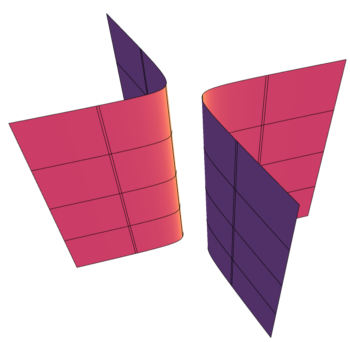
kuželová plocha



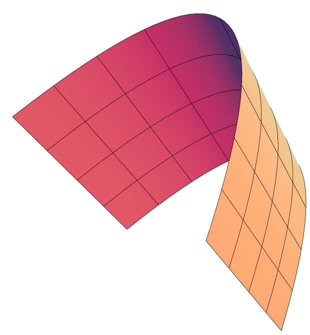
eliptická válcová plocha



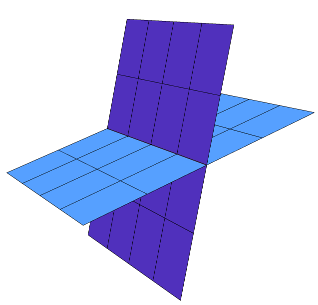
hyperbolická válcová plocha



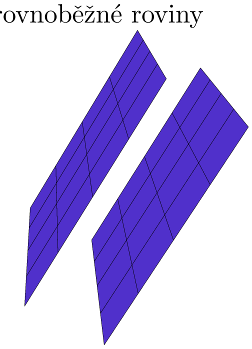
parabolická válcová plocha



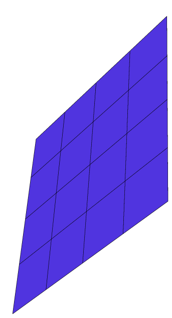
různoběžné roviny



rovnoběžné roviny



rovina



Příklad. Určete typ kuželosečky s rovnicí $4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 2y - 3 = 0$.

Řešení Napíši matici kuželosečky

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

K určení typu kuželosečky potřebuji hlavní a vedlejší signaturu matice kuželosečky. Tedy signaturu matice C a matice $\bar{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Nemusím upravovat každou matici zvlášť, stačí, když při převádění na diagonální tvar začnu odspodu a první upravím na diagonální tvar matici $\bar{C}$. Od druhého řádku odečtu dvojnásobek třetího řádku a pak od druhého sloupce odečtu dvojnásobek třetího sloupce.

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

V tuto chvíli mohu určit vedlejší signaturu, ta je $(1, 1, 0)$, t.j. signatura matice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pokračuji v úpravách matice. Od prvního řádku odečtu třetí řádek a pak od prvního sloupce odečtu třetí sloupec. Dále k druhému řádku přičtu polovinu prvního řádku a k druhému sloupci přičtu polovinu prvního sloupce.

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hlavní signatura je tedy $(0, 2, 1)$. Z tabulky zjistím, že se jedná o parabolu. Mimochodem už na začátku, z tvaru matice kuželosečky bylo vidět, že se bude jednat o regulární kuželosečku, matice byla regulární. Jediná regulární kuželosečka, která má vedlejší signaturu $(1, 1, 0)$ je parabola.

Příklad. Určete typ kuželosečky $x^2 - 3y^2 - 8xy - 4x + 16y + 4 = 0$

Řešení Matice kuželosečky je

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Matici upravím na diagonální tvar. Ke třetímu řádku přičtu čtyřnásobek druhého a pak obdobně se sloupci. Následně přičtu k prvnímu řádku dvojnásobek druhého a to stejné pro sloupce.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix}$$

Hlavní signatura je $(1, 1, 1)$ vedlejší signatura je $(0, 1, 1)$, jak vidíme z matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -19 \end{pmatrix}$. Jedná se o dvě reálné různoběžky.

Příklad. Určete typ kuželoseček

1. $x^2 + 3xy - 2x + 4y - 4 = 0$
2. $9x^2 + 6y^2 - 6xy - 30x + 1 = 0$
3. $4x^2 + y^2 + 4xy + 16x + 8y - 3 = 0$
4. $4x^2 + y^2 - 4xy - 5x - 4 = 0$
5. $x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 4y + 1 = 0$

Řešení 1. hyperbola, 2. elipsa, 3. dvojce reálných rovnoběžek, 4. parabola, 5. jedna reálná přímka (dvojnásobná)

Příklad. Určete typ kvadriky s rovnicí $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xz + 6yz + 4x + 6y - 4z + 6 = 0$.

Řešení Matice kvadriky je

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Upravím ji na diagonální tvar. Od třetího řádku odečtu trojnásobek čtvrtého řádku a pak obdobně pro sloupce. Poté k druhému řádku přičtu dvojnásobek čtvrtého řádku a obdobně pro sloupce.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 9 & 6 & -6 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 & -2 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 9 & 6 & -6 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 9 & 6 & -6 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 9 & 6 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Dále přičtu třetí řádek k druhému a obdobně pro sloupce. V tomto kroku vidím, že vedlejší signatura je $(0, 2, 1)$. Dále přičtu dvojnásobek čtvrtého řádku k prvnímu řádku a obdobně pro sloupce.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 & -2 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 5 & 9 & -2 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Následně přičtu $\frac{3}{2}$ násobek třetího řádku k prvnímu řádku a to samé pro sloupce. Pokračuji odečtením $\frac{5}{4}$ násobku druhého řádku od prvního řádku a obdobné úpravy pro sloupce.

$$\begin{pmatrix} 15{,}5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15{,}5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hlavní signatura je $(0, 3, 1)$, proto se jedná o dvoudílný hyperboloid.

Příklad. Určete typ kvadriky s rovnicí $1 + 9x^2 - y^2 - 3z^2 + 6x + 2yz = 0$.

Řešení Matice kvadriky je

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Upravím ji na diagonální tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vedlejší signatura je $(0, 2, 1)$. Vedlejší signaturu jsme určili z první matice s tím, že počet záporných čísel na diagonále má být podle úmluvy pro určení signatury menší nebo roven počtu kladných čísel, t.j. signatura není $(0, 2, 1)$ ale je $(0, 1, 2)$, (představím si matici vynásobenou -1). Hlavní signatura je $(1, 2, 1)$, (opět z důvodu úmluvy není signatura $(1, 1, 2)$). Zadaná kvadrika je kuželová plocha.

Příklad. Určete typ kvadrik

1. $x^2 + y^2 - 2xz - 4yz - 2x - 7 = 0$
2. $-x^2 - 4y^2 - z^2 - 4xy + 2xz + 4yz + 4x + 8y - 4z + 3 = 0$
3. $x^2 + y^2 + z^2 + 6xy - 2xz - 4yz + 4z + 1 = 0$
4. $9x^2 + y^2 - 7z^2 + 6xy + 6x + 2y + 4 = 0$
5. $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4x + 2z = 0$

Řešení 1. jednodílný hyperboloid, 2. dvě rovnoběžné roviny, 3. hyperbolický paraboloid, 4. hyperbolická válcová plocha, 5. eliptický paraboloid

Polární vlastnosti kvadrik (kuželoseček)

Definice. Body $A = \langle \overrightarrow{a} \rangle$ a $B = \langle \overrightarrow{b} \rangle$ v $\mathbb{P}_3^{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$) jsou *polárně sdružené* vzhledem ke kvadrice (kuželosečce) Q s maticí C, jestliže platí $\overrightarrow{a}^T C \overrightarrow{b} = 0$.

Věta. Je-li bod A polárně sdružený vůči kvadrice (kuželosečce) se dvěma různými body B, C je polárně sdružen s každým bodem přímky BC.

Definice. Bod Y nazveme *singulární bod* kvadriky (kuželosečky) Q, je-li polárně sdružen se všemi body prostoru $\mathbb{P}_3^{\mathbb{C}}$ (roviny $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$). Body kvadriky (kuželosečky), které nejsou singulární, nazveme *regulární* body kvadriky (kuželosečky).

- Je-li Y singulární bod kvadriky (kuželosečky) Q, pak $Y \in Q$.
- Singulární bod $Y = \langle \overrightarrow{y} \rangle$ kvadriky (kuželosečky) s maticí C splňují $\overrightarrow{x}^T C \overrightarrow{y} = 0$ pro všechny body $X = \langle \overrightarrow{x} \rangle$ z $\mathbb{P}_3^{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$. Z toho dostaneme, že vektor $\overrightarrow{y}$ musí splňovat homogenní soustavu $C\overrightarrow{y} = 0$.

Věta. Buď P singulární bod kvadriky (kuželosečky) Q. Dále nechť bod $R \in Q$. Pak přímka PR je součástí Q.

Příklad. Nejděte singulární body kvadriky $x_0^2 + x_2^2 + 8x_0x_1 - 2x_0x_2 + 4x_0x_3 - 8x_1x_2 - 4x_2x_3 = 0$
Řešení Kvadrika má matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešíme homogenní rovnici s touto maticí. Po zjednodušení dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení homogenní soustavy s touto maticí je podprostor generovaný vektory $(t, 0, t, 0)$ a $(0, s, 0, -2s)$, $s, t \in \mathbb{R}$. Proto singulární body kvadriky jsou body přímky určené dvěma body s homogenními souřadnicemi $(1, 0, 1, 0)$ a $(0, 1, 0, -2)$.

Příklad. Nejděte singulární body kuželosečky $x_0^2 + 6x_0x_1 + 2x_1^2 - 4x_0x_2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$
Řešení Kuželosečka má matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Řešíme homogenní rovnici s touto maticí.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tato homogenní soustava má násobky vektoru $(1, -1, -1)$. Singulární bod kvadriky je tedy bod s homogenními souřadnicemi $(1, -1, -1)$.

Definice. Nechť bod P není singulárním bodem kvadriky (kuželosečky) Q. Rovinu (přímku) polárně sdruženou s bodem P nazveme *polární rovina* (*polára*) vzhledem ke kvadrice (kuželosečce) Q. Bod P nazveme *pól*.

- Nechť bod P má vektor homogenních souřadnic $\overrightarrow{p}$ potom polární rovina (polára) má obecnou rovnici $\overrightarrow{p}^T C \overrightarrow{x} = 0$, kde $\overrightarrow{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ v $\mathbb{P}_3^{\mathbb{C}}$ (nebo v projektivní rovině $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$ je $\overrightarrow{x} = (x_0, x_1, x_2)$).

Příklad. Určete poláru bodu P s homogenními souřadnicemi $(1, -2, 1)$ vůči kuželosečce s maticí

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \\ -2 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Řešení Dosadíme do vzorce z minulého odstavce $\overrightarrow{p}^T C \overrightarrow{x} = 0$

$$(1, -2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \\ -2 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -7x_0 + 12x_1 - 21x_2 = 0$$

Polára bodu P je dána rovnicí $-7x_0 + 12x_1 - 21x_2 = 0$.

Věta. (Vzájemnost pólu a polární roviny (poláry)) Nechť Q je kvadrika a P, R jsou dva nesingulární body. Leží-li bod R v polární rovině (na poláře) bodu P, potom bod P leží v polární rovině (na poláře) bodu R.

Definice. Nechť Q je kvadrika (kuželosečka) a T je její regulární bod. Polární rovinu (poláru) bodu T vzhledem ke kvadrice (kuželosečce) Q nazveme *tečnou rovinou* (*tečnou*) kvadriky (kuželosečky) Q s bodem dotyku T.

Věta. Tečné roviny (tečny) vedené ke kvadrice (kuželosečce) z bodu $P \notin Q$ se dotýkají kvadriky (kuželosečky) v bodech, v nichž kvadriku (kuželosečku) Q protíná polární rovina (polára) bodu P vzhledem ke kvadrice Q.

Příklad. Napište rovnici tečny kuželosečky $8 - x^2 - 4y + 2xy - 5y^2 = 0$ v jejím bodě $[1, 1]$.

Řešení Tečna procházející bodem $[1, 1]$, který leží na kuželosečce je polára tohoto bodu vůči kuželosečce. Homogenní souřadnice bodu $[1, 1]$ jsou $(1, 1, 1)$ a matice kuželosečky je

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Dosadím do vzorce pro výpočet poláry

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6x_0 - 6x_2 = 0$$

Rovnici z homogenních souřadnic převedu do současnic x, y a získám rovnici tečny je $1 - y = 0$

Příklad. Napište rovnici tečen kuželosečky $-x^2 - 4y + 2xy - 5y^2 = 0$ (včetně bodů dotyku) procházejících bodem $[-2, 0]$.

Řešení Tečny procházející bodem $[-2, 0]$, se dotýkají kuželosečky v průsečících poláry tohoto bodu vůči kuželosečce. Homogenní souřadnice bodu $[-2, 0]$ jsou $(1, -2, 0)$ a matice kuželosečky je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Dosadím do vzorce pro výpočet poláry

$$(1, -2, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1 - 4x_2 = 0$$

Polára má tedy rovnici $x - 2y = 0$ Body dotyku jsou průsečíky poláry a kuželosečky, proto do rovnice kuželosečky dosadím rovnici $x = 2y$ vyjádřené z rovnice poláry.

$$\begin{aligned} -(2y)^2 - 4y + 4y^2 - 5y^2 =& 0 \\ -5y^2 - 4y =& 0 \end{aligned}$$

Kořeny rovnice jsou $y = 0$ a $y = -\frac{4}{5}$. Body dotyku pak jsou $[0, 0]$ a $[-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}]$. Homogenní souřadnice bodů dotyku jsou $(1, 0, 0)$ a $(1, -\frac{8}{5}, -\frac{4}{5})$, druhému bodu odpovídají homogenní souřadnice $(5, -8, -4)$. Najdeme poláry těchto bodů, které jsou požadované tečny kuželosečky.

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2x_2 = 0$$

$$(5, -8, -4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 8x_0 + 4x_1 + 2x_2 = 0$$

Tečny mají rovnice $y = 0$ a $2x + y + 4 = 0$.

Příklad. Určete tečny kuželosečky $5 + 2x - 4y + 6xy + y^2 = 0$ procházející bodem $[-2, -3]$.

Řešení Body dotyku tečen jsou $[-\frac{1}{4}, 1]$, $[\frac{5}{2}, -1]$, tečny pak jsou $11 + 16x - 7y = 0$, $19 - 4x + 9y = 0$.

Afinní vlastnosti kvadrik a kuželoseček - střed, průměry a asymptotické směry

Definice. Bod S nazveme *středem* kvadriky (kuželosečky) Q, je-li vzhledem ke Q polárně sdružen s každým nevlastním bodem.

Každý singulární bod kvadriky (kuželosečky) je jejím středem.

Bod S s homogenními souřadnicemi (s_0, s_1, s_2, s_3) je středem kvadriky Q s maticí $C = \begin{pmatrix} c_{00} & c^T \\ c & \bar{C} \end{pmatrix}$ pokud je splněna rovnost

$$cs_0 + \bar{C}(s_1, s_2, s_3)^T = (0, 0, 0)^T$$

Příklad. Určete střed kuželosečky Q dané rovnicí $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.

Řešení Kuželosečka má matici $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Homogenní souřadnice středu (s_0, s_1, s_2) musejí splňovat soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -2s_0 + s_1 - s_2 &= 0 \\ -3s_0 - s_1 + 2s_2 &= 0 \end{aligned}$$

Jedna možnost řešení je vyřešit přímo tuto soustavu. Pokud si ale uvědomíme následující vztah, dostaneme druhou možnost jak najít součadnice středu. Přepíšeme si soustavu rovnic jako skalární součin.

$$(-2, 1, -1) \cdot (s_0, s_1, s_2) = 0$$
$$(-3, -1, 2) \cdot (s_0, s_1, s_2) = 0$$

tedy vektor homogenních součadnic (s_0, s_1, s_2) musí být kolmý na vektory $(-2, 1, -1)$ a $(-3, -1, 2)$. Využijeme vektorový součin a dostaneme, $(s_0, s_1, s_2) = (-2, 1, -1) \times (-3, -1, 2)$ a tedy $(s_0, s_1, s_2) = (1, 7, 5)$. Střed má homogenní souřadnice $(1, 7, 5)$, proto je střed kuželosečky v bodě $[7, 5]$.

Definice. Kvadrika (kuželosečka), která má alespoň jeden vlastní střed se nazývá *středová*. V opačném případně mluvíme o *nestředové* kvadrice (kuželosečce).

- Je-li Q středová kvadrika (kuželosečka), potom je středově souměrná podle každého svého vlastního středu.

Věta. Kvadrika Q je středová právě tehdy, když pro hodnosti platí: $hod\bar{C} = hod(c, \bar{C})$. Speciálně kvadrika má právě vlastní jeden střed právě tehdy, když $det(\bar{C}) \neq 0$.

Definice. Nechť U_∞ je nevlastní bod, který není bodem kvadriky (kuželosečky) Q v $\subset \overline{A_3^{\mathbb{C}}}$ $(\overline{A_2^{\mathbb{C}}})$. Polární rovinu (přímku) bodu U_∞ nazveme *průměrová rovina* (*průměr*) kvadriky (kuželosečky) Q.

- Dva průměry průměry kuželosečky Q v $\overline{A_2^{\mathbb{C}}}$, z nichž každý je sdružen se směrem druhého nazýváme sdružené průměry kuželosečky Q.
- Průměrová rovina (průměr) obsahuje vždy střed kvadriky (kuželosečky).

Definice. Nevlastní bod (tj. směr) kvadriky (kuželosečky) Q v $\subset \overline{A_3^{\mathbb{C}}}$ $(\overline{A_2^{\mathbb{C}}})$ se nazývá *asymptotický směr* kvadriky (kuželosečky).

Vlastní tečná rovina (tečna) s nevlastním bodem dotyku je *asymptotická rovina* (*asymptota*) kvadriky (kuželosečky).

- Asymptotická rovina (asymptota) obsahuje vždy střed/středy kvadriky (kuželosečky).

Příklad. Určete asymptotické směry kuželosečky $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.

Řešení Přepíši kuželosečky rovnici do homogenních souřadnic $2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 6x_2 - 3x_0^2 = 0$. Hledám nevlastní body kuželosečky, tedy hledám průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou $x_0 = 0$. Proto do rovnice kuželosečky dosadím $x_0 = 0$, tím získám rovnici

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

Hledám takové x_1 a x_2, aby splňovali tuto rovnici. Homogenní souřadnice x_1 a x_2 jsou určené až na násobek, x_1 je buď 0, pak dostanu rovnici $x_2^2 = 0$ a jediné řešení $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, nevyjadřuje homogenní souřadnice žádného bodu. Nebo je x_0 nějaké nenulové číslo, zvolím $x_0 = 1$, pak dostanu rovnici

$$1 - 4x_2 + x_2^2 = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení $x_2 = 2 \pm \sqrt{2}$, dostávám tedy dva nevlastní body kuželosečky s homogenními součadnicemi $(0, 1, 2 + \sqrt{2})$ a $(0, 1, 2 - \sqrt{2})$. Asymptotické směry kuželosečky jsou tedy $(1, 2 + \sqrt{2})$ a $(1, 2 - \sqrt{2})$.

Metrické vlastnosti kuželoseček

Pokud mluvíme o metrických vlastnostech pohybujeme se v $\overline{\mathbb{E}_2^{\mathbb{C}}}$. Budeme uvažovat pouze kuželosečky s maticí $C = \begin{pmatrix} c_{00} & c^T \\ c & \bar{C} \end{pmatrix}$, kde matice $\bar{C}$ je nenulová.

Definice. Směr určený nenulovým reálným vektorem $\overrightarrow{u}$ se nazývá *hlavní směr* kuželosečky Q, je-li vzhledem ke Q polárně sdružen s kolmým směrem.

Věta. Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé hlavní směry. Má-li kuželosečka matici $C = \begin{pmatrix} c_{00} & c^T \\ c & \bar{C} \end{pmatrix}$ jsou hlavní směry kuželosečky vlastní vektory matice $\bar{C}$.

- Pokud má matice $\bar{C}$ dvojnásobné vlastní číslo, má matice nekonečně mnoho vlastních vektorů. Vybereme dva na sebe kolmé vlastní vektory.
- Pokud má matice $\bar{C}$ vlastní číslo 0 je $det(\bar{C}) = 0$ a jde o kuželosečku s nevlastním středem.

Definice. Je-li U_∞ nevlastní nesingulární bod určený hlavním směrem kuželosečky Q, pak poláru bodu U_∞, pokud je to vlastní přímka, nazýváme *osou* kuželosečky. Vlastní průsečík kuželosečky s její osou je *vrchol* kuželosečky. (Je-li nevlastní bod hlavního směru kuželosečky nevlastním singulárním bodem kuželosečky, pak definujeme jako osu kuželosečky libovolnou vlastní přímku, kolmou na tento směr)

- Kuželosečka je osově souměrná podle každé své osy.
- Elisa má 4 vrcholy, hyperbola má dva reálné vrcholy a parabola má jeden reálný vrchol.
- Pokud dostaneme vlastní číslo 0 bude osa, která odpovídá vlastnímu vektoru s vlastním číslem 0 = hlavnímu směru, nevlastní přímka. Tuto nevlastní přímku nepovažujeme za osu kuželosečky.
- Elipsa a hyperbola mají dvě navzájem kolmé osy, parabola má jen jednu osu.

Příklad. Určete hlavní směry kuželosečky $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 32 = 0$

Řešení Matice kuželosečky je $\begin{pmatrix} -32 & 8 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ tedy máme $\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Hledáme vlastní čísla matice $\bar{C}$, to znamená, že hledáme řešení rovnice

$$det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Tato rovnice má řešení -1 a 4. Počítáme vlastní vektory odpovídající těmto vlastním číslům

$$\begin{pmatrix} 0 - (-1) & 2 \\ 2 & 3 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 - 4 & 2 \\ 2 & 3 - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme pro vlastní číslo -1 vlastní vektor $(-2, 1)$ a pro vlastní číslo 4 vlastní vektor $(1, 2)$. Hlavní směry kuželosečky jsou vlastními vektory matice $\bar{C}$, proto hlavní směry jsou $(-2, 1)$ a $(1, 2)$. Všimněme si, že hlavní směry kuželosečky jsou na sebe opravdu kolmé.

Příklad. Určete osy a vrcholy kuželosečky z minulého příkladu.

Řešení Osy kuželosečky jsou polárami nevlastních bodů hlavních směrů. Hlavní směr $(-2, 1)$ má nevlastní bod $(0, -2, 1)$, jeho poláru vypočítáme vynásobením matice kuželosečky

$$(0, -2, 1) \begin{pmatrix} -32 & 8 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -10x_0 + 2x_1 - x_2$$

Proto obecná rovnice osy o_1 je $2x - y - 10 = 0$. Hlavní směr $(1, 2)$ má nevlastní bod $(0, 1, 2)$ a jeho polára je

$$(0, 1, 2) \begin{pmatrix} -32 & 8 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 20x_0 + 4x_1 + 8x_2$$

Dostáváme tedy obecnou rovnici osy o_2 $x + 2y + 5 = 0$.

Vrcholy kuželosečky jsou průsečíky os s kuželosečkou, řešíme tedy soustavu dvou rovnic - rovnice osy a rovnice kuželosečky. Nejdříve pro osu o_1. Vyjádříme si z obecné rovnice osy $y = 2x - 10$ a toto dosadíme do rovnice kuželosečky a upravíme.

$$\begin{aligned} &4x(2x-10) + 3(2x-10)^2 + 16x + 12(2x-10) - 32 = 0 \\ &5x^2 - 30x + 36 = 0 \end{aligned}$$

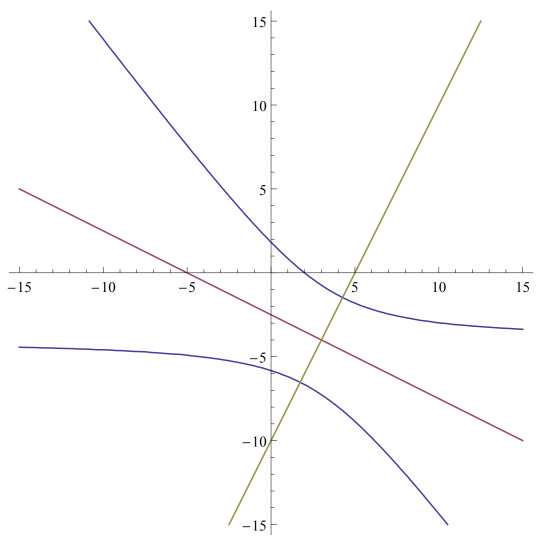
Tato kvadratická rovnice má dva kořeny $x = 3 \pm \frac{2\sqrt{10}}{5}$. Dopočítáme k nim hodnoty y a dostaneme dva reálné vrcholy $A = [3 + \frac{2\sqrt{10}}{5}, -4 + \frac{4\sqrt{10}}{5}]$ a $A = [3 - \frac{2\sqrt{10}}{5}, -4 - \frac{4\sqrt{10}}{5}]$.

Dále hledáme průsečíky osy o_2 s kuželosečkou. Z obecné rovnice osy vyjádříme $x = -2y - 5$ a dosadíme do rovnice kuželosečky. Rovnici upravíme.

$$\begin{aligned} &4(-2y-5)y + 3y^2 + 16(-2y-5) + 12y - 32 = 0 \\ &-5y^2 - 40y - 112 = 0 \end{aligned}$$

Tato rovnice má pouze komplexní kořeny $y = -4 \pm i\frac{4\sqrt{10}}{5}$. Dostaneme dva imaginární komplexně sdružené vrcholy.

Celkově jsme tedy dostaly pouze dva reálné průsečíky A a B, které jsou vrcholy kuželosečky. Z toho můžeme usuzovat, že se jedná o hyperbolu, která má dva vrcholy. A opravdu jedná se o hyperbolu a na následujícím obrázku je znázorněna hyperbola a její dvě osy, z nichž má pouze jedna průsečíky s hyperbolou.



Příklad. Určete střed, osy a vrcholy kuželosečky $-4 + 2x + x^2 + 12y + 12xy - 8y^2 = 0$. O jakou kuželosečku se na základě vypočteného středu, os a vrcholů jedná?

Řešení 1. Střed má souřadnice $[-1, 0]$, osy jsou $2 + 2x + 1y = 0$, $1 + 1x - 2y = 0$, dva reálné vrcholy $[-2, -\frac{1}{2}], [0, \frac{1}{2}]$ odpovídající první ose, druhá osa nemá reálné průsečíky s kuželosečkou. Kuželosečka má 2 vrcholy, jedná se tedy o hyperbolu.