GEOMETRIE

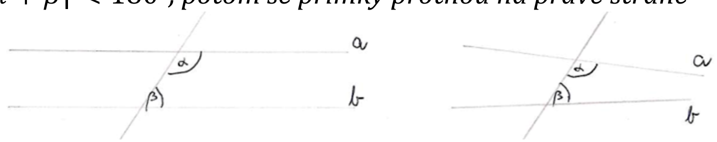
OBSAH

GEOMETRIE

AXIOMATICKÁ VÝSTAVBA GEOMETRIE

EUKLEIDOVY POSTULÁTY

- Postuláty,na základě kterých axiomaticky vystavěl geometrii ve svých Základech
  1. **Postulát:** Budiž úkolem od kteréhokoliv bodu ke kterémukoliv vésti přímku. (Dvěma body lze vést přímku.)
  2. **Postulát:** A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti. (Přímku lze neomezeně prodlužovat.)
     - Pod pojmem přímka se původně rozuměl geometrický útvar, který v současné době nazýváme úsečka.
  3. **Postulát:** A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh. (Ze zadaného středu lze opsat kružnici se zadaným poloměrem.)
  4. **Postulát:** A že všechny pravé úhly sobě rovny jsou. (Všechny pravé úhly jsou stejné.)
  5. **Postulát:** A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.
     $|\alpha + \beta| < 180°$, *potom se přímky protnou na pravé straně*



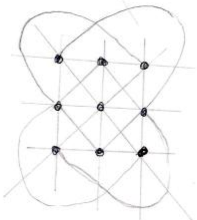
D. HILBERT

- Základy geometrie
- Základní objekty jsou **bod** a **přímka**

1. AXIOMY INCIDENCE

- **I 1** Dvěma různými body prochází právě jedna přímka.
- **I 2** Na každé přímce jsou alespoň 2 body.
- **I 3** Existují 3 body které neleží na téže přímce.

- 3 body + 3 přímky
-> splňuje incidenci $(I_1 + I_2 + I_3)$



- 9 bodů + 12 přímek

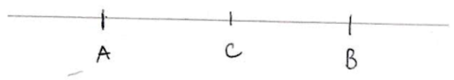
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ - mřížkový papír
- body -> mřížové body
- přímky -> spojnice mřížových bodů

- **Věta:** *Dvě různé přímky mohou mít společný nejvýše jeden bod.*

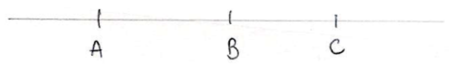
- **Důkaz:** Předpokládejme, že dvě různé přímky p a q mají společné alespoň 2 body → **I 1** $\rightarrow spor\ (p = q)$ ■

2. AXIOMY USPOŘÁDÁNÍ

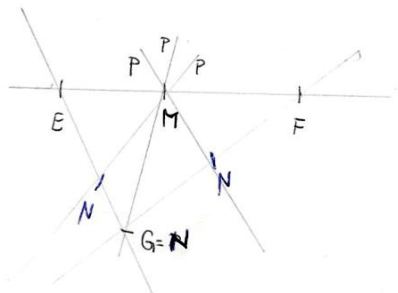
- **U 1** Jestli bod C leží mezi body A a B, pak A, B, C jsou 3 navzájem různé body přímky a platí, že bod C leží mezi body B a A.



- **U 2** Ze tří různých bodů přímky právě jeden leží mezi ostatními.
- **U 3** Jsou-li body $A \neq B$, pak vždy existuje alespoň jeden bod C takový, že bod B leží mezi A a C.

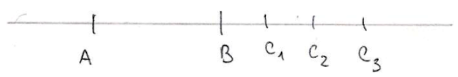


- **U 4 (Paschův)** Jsou-li E, F, G nekolineární body a p je přímka, na které leží bod M, který leží mezi E a F, pak existuje bod N, který leží na přímce p a platí:
  - buď $N = G$
  - nebo N leží mezi E a G
  - nebo N leží mezi F a G.



- S axiomy uspořádání a incidence lze definovat:
  - Polopřímku
  - Úsečku
  - Polorovinu
  - Úhel
  - Trojúhelník
- **Věta:** *Na každé přímce leží nekonečně mnoho navzájem různých bodů.*

- **Důkaz:** Plyne z **U 3**.



3. AXIOMY SHODNOSTI

- Shodnost je **ekvivalence** (reflexivní, symetrická a tranzitivní)
- **S 1** Pro každou úsečku AB platí $AB \cong BA$ (shodnost).
  - **Reflexivní**

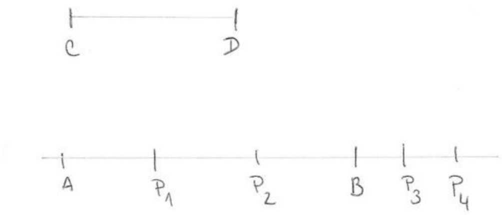
  Pro každé dvě úsečky AB a CD platí: je-li $AB \cong CD$, pak je $CD \cong AB$.
  - **Symetrická**

  Pro každé tři úsečky AB, CD a EF platí: je-li $AB \cong CD$ a $CD \cong EF$, pak je $AB \cong EF$.
  - **Tranzitivní**

- **S 2** Nechť je AB úsečka a CD polopřímka. Potom na CD leží právě jeden bod E takový, že $AB \cong CE$.
- **S 3** Nechť bod C leží mezi A a B a C' leží mezi A' a B', přičemž $AC \cong A'C'$ a $CB \cong C'B'$, potom $AB \cong A'B'$.
- **S 4** Shodnost úhlů je reflexivní, symetrická a tranzitivní (viz **S 1**).
- **S 5** Pro každý úhel $\sphericalangle AVB$ a každou polorovinu $A'V'M$ existuje jediná polopřímka $V'B'$ taková, že $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle A'V'B'$.
- **S 6** Buď $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ dva trojúhelníky. Jestliže $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ a $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$, potom platí $BC \cong B'C'$, $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ a $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B'$ (věta SuS).
- S axiomy shodnosti, uspořádání a incidence lze definovat:
  - Osu úsečky
  - Osu úhlu
  - Pravý úhel
  - Porovnat délku úseček
- **Definice:** Délka úsečky $|AB|$ úsečky AB s vlastnostmi:
  - $|AB| > 0$,
  - $AB \cong CD$,pak $|AB| = |CD|$,
  - C leží mezi A a B, pak $|AC| + |CB| = |AB|$,
  - existuje úsečka délky 1.

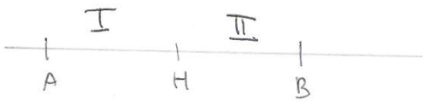
4. AXIOMY ÚPLNOSTI (SPOJITOSTI)

- **A (Archimedův axiom)** Je dána polopřímka AB a úsečka CD. Na polopřímce je možné volit body $P_0 = A, P_1, P_2, \ldots$ tak, že každá úsečka $P_jP_{j+1} \cong CD$ a $P_{j+1} \neq P_{j-1}$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že B leží mezi A a P_n.



- **C (Cantorův axiom)** Nechť máme $\{A_nB_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost úseček,které leží na přímce takové, že $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \cdots \supset A_jB_j \supset A_{j+1}B_{j+1} \supset \cdots$, pak je průnik těchto úseček neprázdný $\bigcap_{j=0}^{\infty} A_jB_j \neq 0$
- **D (Dedekindův axiom)** Body úsečky AB rozdělíme do dvou tříd I a II s vlastnostmi.
  - každý bod úsečky AB patří do právě jedné třídy,
  - bod $A \in I$, bod $B \in II$,
  - je-li $X \in I$, pak je i každý bod ležící mezi A a X v třídě I,
  - je-li $Y \in II$, pak je i každý bod ležící mezi B a Y v třídě II.

  Potom existuje tzv. hraniční bod H, který patří buď do třídy I nebo do II a má následující vlastnosti:
  - je-li $H \neq A$, pak každý bod X mezi A a H patří do třídy I,
  - je-li $H \neq B$, pak každý bod Y mezi B a H patří do třídy II.



- Geometrie s axiomy I, U, S, A, C a I, U, S, D jsou ekvivalentní a nazývají se **absolutní geometrie**.

VEKTOROVÝ PROSTOR

- **Definice:** Je dáno těleso $T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Množinu V nazveme **vektorový prostor** nad tělesem T, jestliže jsou definované operace sčítání $(+)$ prvků z V a násobení $(\cdot)$ prvků z V prvkem z T tak, že $\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ a $\forall a, b, c \in T$ platí:
    - $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
    - $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$,
    - $\exists \vec{o}; \vec{o} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$,
    - $\exists - \vec{u}; \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{o}$,
    - $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u}$,
    - $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$,
    - $\exists \vec{o}; 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$,
    - $a \cdot \vec{u} \in V$.
- $\mathbb{R}^n$ je aritmetický vektorový prostor.

VEKTOROVÝ PODPROSTOR, LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ

- **Definice:** Neprázdnou množinu $W \subset V$ nazveme **vektorovým podprostorem** prostoru V, jestliže
    - $\forall\ u, v \in W; u + v \in W$,
    - $\forall\ a \in \mathbb{R}, \forall\ u \in W; au \in W$.
- Vlastnosti
    - $u_1, u_2, \dots, u_k \in W; \sum_{j=1}^{k} a_i u_i \in W$,
    - $o \in W$,
    - Každý podprostor je vektorový prostor.

- **Definice:** Konečná množina vektorů $S = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\}$ z vektorového prostoru V se nazývá **lineárně nezávislá**, jestliže rovnice
$$\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v_i} = 0$$
má jediné řešení $a_1 = \cdots = a_k = 0$. V opačném případě se nazývá **lineárně závislá**.

- **Definice:** Vektor $\vec{v}$ vektorového prostoru V je **lineární kombinací** vektorů $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k} \in V$, jestliže existují skaláry $a_1, \dots, a_k$ tak, že $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v_i}$.

- **Báze** je množina lineárně nezávislých vektorů, které generují celý vektorový prostor.

- **Příklad 1:** Je dán $\mathbb{R}^3$ určete, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou lineárně závislé (LZ) či lineárně nezávislé (LNZ).
$\vec{u} = (2, 1, 3); \vec{v} = (2, 2, 1); \vec{w} = (2, -1, 7)$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to vektory\ jsou\ LZ.$$

- **Příklad 2:** Je dán $\mathbb{R}^3$ určete a vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Určete pro jaká a jsou tyto vektory lineárně závislé (LZ).
$\vec{u} = (1, 1, 1); \vec{v} = (1, a, 1); \vec{w} = (2, 2, a)$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 - a & 0 \\ 0 & 0 & 2 - a \end{pmatrix} \to vektory\ jsou\ LZ\ pro\ a = \{1;\ 2\}.$$

- **Příklad 3:** Pro které $m \in \mathbb{R}$ je $\vec{u} = (m, 1, -15, 0)$ lineární kombinací vektorů $(2, -4, 6, 1)$, $(1, 4, 3, -2)$ a $(3, 1, 9, -1)$.

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 \cdot 2 & + & a_2 \cdot 1 & + & a_3 \cdot 3 & = & m \\ a_1 \cdot (-4) & + & a_2 \cdot 4 & + & a_3 \cdot 1 & = & 1 \\ a_1 \cdot 6 & + & a_2 \cdot 3 & + & a_3 \cdot 9 & = & -15 \\ a_1 \cdot 1 & + & a_2 \cdot (-2) & + & a_3 \cdot (-1) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & \vdots & m \\ -4 & 4 & 1 & \vdots & 1 \\ 6 & 3 & 9 & \vdots & -15 \\ 1 & -2 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & \vdots & 0 \\ -4 & 4 & 1 & \vdots & 1 \\ 6 & 3 & 9 & \vdots & -15 \\ 2 & 1 & 3 & \vdots & m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -3 & \vdots & 1 \\ 0 & 15 & 15 & \vdots & -15 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & m \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & m+5 \end{pmatrix} \to m = -5.$$

AFINNÍ PROSTOR

- **Definice:** Je dána neprázdná množina A, n-rozměrný vektorový prostor $V_n(T)$ (v našem případě $T = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) a zobrazení $f: A \times A \to V_n$ tak, že platí:
  - $\forall\, X, Y, Z \in A; f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$
    - lineární
  - $\exists\, P \in A; pro\ \forall\, X \in A$ je zobrazení $f_P: A \to V_n$ definované $f_P(X) = f(X, P)$ je vzájemně jednoznačné (dvěma bodům přiřadíme vektor)
    - P je bod, který odpovídá nulovému vektoru ve vektorovém prostoru

  Potom trojice $A_n = (A, V_n, f)$ je nazývána **afinní prostor** (n - rozměrný).

  A … nositel afinního prostoru,
  V_n … zaměření afinního prostoru,
  f … zobrazení.
  Prvky z A nazýváme body.

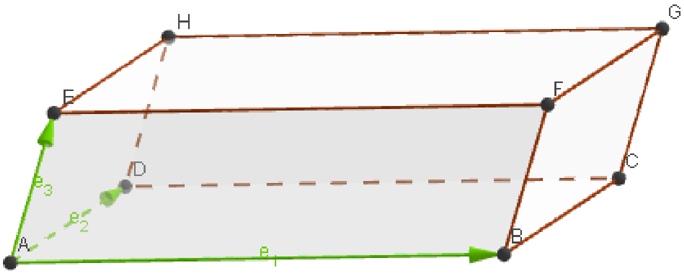
  $f: A \times A \to V_n \Longrightarrow f: Y, X \longmapsto X - Y$
  $f(X, P) = P - X = \vec{u}$
  - nedovoluje součet dvou bodů nebo odečíst od vektoru bod

- **Definice:** Je dán afinní prostor $A_n = (A, V_n, f)$, dimenze $n \geq 1$, je dána báze $\beta = \langle \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n} \rangle$ zaměření V_n, je dán bod $P \in A_n$.
  Uspořádaná (n+1)-tice
  $$\mathcal{R} = \langle P, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n} \rangle$$
  je nazývána **repér** prostoru A_n.

- **Definice:** Je dán afinní prostor $A_n = (A, V_n, f)$, dimenze $n \geq 1$, repér $\mathcal{R} = \langle P, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n} \rangle$.
  Zobrazení $l: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, které každému bodu $x \in A$ přiřadí n - tici $[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, definovanou vztahem $X = P + x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}$, nazýváme **lineární soustava souřadnic určená repérem** $\mathcal{R}$.

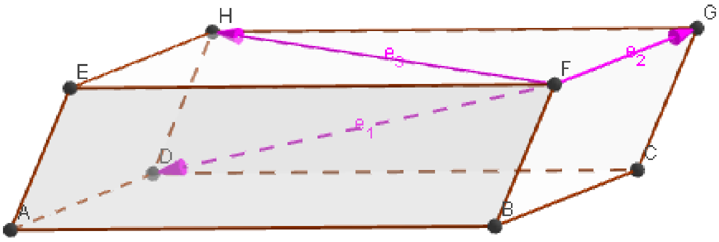
  P … počátek lineární soustavy souřadnic,
  $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ … souřadnicové vektory,
  $x_1, \dots, x_n$ … souřadnice bodu X vzhledem k LSS určené repérem $\mathcal{R}$,
  $X = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{R}}$.

- **Příklad:** V A_3 je dán rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$. Určete souřadnice jeho vrcholů vzhledem k LSS určené repérem $\mathcal{R}$.
  a) $\mathcal{R}$ =$\langle A, B-A, D-A, E-A\rangle$



$A = [0{,}0{,}0]$ $\quad$ $E = [0{,}0{,}1]$
$B = [1{,}0{,}0]$ $\quad$ $F = [1{,}0{,}1]$
$C = [1{,}1{,}0]$ $\quad$ $G = [1{,}1{,}1]$
$D = [0{,}1{,}0]$ $\quad$ $H = [0{,}1{,}1]$

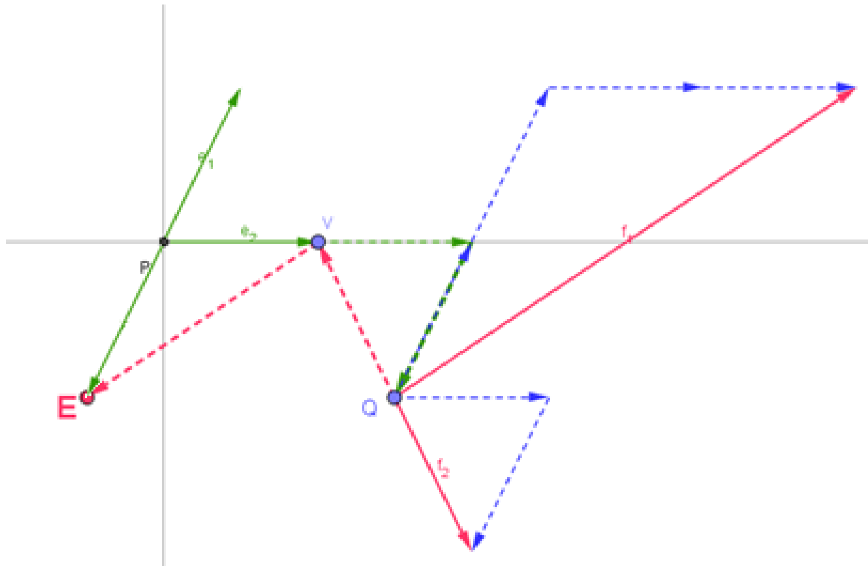
b) $\mathcal{R}$ =$\langle F, D-F, G-F, H-F\rangle$



$A = [1-1{,}0]$ $\quad$ $E = [0,-1{,}1]$
$B = [1{,}0,-1]$ $\quad$ $F = [0{,}0{,}0]$
$C = [1{,}1,-1]$ $\quad$ $G = [0{,}1{,}0]$
$D = [1{,}0{,}0]$ $\quad$ $H = [0{,}0{,}1]$

- **Příklad:** Určete souřadnice bodu E, který je $E = [0,-1]_{\mathcal{R}}$ vzhledem k repéru $\mathcal{S} = \langle Q = [2,-1]_{\mathcal{R}}; \overrightarrow{f_1} = (2{,}2)_{\mathcal{R}}; \overrightarrow{f_2} = (1,-1)_{\mathcal{R}}\rangle$ (složky jsou udány vůči repéru $\mathcal{R}$), $\mathcal{R}$ =$\langle P, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\rangle$.

$E - Q = [0,-1]_{\mathcal{R}} - [2,-1]_{\mathcal{R}} = (-2,0)_{\mathcal{R}} = x_1(2,2)_{\mathcal{R}} + x_2(1,-1)_{\mathcal{R}}$
$\longrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -1$
$\longrightarrow E = \left[-\frac{1}{2},-1\right]_{\mathcal{S}}$



ROVNICE AFINNÍHO PODPROSTORU

- Parametrické vyjádření
  - Obecná rovnice (existuje pouze pro naddimenzi)

- **Příklad:** VA_2 je dána přímka $p = \{[1,0], \vec{u} = (-1,4)\}$
  a) Parametrické vyjádření
  $x = 1 - 1t$
  $y = 0 + 4t; t\epsilon\mathbb{R}$
  b) Obecná rovnice přímky (pozor, není definována normála)
  $4x + y - 4 = 0$

- **Příklad:** VA_3 napište rovnici přímky p, která je průsečnicí rovin ϱ a σ
  $\varrho: 2x - 4y + z = 0$
  $\sigma: x + y + z - 1 = 0$
  Neexistuje obecná rovnice přímky!

  (1) $2x - 4y + z = 0$
  (2) $-x - y - z + 1 = 0$
  ----
  (1)+(2) $x - 5y + 1 = 0$ $\longrightarrow y = t; x = -1 + 5t; z = 2 - 6t$

- **Příklad:** Jsou dány body $U = [1,2-1], Y = [2,1,0], Z = [3,1,-1]$
  a) Určují body rovinu? Pokud ano, napište její obecnou rovnici.

  $\overrightarrow{UY} = (-1,1,-1);\ \overrightarrow{UZ} = (1,0,-1) \longrightarrow neleží\ na\ přímce\ (LNZ \longrightarrow určují\ rovinu)$

  Parametrická rovnice
  $$\left.\begin{array}{rcl} x &=& 1-t+u \\ y &=& 2+t \\ z &=& -1-t-u \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+z=-2t \\ 2y=4+2t \end{array}\right\} \boxed{x+2y+z-4=0}$$

  Přes determinant matice
  $$det\begin{pmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-x-y)-(z+y) = \boxed{-x-2x-z+d=0}$$

VZÁJEMNÁ POLOHA AFINNÍCH PODPROSTORŮ

- Afinní podprostory $\{U, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots\}, \{V, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots\}$
  - Jejich průnik je neprázdný $\Leftrightarrow$ $U - V$ je LZ s ostatními vektory $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$
  - Kdy jsou $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ lineárně závislé či nezávislé?
    - Přímky LZ jsou rovnoběžné nebo totožné
    - Přímky LNZ jsou mimoběžky nebo různoběžky

- **Příklad:** Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q v A_3, je-li
  $p = \{B = [1,2,-1], \vec{u} = (0,1,3)\}$
  $q = \{C = [0,0,2], \vec{v} = (1,-3,1)\}$

  Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou LNZ, jedná se o mimoběžky nebo různoběžky

  $$p: \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2+t \\ z = -1+3t \end{array} \qquad q: \begin{array}{l} x = 0+p \\ y = 0-3p \\ z = 2+p \end{array}$$

$\overrightarrow{CB} = B - C = (1,2,-3)$, $\overrightarrow{CB}, \vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou LNZ

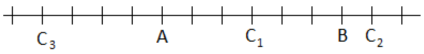
$$\begin{array}{ccc} 1 & = & p \\ 2+t & = & -3p \\ -1+3t & = & 2+p \end{array}$$

$\underline{p=1} \longrightarrow 2+t=-3 \longrightarrow \underline{t=-5} \longrightarrow -1-15 \neq 2+1 \longrightarrow mimoběžky$

DĚLÍCÍ POMĚR

- **Definice:** Nechť A, B, C jsou tři různé kolineární body, potom **dělící poměr** bodu C vzhledem k bodům A, B (v tomto pořadí) je reálné číslo λ pro něž platí
$$A - C = \lambda(B - C); \left(|\lambda| = \frac{|AC|}{|BC|}\right)$$
Značíme (ABC)
  - Když C leží mezi A a B, λ je záporné

- **Příklad:** Určete dělící poměr:



$(ABC_1) = -1$
$(ABC_2) = 7$
$(ABC_3) = \frac{2}{5}$

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

- **Definice:** Nechť A_n a A'_m jsou dva afinní prostory $f: A_n \longrightarrow A'_m$ je **afinní zobrazení** právě tehdy, když pro všechny trojice různých kolineárních bodů $X, Y, Z \in A_n$ platí:
  - $X', Y', Z'\big(X' = f(X); Y' = f(Y); Z' = f(Z)\big)$ buďto splynou nebo jde o tři různé kolineární body
  - Pokud $X' \neq Y' \neq Z'$, tak $(XYZ) = (X'Y'Z')$

- **Definice: Afinita** (**afinní transformace**) je vzájemně jednoznačné afinní zobrazení
$$f: A_n \longrightarrow A'_m.$$
Poznámka: afinity zachovávají rovnoběžky a dělící poměr

ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ AFINITY V A_2

- $f: [x, y] \longmapsto [x', y']$
$x' = ax + by + p$
$y' = cx + dy + q$ $\quad\quad$ $p, q \ldots vektory, o\ které\ se\ to\ posouvá$

- **Matice afinity**
  - Regulární $(det \neq 0)$
  - $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- **Samodružné body afinity**

$$\begin{aligned} x &= ax+by+p \\ y &= cx+dy+q \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 0 &= (a-1)x+by+p \\ 0 &= cx+(d-1)y+q \end{aligned}$$

- **Samodružné směry** (je nám jedno p a q)

$$f(\vec{u}) = \kappa \cdot \vec{u}; \vec{u} = (u_1, u_2)$$

$$\begin{aligned} \kappa \cdot u_1 &= au_1 + bu_2 \\ \kappa \cdot u_2 &= cu_1 + du_2 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} a-\kappa & b \\ c & d-\kappa \end{pmatrix} \longrightarrow$ vektory, které odpovídají vlastním číslům určují samodružné směry

- **Příklad:** Najděte samodružné body a směry zobrazení

$$f: \begin{aligned} x' &= -3x+4 \\ y' &= -2x+y+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -3x+4 \\ y &= -2x+y+2 \end{aligned} \rightarrow x = 1\ (y \in \mathbb{R}) \rightarrow \textit{přímka samodružných bodů}$$

$$det \begin{pmatrix} -3-\kappa & 0 \\ -2 & 1-\kappa \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (-3-\kappa)\cdot(1-\kappa) = 0$$

$$\begin{array}{ll} \kappa_1 = -3 & \kappa_2 = 1 \\ -3u_1 = -3u_1 + 0u_2 & 1u_1 = -3u_1 + 0u_2 \\ -3u_2 = -2u_1 + 1u_2 & 1u_2 = -2u_1 + 1u_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -2v_1 + 4v_2 = 0 \longrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \textit{násobky}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow v_1 = 0 \longrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \textit{násobky}$$

ANALYTICKÝ MODEL EUKLIDOVSKÉHO PROSTORU

- **Definice: Skalární součin** na vektorovém prostoru je zobrazení $\cdot$,

$$\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

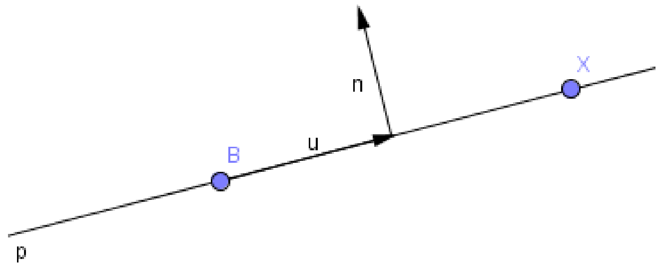
které splňuje pro $\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, V \in \mathbb{R}$.
  - $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$ — Bilineární
  - $(c\vec{u})\cdot\vec{v} = c(\vec{u}\cdot\vec{v})$, — forma
  - $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, — Symetrie
  - $\vec{u}\cdot\vec{u} > 0$ pro $\vec{u} \neq \vec{o}$ — Pozitivně definitní

- V rovině $\mathbb{E}_2$
  - $\vec{u} = (u_1, u_2); \vec{v} = (v_1, v_2)$ — $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

- V rovině $\mathbb{E}_3$
  - $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3);\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$

- **Velikost vektoru (norma)**
  - $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

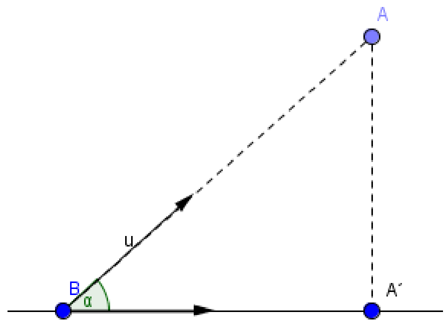
- **Odchylka dvou vektorů**
  - $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}, \varphi \in \langle 0, \pi \rangle$
  - Jestliže $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, pak $\vec{u} \perp \vec{v}$; $\vec{u} \neq \vec{o}, \vec{v} \neq \vec{o}$



$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$

  - Obecná rovnice je přes normálu, protože $(\mathrm{X} - \mathrm{B})\cdot\vec{n} = 0$

- **Vzdálenost**
  - Dvou bodů: $d(A,B) = \|A - B\|$
  - Bodu A od nadroviny: $d(A, nadrovina) = \frac{|\vec{n}\cdot(B-A)|}{\|\vec{n}\|}$
  - V $\mathbb{E}_3$ bodu A od přímky p: $\{B, \vec{u}\}$
    - $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot(A-B)}{\|\vec{u}\|\cdot\|A-B\|}$
    - $\cos\alpha = \frac{d(A,A')}{d(A,B)}$
    - $\frac{d(A,A')}{d(A,B)} = \frac{\vec{u}\cdot(A-B)}{\|\vec{u}\|\cdot\|A-B\|}$
    - $d(A,A') = \frac{\vec{u}\cdot(A-B)}{\|\vec{u}\|}$
    - $d(A,A') = \sqrt{d(A,B)^2 - d(A',B)^2}$
    - $d(A,p) = \sqrt{d(A,B)^2 - \left(\frac{\vec{u}\cdot(A-B)}{\|\vec{u}\|\cdot\|A-B\|}\right)^2}$



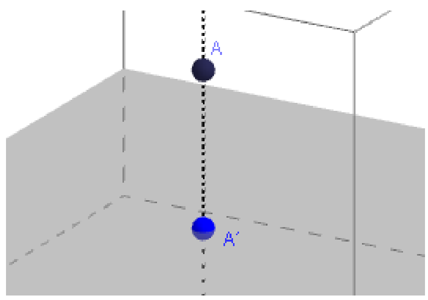
- **Příklad:** Určete vzdálenost bodu $A = [1,3,-5]$ od roviny $\rho: x - 2y + 2z - 3 = 0$

  a) Pomocí vzorce

$$d(A,\rho) = \frac{|1 - 6 - 10 - 3|}{3} = 6\,j$$

  b) Pomocí kolmého průmětu
  $\vec{n} = (1,-2,2)$

$x = 1 + t$
$y = 3 - 2t$
$z = -5 + 2t; t \in \mathbb{R}$



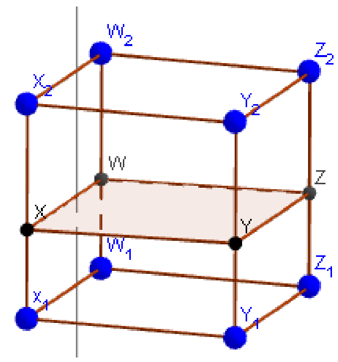
$\rho: (1 + t) - 2(3 - 2t) + 2(-5 + 2t) - 3 = 0 \longrightarrow t = 2$
$A' = [3,-1,-1]$

$d(A,A') = |A' - A| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6\,j$

ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ SHODNOSTÍ V $\mathbb{E}_2$

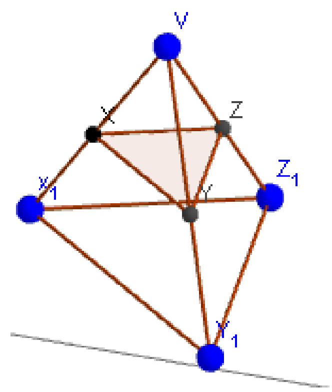
- $det\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix} = \rho$
  - Pro $\rho = \pm 1$ se mění poměr
  - Přímá shodnost rotace o φ
    - $\begin{aligned} x &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + p \\ y &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + q \end{aligned}$
    - $det\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$
  - Nepřímá shodnost rotace o φ
    - $\begin{aligned} x &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + p \\ y &= x\sin\varphi - y\cos\varphi + q \end{aligned}$
- **Příklad:** Sestrojte řez krychle rovinou rovnoběžnou s podstavou, procházející bodem X.

  Shodnost



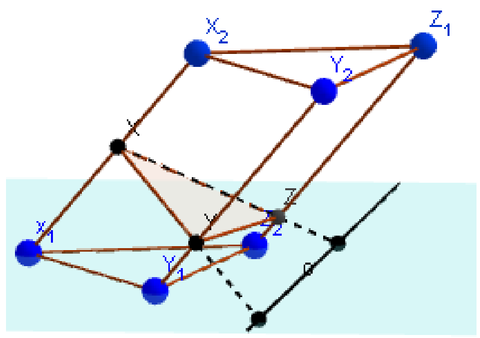
- **Příklad:** Sestrojte řez jehlanu rovinou rovnoběžnou s podstavou, procházející bodem X.

  Podobnost
  Stejnolehlost



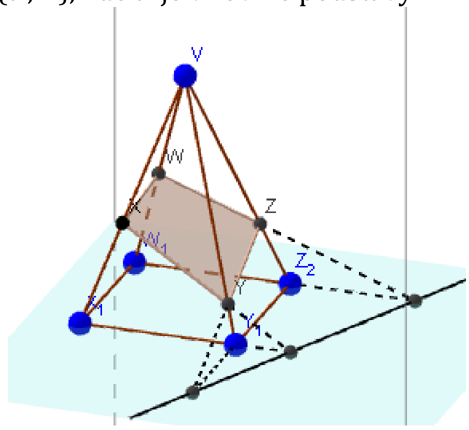
- **Příklad:** Sestrojte řez hranolu rovinou $\{o, X\}$, kde o je v rovině podstavy.

  Osová afinita (nejsou stejné s osou o)
  Bijekce

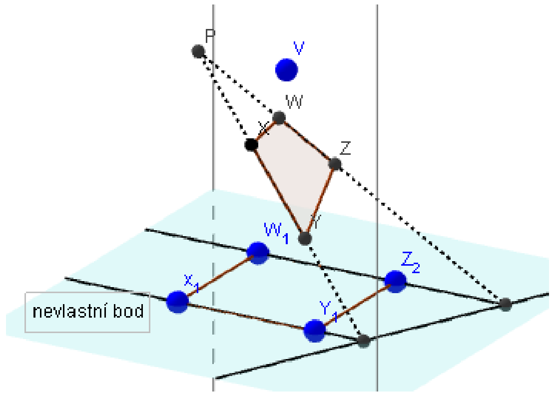


- **Příklad:** Sestrojte řez jehlanu rovinou $\{\sigma, X\}$, kde σ je v rovině podstavy.

  Kolineace s osou σ a středem V



- Zobrazení není z bijektivní roviny



- $\mathbb{E}_3$ projektivně rozšíříme
  - Ke každé přímce $p \in \mathbb{E}_3$ přidáme jeden bod P_∞ (nevlastní bod přímky p), který je společný po všechny přímky $p' \parallel p \equiv směr\ přímky$
  - Ke každé rovině $\pi \in \mathbb{E}_3$ přidáme jednu přímku p_∞ (nevlastní přímka roviny π), na níž leží nevlastní body všech přímek $p \in \pi$, p_∞ je společná přímka každé roviny $\sigma \parallel \pi \equiv dvojsměr\ roviny\ \pi$
  - K $\mathbb{E}_3$ přidáme nevlastní rovinu π_∞ = soubor všech nevlastních bodů a všech nevlastních přímek

- **Definice:** $\mathbb{E}_3$ s π_∞ nazýváme (projektivně) **rozšířený euklidovský prostor** a značíme $\overline{\mathbb{E}_3}$

- **Definice:** $\mathbb{E}_2$ s p_∞ nazýváme (projektivně) **rozšířenou euklidovskou rovinou** a značíme $\overline{\mathbb{E}_2}$

- **Princip duality v $\overline{\mathbb{E}_2}$**
  - $\forall$ 2 body $A \neq B$ leží na jedné přímce
  - $\forall$ 2 přímky $p \neq q$ mají právě jeden společný průsečík

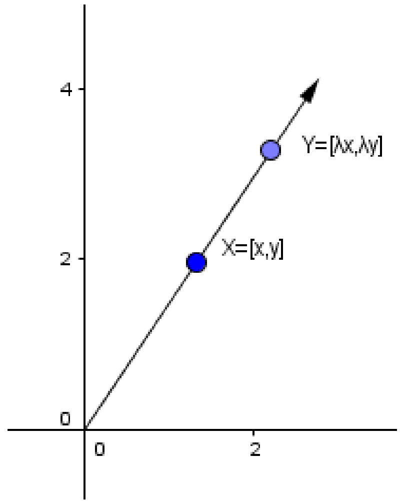
- **Princip duality v $\overline{\mathbb{E}_3}$**
  - $\forall$ 3 nekolineární body určují jednu rovinu
  - $\forall$ 3 roviny α, β, γ nenáležící témuž svazku se protínají v právě jednom bodě

    } Vzájemně duální věty
  - $\forall$ 2 roviny $\alpha \neq \beta$ se protínají v jedné přímce

- **Dělící poměr** dvou vlastních a jednoho nevlastního bodu
  - $(ABP_\infty) = 1$
  - $\lim_{X \to P_\infty} \frac{X-A}{X-B} = 1$

SOUŘADNICE V $\overline{\mathbb{E}_2}$

- **Vlastní body**
  - V $\overline{\mathbb{E}_2}$ uvažujeme uspořádané trojice $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$
    - Zavedeme $\boldsymbol{x_0}$, , $\boldsymbol{x} = \frac{x_1}{x_0}$ a $\boldsymbol{y} = \frac{x_2}{x_0}$
    - Souřadnice bodu $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ vyjádříme trojicí $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$
  - Pro $\boldsymbol{x_0} \neq \boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ odpovídá $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = \widetilde{\boldsymbol{X}}$ (**homogenní souřadnice**)
    - $(\boldsymbol{\rho_{x_0}}, \boldsymbol{\rho_{x_1}}, \boldsymbol{\rho_{x_2}})$
    - $(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ odpovídá $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \widetilde{\boldsymbol{X}}$
    - $\widetilde{Y} = [\lambda x, \lambda y]$
    - $\lim_{\lambda \to \infty} \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\lambda}, x, y\right) = (\boldsymbol{0}, x, y) = (\boldsymbol{1}, \lambda x, \lambda y)$
  - Ke každé $\widetilde{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ $\exists!$ bod $\boldsymbol{X} \in \overline{\mathbb{E}_2}$
    - Pro $\boldsymbol{x_0} \neq \boldsymbol{0}$ vlastní $(\boldsymbol{X} \in \mathbb{E}_2)$ s kartézskými souřadnicemi $\left[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right]$
    - Pro $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{0}$ nevlastní bod v $\overline{\mathbb{E}_2}$
  - Uspořádaná trojice $\widetilde{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ nazýváme homogenními souřadnicemi bodu $\boldsymbol{X} \in \overline{\mathbb{E}_2}$



- **Vlastní přímky v $\overline{\mathbb{E}_2}$**
  - Obecná rovnice: $n_1 x + n_2 y + n_0 = 0$
    - Každá trojice $(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2})$ zadává právě jednu přímku a $(\boldsymbol{\lambda n_0}, \boldsymbol{\lambda n_1}, \boldsymbol{\lambda n_2})$, $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, zadává stejnou přímku
    - $\widetilde{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2})$ … homogenní souřadnice přímky

  - Dosaďme homogenní souřadnice bodu do obecné rovnice
    - $n_1 \frac{\boldsymbol{x_1}}{\boldsymbol{x_0}} + n_2 \frac{\boldsymbol{x_2}}{\boldsymbol{x_0}} + n_0 = 0 \longrightarrow n_1 \boldsymbol{x_1} + n_2 \boldsymbol{x_2} + n_0 \boldsymbol{x_0} = 0$
  - Nevlastní bod $\boldsymbol{x_0} = 0$
    - Nevlastní přímka má homogenní souřadnice $\widetilde{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})^*$
      - Je to přímka pro všechny nevlastní body
  - Uspořádaná trojice $(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2})^* = \widetilde{\boldsymbol{n}}$ je homogenní souřadnice přímky s obecnou rovnicí $n_1 x + n_2 y + n_0 = 0$ v $\overline{\mathbb{E}_2}$
    - V $\mathbb{E}_2$ je obecná rovnice přímky $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$
    - V $\overline{\mathbb{E}_2}$ je homogenní obecná rovnice přímky $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{ax_1} + \boldsymbol{bx_2} + \boldsymbol{cx_0} = \boldsymbol{0}$
    - $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^*$ jsou homogenní souřadnice přímky
    - $(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2})^* \cdot (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = \boldsymbol{0}$

SOUŘADNICE V $\overline{\mathbb{E}_3}$

- **Vlastní body a rovina**
  - Homogenní souřadnice bodu jsou uspořádaná čtveřice $\widetilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3})$
    - Pro $\mathbf{x_0} \neq \mathbf{0}$ odpovídá vlastnímu bodu $\left[\frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_0}}, \frac{\mathbf{x_2}}{\mathbf{x_0}}, \frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{x_0}}\right]$
    - Pro $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ odpovídá nevlastnímu bodu
    - $\widetilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3})$ a $\widetilde{\mathbf{Y}} = (\lambda\mathbf{x_0}, \lambda\mathbf{x_1}, \lambda \boldsymbol{x_2}, \lambda \boldsymbol{x_3})$ odpovídají stejnému bodu pro $\lambda \neq 0$
  - Homogenní souřadnice roviny v $\overline{\mathbb{E}_2}$ $\widetilde{\mathbf{n}} = (\mathbf{n_0}, \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \mathbf{n_3})^*$ (navzájem duální s bodem) odpovídá rovině s obecnou rovnicí $\mathrm{n}_0 \boldsymbol{x_0} + \mathrm{n}_1 \boldsymbol{x_1} + \mathrm{n}_2 \boldsymbol{x_2} + \mathrm{n}_3 \boldsymbol{x_3} = 0$

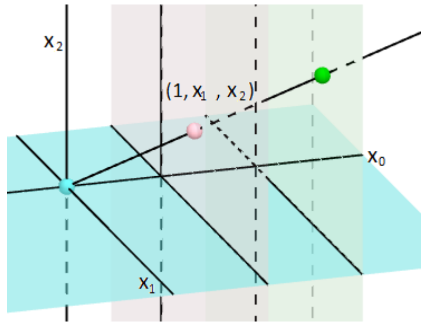
- **Příklad:** Zjistěte, zda body $\widetilde{\boldsymbol{X}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$, $\widetilde{\boldsymbol{Y}} = (\mathbf{1}, \mathbf{5}, \mathbf{8})$ a $\widetilde{\boldsymbol{Z}} = (\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{6})$ leží na jedné přímce.

$$det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \\ \boldsymbol{x_0} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = 0 \text{ je obecná rovnice roviny, která prochází body } \widetilde{\boldsymbol{X}} \text{ a } \widetilde{\boldsymbol{Y}}$$

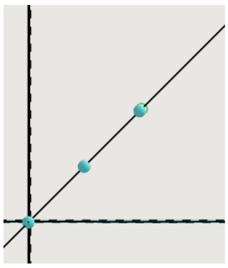
$$det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{pmatrix} = (30 + 16 + 12) - (15 + 32 + 12) = -1 \longrightarrow LNZ \text{ (neleží na přímce)}$$

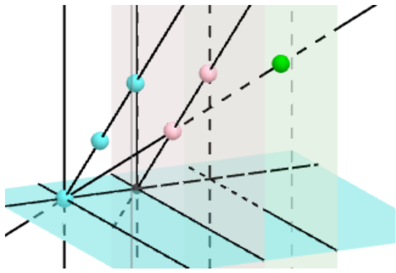
GEOMETRICKÁ INTERPRETACE HOMOGENNÍCH SOUŘADNIC

- Homogenní souřadnice v $\overline{\mathbb{E}_2}$ je trojice $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$
  - Prvek z aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$
  - Bod $\mathbf{X}$ v$\overline{\mathbb{E}_2}$ s homogenními souřadnicemi $(\mathbf{1}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ odpovídají vektory $\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{1}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) \approx$ přímce procházející počátkem



- Nevlastní body $P_\infty \in \overline{\mathbb{E}_2}$ s homogenními souřadnicemi $(\mathbf{0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$
  - Odpovídají v $\mathbb{R}^3$ vektory tvaru $\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) \approx$ vektoru začínajícím v počátku rovnoběžným s rovinou $\boldsymbol{x_0} = \mathbf{1}$





  - Body v $\overline{\mathbb{E}_2}$ odpovídají **vektoru** v $\mathbb{R}^3$
    - Vektorový (aritmetický) zástupce bodu v $\overline{\mathbb{E}_2}$
- Tři body v $\overline{\mathbb{E}_2}$ leží na přímce právě tehdy, když jejich vektoroví zástupci jsou lineárně závislí

- **Příklad:** Zjistěte, zda body $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \overline{\mathbb{E}_2}$ leží na jedné přímce, pokud mají homogenní souřadnice

  a) $\tilde{X} = (1,2,3), \tilde{Y} = (1,5,8), \tilde{Z} = (1,4,6)$
  - Řešení pomocí návratu do $\mathbb{E}_2$ (všechny body jsou vlastní)

    $X = [2,3], Y = [5,8], Z = [4,6]$

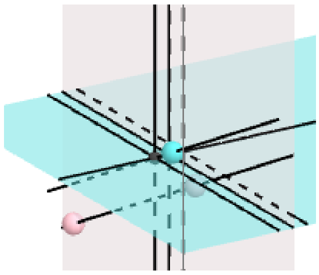
    $\overrightarrow{XY} = (3,5) \longrightarrow \vec{n} = (-5,3)$

    Obecná rovnice přímky XY

    $\vec{n} \cdot ([x, y] - X) = (-5,3) \cdot (x - 2, y - 3) = -5x + 3y + 1 = 0$

    Dosadíme bod Z

    $-5 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 1 \neq 0 \longrightarrow Z \notin XY$



- Pomocí lineární závislosti (aritmetických zástupců)
  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \longrightarrow$ LNZ (neleží na přímce)

b) $\tilde{X} = (1,3,-1), \tilde{Y} = (0,2,1), \tilde{Z} = (1,-11,-8)$

- Přechod do $\mathbb{E}_2$
  $X = [2,3], \vec{y} = (2,1), Z = [4,6]$

  $\overrightarrow{XZ} = (-14,-7); \vec{y} = (2,1) \longrightarrow -7\vec{y} = \overrightarrow{XZ}$

- Pomocí lineární závislosti
  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-11} & \mathbf{-8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{14} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \longrightarrow$ LZ (leží na přímce)

- **Příklad:** Najděte přímku (homogenní obecnou rovnici), která prochází body s homogenními souřadnicemi $\tilde{X} = (1,3,-1), \tilde{Y} = (0,2,1)$
  - Hledáme $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$, který je lineárně závislý s $\tilde{X}$ a $\tilde{Y}$

    Hodnost matice $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_0} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ musí být 2.

    $det \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_0} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow 3\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{2x_2} + \boldsymbol{2x_0} - \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{0} \longrightarrow \boxed{5\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{2x_2} = \boldsymbol{0}}$

- **Příklad:** Najděte průsečík přímek v $\overline{\mathbb{E}}_2$
  $p_1: 3\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{0}$

  $p_2: -2\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{0}$
  - Z rovnic

    $3\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_2}$

    $-2\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{x_1} + 3\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{0}$

    $\boldsymbol{x_0} = -\boldsymbol{x_1} \longrightarrow (1,-1,3)$
  - Z duální vlastnosti

    $p_1: (3,0,-1)^*$

    $p_2: (-2,1,1)^*$

    $det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_0} & \boldsymbol{\lambda_1} & \boldsymbol{\lambda_2} \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{\lambda_1} + \boldsymbol{3\lambda_2} + \boldsymbol{\lambda_0} - \boldsymbol{3\lambda_1} = \boldsymbol{\lambda_0} - \boldsymbol{\lambda_1} + \boldsymbol{3\lambda_2} \longrightarrow (1,-1,3)$

- **Příklad:** V $\overline{\mathbb{E}}_2$ je dána přímka s homogenními souřadnicemi $(7,2,5)^*$. Určete homogenní souřadnice jejího nevlastního bodu.

  $$7\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{2x_1} + \boldsymbol{5x_2} = \boldsymbol{0}$$
  - V $\overline{\mathbb{E}}_2$ směrový vektor $(0,5,-2)$
  - Nevlastní bod $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{0}$

    $\boldsymbol{2x_1} + \boldsymbol{5x_2} = \boldsymbol{0} \longrightarrow$ jednoznačně určený bod $(0,-5,2)$

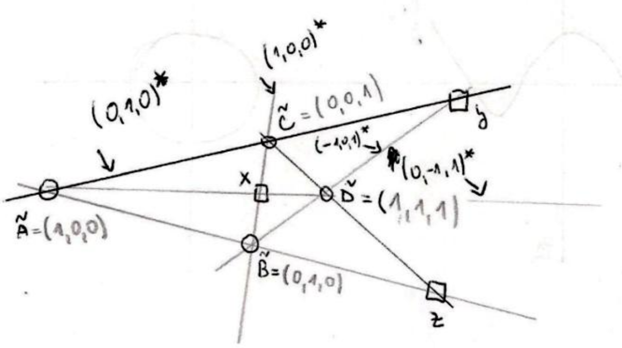
- **Příklad:** V $\overline{\mathbb{E}}_3$ je přímka popsána v homogenních souřadnicích rovnicemi
  $2\boldsymbol{x_0} + \mathbf{3}\boldsymbol{x_1} - \mathbf{4}\boldsymbol{x_2} + \mathbf{5}\boldsymbol{x_2} = \mathbf{0}$ $\qquad$ $7\boldsymbol{x_0} - \mathbf{4}\boldsymbol{x_1} + \mathbf{4}\boldsymbol{x_2} - \mathbf{4}\boldsymbol{x_2} = \mathbf{0}$

  Určete její nevlastní bod $\boldsymbol{x_0} = \mathbf{0}$

  $\mathbf{3}\boldsymbol{x_1} - \mathbf{4}\boldsymbol{x_2} + \mathbf{5}\boldsymbol{x_2} = \mathbf{0} \wedge -\mathbf{4}\boldsymbol{x_1} + \mathbf{4}\boldsymbol{x_2} - \mathbf{4}\boldsymbol{x_2} = \mathbf{0}$

  $-\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_3} = \mathbf{0}; \mathbf{2}\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2} \longrightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$

- **Příklad:** Dopočítejte body X, Y a Z, znáte-li body $\tilde{A} = (1,0,0)$, $\tilde{B} = (0,1,0)$, $\tilde{C} = (0,0,1)$ a $\widetilde{D} = (1,1,1)$, $AC = (0,1,0)^*$, $BC = (1,0,0)^*$.



  - Přímky

    AB $\qquad$ $(n_0, n_1, n_2)^* \cdot (1,0,0) = 0$
    $(n_0, n_1, n_2)^* \cdot (0,1,0) = 0 \longrightarrow AB = (0,0,1)^*$

    $$det\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{x_0} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_2} = 0$$

    AD
    $$det\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 1 \\ \boldsymbol{x_0} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} = 0 \longrightarrow AD = (0,-1,1)^*$$

    BD
    $$det\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 1 \\ \boldsymbol{x_0} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{x_2} = 0 \longrightarrow BD = (-1,0,1)^*$$

    CD
    $$det\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 1 \\ \boldsymbol{x_0} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_0} = 0 \longrightarrow CD = (1-1,0)^*$$

  - Body

    Z je průsečík AB a CD $\qquad$ $(0,0,1)^*;\ (1,-1,0)^*$
    $$det\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 1 & -1 & 0 \\ \boldsymbol{\alpha_0} & \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_0} = 0 \longrightarrow Z = (1,1,0)$$

    Y je průsečík AC a BD $\qquad$ $(0,1,0)^*;\ (-1,0,1)^*$
    $$det\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -1 & 0 & 1 \\ \boldsymbol{\alpha_0} & \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha_0} + \boldsymbol{\alpha_2} = 0 \longrightarrow Z = (1,0,1)$$

    X je průsečík AD a BC $\qquad$ $(0,-1,1)^*;\ (1,0,0)^*$
    $$det\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\alpha_0} & \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_2} = 0 \longrightarrow Z = (0,1,1)$$

PROJEKTIVNÍ PROSTOR

- **Definice:** Buď V^{n+1} vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ dimenze $n+1; n \geq 0$. Na $V^{n+1} \setminus \{\vec{o}\}$. Zavedeme ekvivalenci $\sim$
  $\vec{u} \sim \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v}$ $\qquad\qquad \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}); \lambda \neq 0$

  Projektivní prostor dimenze n je $\mathbb{P}_n(V^{n+1}) = V^{n+1} \setminus \{\vec{o}\}/\sim$ (rozdělený na třídy ekvivalence)
  $\langle\vec{v}\rangle = \{\vec{u} \in V^{n+1}; \vec{u} = \lambda\vec{v}; \lambda \neq 0; \lambda \in \mathbb{R}\}$ jsou prvky projektivního prostoru $\mathbb{P}_n(V^{n+1})$
  zkráceně značíme $\mathbb{P}_n$
  $\langle\vec{v}\rangle$ jsou jednodimenzionální podprostory V^{n+1}

  Názvosloví (např. pro $\mathbb{P}_2$...projektivní rovina)
  $X \in \mathbb{P}_2$ geometrický bod $\qquad X \in \mathbb{E}_2$
  $\vec{v} \in V^3$ takový, že $\langle\vec{v}\rangle = X$ je vektorový neboli aritmetický zástupce bodu X
  $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$
  Každý bod $X \in \mathbb{P}_n$ má nekonečně mnoho aritmetických zástupců

- **Definice:** Body $A_1 = \langle\overrightarrow{a_1}\rangle, \dots, A_k = \langle\overrightarrow{a_k}\rangle$ nazveme **lineárně závislé** (nezávislé), jestliže jsou LZ (nebo LNZ) vektory $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$
  Bod $A = \langle\vec{a}\rangle$ je lineární kombinací bodů $A_1, \dots, A_k$, jestliže je vektor $\vec{a}$ lineární kombinací $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}$.
  Je-li $\vec{a} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \cdots + \lambda_k \cdot \overrightarrow{a_k}$, píšeme formálně $A = \lambda_1 \cdot A_1 + \cdots + \lambda_k \cdot A_k$

- **Definice: Aritmetickou bází** projektivního prostoru $\mathbb{P}_n(V^{n+1})$ rozumíme bázi $\overrightarrow{u_0}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ vektorového prostoru V^{n+1}.
  Geometrickou bází (projektivním repérem) prostoru $\mathbb{P}_n(V^{n+1})$ rozumíme libovolnou $(n+2)$-tici bodů $\langle E_0, \dots, E_n, J\rangle$ takových, že libovolných $(n+1)$z nich je LNZ. Body $E_0, \dots, E_n$ nazýváme základní body, J nazýváme jednotkový bod.
  - Pozorování: Je-li $\overrightarrow{u_0}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ aritmetickou bází $\mathbb{P}_n$, potom $\langle E_0, \dots, E_n, J\rangle = \langle\langle\overrightarrow{u_0}\rangle, \dots, \langle\overrightarrow{u_n}\rangle, \langle\overrightarrow{u_0}, \dots, \overrightarrow{u_n}\rangle\rangle$ je geometrickou bází $\mathbb{P}_n$.

- **Definice:** Nechť $X \in \mathbb{P}_n$ je geometrický bod, $\langle E_0, \dots, E_n, J\rangle$ je geometrická báze $\mathbb{P}_n$ taková, že $E_0 = \langle\overrightarrow{u_0}\rangle, \dots, E_n = \langle\overrightarrow{u_n}\rangle, J = \langle\overrightarrow{u_0} + \cdots + \overrightarrow{u_n}\rangle$.

  Nechť $X = \langle\vec{x}\rangle$, kde $\vec{x} = x_0\overrightarrow{u_0} + \cdots + x_n\overrightarrow{u_n}$ $\qquad x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \qquad j = 0, \dots, n$
  Potom $(n+1)$-tici $(x_0, \dots, x_n)$ nazveme **projektivními homogenními souřadnicemi** bodu X vzhledem k bázi $\langle E_0, \dots, E_n, J\rangle$

  Pokud by J nebylo v bázi $\vec{x} = x_0\overrightarrow{u_0} + \cdots + x_n\overrightarrow{u_n}$ nezáleží na tom, jakého aritmetického reprezentanta vezmu $\vec{x} = x_0 \cdot 2 \cdot \overrightarrow{u_0} + x_1 \cdot 5 \cdot \overrightarrow{u_1} + \cdots + x_n \cdot 6 \cdot \overrightarrow{u_n}$,
  pak by souřadnice byli $(2x_0, 5x_1, \dots, 6x_n)$.
  Proto se přidává $J = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$;$5J = 5E_1 + 5E_2 + \cdots + 5E_n$
  $\vec{x} = 5x_0 \cdot \overrightarrow{u_0} + 5x_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + \cdots + 5x_n \cdot \overrightarrow{u_n}$ (J zajišťuje to, že budu všechny násobit stejným číslem)

- **Definice:** Množina všech bodů v $\mathbb{P}_n$, které jsou lineární kombinací $k+1$ LNZ bodů $x_0, \dots, x_k$ se nazývá **k-rozměrný projektivní podprostor** $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_n$.
  $k = n-1$ ... projektivní nadrovina
  $k = 2$ ... projektivní rovina (3 body)
  $k = 1$ ... projektivní přímka
  $k = 0$ ... projektivní bod (1 bod)
  $k = -1$ ... prázdná množina
- Parametrické vyjádření podprostoru
- Obecnou rovnici pro nadrovinu

- **Příklad:** V $\mathbb{P}_2$ jsou dány body $A = \langle(0,3,2)\rangle$, $B = \langle(2,8,2)\rangle$ napište obecnou rovnici přímky AB + parametrickou rovnici.

$$det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$4x_1 + 6x_0 - 16x_0 - 6x_2 = 0 \longrightarrow 4x_1 - 10x_0 - 6x_2 = 0 \longrightarrow (5,-2,3)^*$

Parametrická rovnice
$x_0 = 0a + 2b$
$x_1 = 3a + 8b$
$x_2 = 2a + 2b; a, b \in \mathbb{R}$

- **Příklad:** V $\mathbb{P}_2$ je dána geometrická báze $\langle E_0, E_1, E_2, E_3, J\rangle$
1) Určete obecné i parametrické vyjádření roviny procházející body $E_0 = \langle(1,0,0,0)\rangle, E_1 = \langle(0,1,0,0)\rangle, J = \langle(1,1,1,1)\rangle$

  - Parametrické vyjádření
    $x_0 = \alpha + \gamma$
    $x_1 = \beta + \gamma$
    $x_2 = +\gamma$
    $x_3 = +\gamma, \alpha, \beta, \gamma \epsilon \mathbb{R}$

  - Obecná rovnice
    $$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_3 - x_2 = 0$$
    $x_3 - x_2 = 0$
    Homogenní souřadnice: $(0,0,1,1)^*$

2) Určete obecné i parametrické vyjádření přímek
a) $E_3 = \langle(0,0,0,1)\rangle, J = \langle(1,1,1,1)\rangle$

  - Parametrické vyjádření
    $x_0 = \beta$
    $x_1 = \beta$
    $x_2 = \beta$
    $x_3 = \alpha + \beta, \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$

  - Obecná rovnice
    Zvolím bod $E_1 = \langle(0,1,0,0)\rangle$, protože neleží na jedné přímce s E_3 a J

    $$det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = -x_2 + x_0 = 0$$
    $x_0 - x_2 = 0$

    Pokud zvolím body E_2, E_3, J
    $x_0 - x_1 = 0$
    Obecné vyjádření:
    $x_0 - x_1 = 0$
    $x_0 - x_2 = 0$

b) E_3, E_1

$x_0 = 0$
$x_1 = \alpha$
$x_2 = 0$
$x_3 = \beta, \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$
$x_0 - x_2 = 0$
$x_0 = 0$

- **Příklad:** V $\mathbb{P}_2$ jsou dány body $A = \langle(-3,5,15,1)\rangle$, $B = \langle(0,0,7,1)\rangle$, $C = \langle(2,-1,4,1)\rangle$ a $D = \langle(4,-3,0,1)\rangle$. Ověřte, že přímky AB a CD mají společný bod a určete jeho souřadnice.
  - Parametrické vyjádření

$$AB \quad \begin{aligned} x_0 &= -3a \\ x_1 &= +5a \\ x_2 &= 15a + 7b \\ x_3 &= a + b; a, b \epsilon \mathbb{R} \end{aligned} \qquad CD \quad \begin{aligned} x_0 &= 2c + 4d \\ x_1 &= -c - 3d \\ x_2 &= 4c \\ x_3 &= c + d; c, d \epsilon \mathbb{R} \end{aligned}$$

"$\alpha \widetilde{x_0} = \widetilde{x_0}$" (1) $-3\alpha a = 2c + 4d$

(2) $+5\alpha a = -c - 3d$

(3) $15\alpha a + 7\alpha b = 4c$

(4) $\alpha a + \alpha b = c + d$

5(1)+3(2) $\quad 0 = 7c + 11d$

Zvolíme například $\quad c = 11; d = -7$

$x_0 = 22 - 28 = -6$

$x_1 = -11 + 21 = 10$

$x_2 = 44$

$x_3 = 11 - 7 = 4$

$P = \langle(-6,10,44,4)\rangle = \langle(-3,5,22,2)\rangle$, .

PŘECHOD OD PROJEKTIVNÍHO PROSTORU K AFINNÍMU

- **Definice:** Buď $\mathbb{P}_n$ projektivní prostor V^{n+1} jeho (aritmetický) vektorový základ .
V $\mathbb{P}_n$ zvolme nadrovinu ω_0 s vektorovým základem $W \subset V^{n+1}$,
v $\mathbb{P}_n$ zvolme geometrickou bázi $E_1, \dots, E_n \in \omega_0, E_0, J \notin \omega_0, E_j = \langle(\overrightarrow{e_j})\rangle$, pak je nadrovina ω_0 popsána obecnou rovnicí $x_0 = 0$.
Označme $A = \mathbb{P}_n \setminus \omega_0 = \{\langle(x_0, x_1, \dots, x_n)\rangle \in \mathbb{P}_n, x_0 \neq 0\}$

$$X, Y \in A \qquad X = \langle\vec{x}\rangle \quad \vec{x} = \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \quad \vec{x} = \overrightarrow{e_0} + \frac{x_1}{x_0}\overrightarrow{e_1} + \dots + \frac{x_n}{x_0}\overrightarrow{e_n}$$
$$Y = \langle\vec{y}\rangle \quad \vec{y} = \left(1, \frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_n}{y_0}\right) \quad \vec{x} = \overrightarrow{e_0} + \frac{y_1}{y_0}\overrightarrow{e_1} + \dots + \frac{y_n}{y_0}\overrightarrow{e_n}$$

Definujeme zobrazení $(\overrightarrow{\quad})$:

$$A \times A \to W^n$$
$$X, Y \to \overrightarrow{XY} = Y - X = \left(\frac{y_1}{y_0} - \frac{x_1}{x_0}\right)\overrightarrow{e_1} + \dots + \left(\frac{y_n}{y_0} - \frac{x_n}{x_0}\right)\overrightarrow{e_n}$$

Pak $(A, W^n, \overrightarrow{\quad})$ je afinní prostor, repér v afinním prostoru $\langle E_0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\rangle$.
Postup lze i obrátit a získáme **projektivně rozšířený afinní prostor** $\overrightarrow{A_n}$.

ZOBRAZENÍ V PROJEKTIVNÍM PROSTORU

- **Definice:** Nechť $\mathbb{P}_n(V^{n+1})$ a $\mathbb{P}_m(V^{m+1})$ jsou dva projektivní prostory a $\varphi: V^{n+1} \to V^{m+1}$ buď prosté lineární zobrazení. Zobrazení $f: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_m$ definované pro $\vec{o} \neq \vec{u} \in V^{n+1}$ předpisem $f = (\langle\vec{u}\rangle) = \langle\varphi(\vec{u})\rangle$ se nazývá **kolineární zobrazení (projektivní).**

  Kolineární zobrazení $f: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ se nazývá **kolineace**.
  $\alpha\varphi(\vec{u}) = \varphi(\alpha\vec{u})$ platí díky linearitě φ.

  Analytické vyjádření:prosté lineární zobrazení φ: $\varphi(\vec{u}) = A\vec{u}$, kde A je matice lineárního zobrazení φ

  $$f(\langle\vec{u}\rangle) = \langle\varphi(\vec{u})\rangle = \langle A\vec{u}\rangle = \langle\vec{u}'\rangle$$

  $$f(\langle\rho\vec{u}\rangle) = \langle\varphi(\rho\vec{u})\rangle = \langle\rho\varphi(\vec{u})\rangle = \langle\rho A\vec{u}\rangle, \rho\epsilon\mathbb{R}.$$

  Kolineární zobrazení je určeno třídou matic

  $$\tilde{A} = \{\rho A; \rho \in \mathbb{R}; \rho \neq 0 \; a \; plat\acute{i} \; \varphi(\vec{u}) = A\vec{u}\}$$

  f je indikováno φ. Kolinearitě odpovídají čtvercové regulární matice.

DVOJPOMĚR

- **Definice:** Nechť A, B, C, D jsou 4 nazájem různé body na projektivní přímce. Nechť pro jejich vektorové zástupce platí

  $$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$$
  $$\vec{d} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$$

  Potom číslo $(ABCD) = \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}$ nazýváme dvojpoměr uspořádané čtveřice bodů A, B, C, D.

  Souvislost s dělícím poměrem $(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}$.

- **Věta:** Kolineární zobrazení zachovává dvojpoměr.

- **Důkaz:** Nechť $A, B, C, D \in P_n$ leží na přímce, pro jejich vektorové zástupce platí

  $$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$$
  $$\vec{d} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b},$$

  pak $(ABCD) = \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}$. Buď f kolineární zobrazení indukované prostým lineárním zobrazením φ.

  $$\varphi(\vec{c}) = \varphi\left(\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}\right) = \alpha_1\varphi(\vec{a}) + \beta_2\varphi\left(\vec{b}\right),$$

  takže dvojpoměr bodu $\langle\varphi(\vec{a})\rangle, \langle\varphi(\vec{b})\rangle, \langle\varphi(\vec{c})\rangle$ a $\langle\varphi(\vec{d})\rangle$ je $\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}$ ■.

- Speciálně kolineace $f: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ je jednoznačně určena zadáním $n + 2$ dvojic odpovídajících si bodů, přičemž $\forall(n + 1)$-tice z těchto bodů jsou LNZ. (vzorové body, obrazy bodů)

- Bod $\vec{u} \in \mathbb{P}_n$ je samodružný s kolineací f, pokud $f(\langle\vec{u}\rangle) = \langle\vec{u}\rangle$.
- **Samodružné body**

  $\langle\vec{u}\rangle = \langle A\vec{u}\rangle$ $\quad \varphi(\vec{u}) = Au$ matice lineárního zobrazení
  $\lambda\vec{u} = A\vec{u}, \lambda \neq 0$ $\quad \vec{u}$ vlastní vektor matice A, λ vlastní číslo
  $(A - \lambda E)\vec{u} = 0$

- **Příklad:** Najděte samodružné body kolineace $f\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ indukované prostým lineárním zobrazením φ, jestliže
$$\varphi\big((x,y,z)\big) = (2x - z, 2x + y - 2z, 3x - 2z)$$

$2x - z = x\,(\cdot\,\lambda)$
$2x + y - 2z = y(\cdot\,\lambda)$
$3x - 2z = z(\cdot\,\lambda)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & -z \\ 2x & y & -2z \\ 3x & 0 & -2z \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$(-1)^{2+2}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -1(2+\lambda) \end{vmatrix} = 0$$
$$(1-\lambda)[(-1)(4-\lambda^2)+3] = 0$$
$$(1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0$$

  - $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot \vec{v} = 0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot \vec{v} = 0$$

Řešení homogenní rovnice je vlastní vektor (1,2,3).

  - $\lambda_{2,3} = +1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\cdot \vec{v} = 0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot \vec{v} = 0$$

Řešením homogenní rovnice je (1,0,1); (0,1,0).

Homogenní rovnice je přímka řešení $(k,0,k) + (0,l,0);\ k,l \in \mathbb{R}$.

Dva samodružné body $\langle(1,0,1)\rangle, \langle(0,1,0)\rangle \Rightarrow$ přímka samodružných bodů = lineární kombinace těchto bodů.

- **Příklad:** Najděte samodružné body kolineace $f\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ indukované lineárním zobrazením s maticí
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-1)^{3+3}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(1-\lambda)[(2-\lambda)^2-1] = 0$$
$$(1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)] = 0$$

$\lambda_{1,2} = +1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0$$

Přímka samodružných bodů $\langle(0,0,1)\rangle, \langle(1,-1,0)\rangle$.

$\lambda_3 = +3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0$$

Řešení homogenní rovnice je vlastní vektor $(1,1,0)$, bod $\langle(1,1,0)\rangle$.

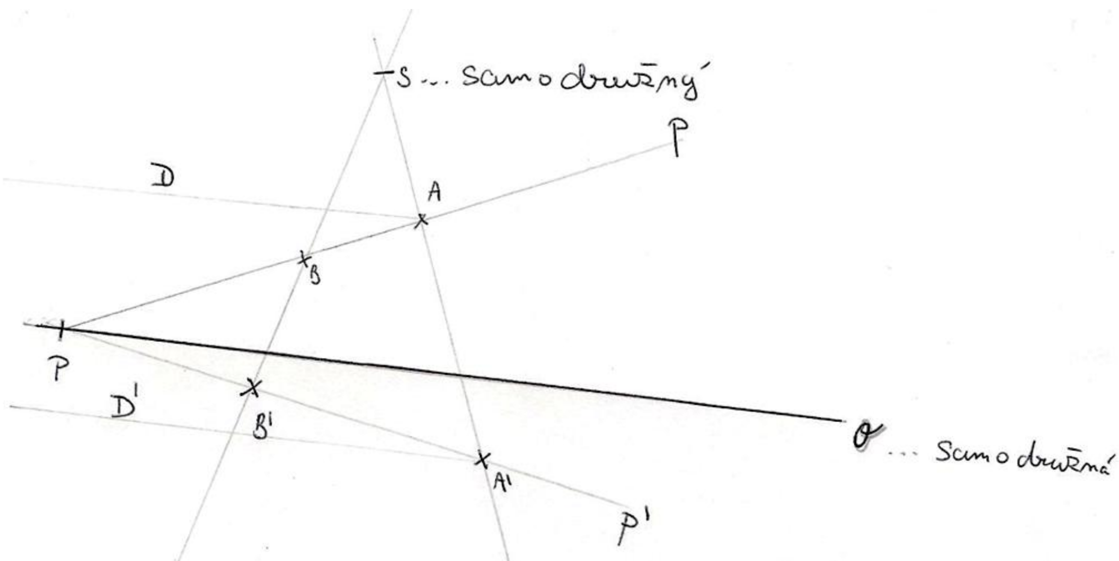
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \searrow$$

přímka určená body $\langle(1,0,0)\rangle, \langle(0,1,0)\rangle$ je samodružná

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \nearrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ tenhle vektor se nikam nemíchá

- **Středová (osová) kolineace** je určena osou o a trojicí S, A, A', kde S je střed kolineace, A a A' vzor a obraz. S, A, A' leží na přímce pro vlastní body.



- **Příklad:** Kolineace f na přímce $\mathbb{P}_1$je určena pásy odpovídajících si bodů

$$(1,0) \longrightarrow (1,4)$$
$$(2,3) \longrightarrow (8,5)$$
$$(0,1) \longrightarrow (-2,1)$$

Určete matici kolineace

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\lambda_1 \qquad \begin{array}{c} a = \lambda_1 \\ c = 4\lambda_1 \end{array} \longrightarrow \boxed{c = 4a}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}\lambda_2 \qquad \begin{array}{c} 2a + 3b = 8\lambda_2 \\ 2c + 3d = 5\lambda_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda_3 \qquad \begin{array}{c} b = -2\lambda_3 \\ d = \lambda_3 \end{array} \longrightarrow \boxed{b = -2d}$$

$2a - 6d = 8\lambda_2$
$8a + 3d = 5\lambda_2$

$10a - 30d = 40\lambda_2$
$-64a - 24d = -40\lambda_2$

$-54a - 54d = 0 \longrightarrow \boxed{a = -d}$

Jedno zvolím $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

- **Příklad:** Kolineace f v $\mathbb{P}_2$je určena pásy odpovídajících si bodů

$$(1,0,2) \longrightarrow (1,-1,2)$$
$$(0,0,1) \longrightarrow (1,-2,3)$$
$$(1,1,0) \longrightarrow (1,6,0)$$
$$(0,1,0) \longrightarrow (0,3,2)$$

jeden je určitě LK ostatních

a) Určete matici kolineace

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\lambda_1 \qquad \begin{array}{c} a + 2c = \lambda_1 \\ d + 2f = -\lambda_1 \\ g + 2i = 2\lambda_1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} a + 2c + d + 2f = 0 \\ 2d + 4f + g + 2i = 0 \\ g + 2i - 2a - 4c = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\lambda_2 \qquad \begin{array}{c} c = \lambda_2 \\ f = -2\lambda_2 \\ i = 3\lambda_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \boxed{2c = -f} \\ \boxed{3f = -2i} \\ \boxed{i = 3c} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_3 \qquad \begin{array}{c} a + b = \lambda_3 \\ d + e = 6\lambda_3 \\ g + h = 0 \end{array} \longrightarrow \boxed{g = -h}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\lambda_4 \qquad \begin{array}{c} \boxed{b = 0} \\ e = 3\lambda_4 \\ h = 2\lambda_4 \end{array} \longrightarrow \boxed{2e = 3h}$$

$$\begin{matrix} a+2c+d+2f=0 \\ 2c=-f \end{matrix} \longrightarrow a+d+f=0$$

$$\begin{matrix} g+2i-2a-4c=0 \\ i=3c \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} g+2c-2a=0 \\ 2c=-f \end{matrix} \longrightarrow g-f-2a=0$$

$$\begin{matrix} a+b=\lambda_3 \\ b=0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} a=\lambda_3 \\ d+e=6\lambda_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} d+e-6a=0 \\ 2e=3h; g=-h \end{matrix} \longrightarrow 2d-3g-12a=0$$

$$\begin{matrix} a+d+f=0 \\ g-f-2a=0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -a+g+d=0 \\ 2d-3g-12a=0 \end{matrix} \longrightarrow -15g-10d=0 \longrightarrow \boxed{3g=-2d}$$

$$\begin{matrix} 2d-3g-12a=0 \\ 3g=-2d \end{matrix} \longrightarrow \boxed{d=3a}$$

$$\begin{matrix} a+d+f=0 \\ d=3a \end{matrix} \longrightarrow \boxed{4a=-f}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Najděte obraz bodu (1,1,1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

c) Najděte vzor bodu $(1,-5,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a+2c & = & \alpha \\ 3a+3b-4c & = & -5\alpha \\ -2a+2b+6c & = & \alpha \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 5a+3b & = & -3\alpha \\ 5a+13b & = & -13\alpha \end{matrix} \longrightarrow 10b=-10\alpha \longrightarrow b=-\alpha$$

Zvolím $\alpha=1 \longrightarrow b=-1 \longrightarrow a=0 \longrightarrow c=\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

KVADRIKY

- Kuželosečky v rovině v obecné poloze $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ do projektivní $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$
    - Rovnici přenásobíme ${x_0}^2 (x_0 \neq 0)$

      $a{x_1}^2 + 2bx_1x_2 + c{x_2}^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + f{x_0}^2 = 0$

    - Chceme přepsat do matice a přidáme podmínky, že má být symetrická

      $$(x_0 \quad x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} b & d & e \\ d & a & b \\ e & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

- **Bilineární forma** $f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^T A \vec{v}$,$A$ je matice bilineární formy
    - Symetrická a souměrná podle diagonály
      $f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$
    - Kvadratická forma $F(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{u})$

- Budeme pracovat v komplexním rozšíření projektivního prostoru ${\mathbb{P}_2}^{\mathbb{C}}, {\mathbb{P}_3}^{\mathbb{C}}$
    - Všechny koeficienty budou reálné, ale souřadnice bodů $X \in {\mathbb{P}_2}^{\mathbb{C}}/{\mathbb{P}_3}^{\mathbb{C}}$ jsou komplexní

- **Definice:** Jestliže rovnici kuželosečky/kvadriky nevyhovují reálné souřadnice žádného bodu, budeme ji nazývat **imaginární kuželosečka** (formálně reálná), v opačném případě hovoříme o **bodově reálné kuželosečce/kvadrice**.

- **Definice:** Množina $Q\forall$ bodů $X = \langle \vec{x} \rangle \in {\mathbb{P}_2}^{\mathbb{C}}/{\mathbb{P}_3}^{\mathbb{C}}$, pro něž platí $F(\vec{x}) = 0$, kde $F(\vec{x})$ je kvadratická forma určená maticí C nazýváme **kuželosečka** $(\mathbb{P}_2)$/**kvadrika** $(\mathbb{P}_n)$
  $\vec{x}^T C \vec{x} = F(\vec{x})$,
  v ${\mathbb{P}_2}^{\mathbb{C}}$ je C matice 3×3 symetrická podle diagonály,
  v ${\mathbb{P}_3}^{\mathbb{C}}$ je C matice 4×4 symetrická podle diagonály

- **Definice:** $D = detC$ nazveme diskriminant kuželosečky/kvadriky
  Hodnost matice C je hodnost kuželosečky/kvadriky
  Je-li C regulární je kuželosečka/kvadrika regulární
  Je-li C singulární je kuželosečka/kvadrika singulární

- **Příklad:** Rozhodněte, zda kuželosečka Q je singulární/regulární
  a) Q: ${x_0}^2 + 2x_0x_1 - 4x_0x_2 + 3{x_1}^2 - 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 = 0$

  $$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 9 + 2 + 2 - 12 - 1 - 3 = -3$$

  Regulární matice

  b) Q: ${x_0}^2 + 4x_0x_1 - 2x_0x_2 + 4{x_1}^2 - 4x_1x_2 + {x_2}^2 = 0$

  $$det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

  Singulární matice

POLÁRNÍ VLASTNOSTI KVADRIK

- **Definice:** Body $A = \langle\vec{a}\rangle, B = \langle\vec{b}\rangle \in \mathbb{P}_2{}^{\mathbb{C}}/\mathbb{P}_3{}^{\mathbb{C}}$ jsou **polárně sdružené (konjugované)** vzhledem ke kvadrice Q, jestliže platí $\vec{a}^T C\vec{b} = 0$.

  Je-li A polárně sdružený se 2 body $B \neq D$, je polárně sdružený s každým bodem přímky

  BD $\quad X \in\leftrightarrow BD$

  $\vec{x} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{d} \qquad \vec{a}^T C(\alpha\vec{b} + \beta\vec{d}) \cdot \alpha\underbrace{\vec{a}^T C\vec{b}}_{=0} + \beta\underbrace{\vec{a}^T C\vec{b}}_{=0} = 0$

  Pro každé 3 body určující rovinu to platí také

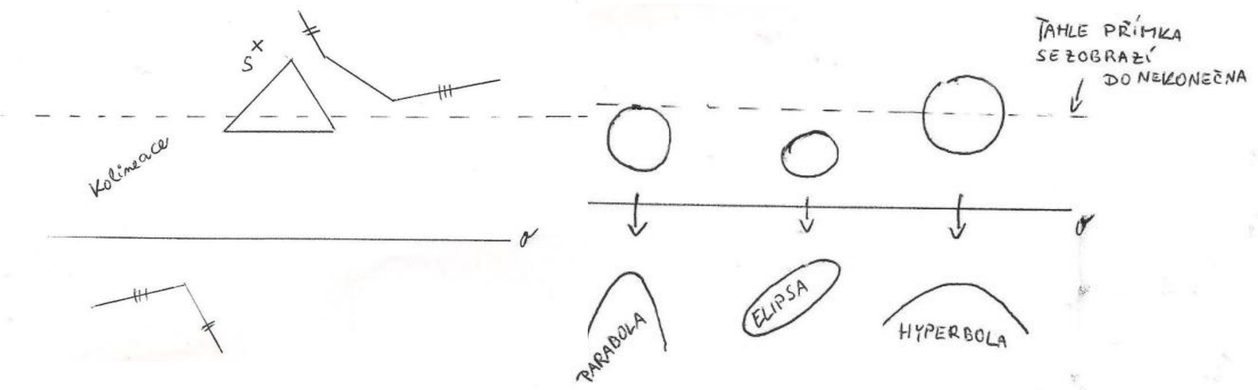
- **Definice:** Bod Y nazveme **singulárním bodem kvadriky** Q, je-li polárně sdružen se všemi body v $\mathbb{P}_2{}^{\mathbb{C}}/\mathbb{P}_3{}^{\mathbb{C}}$

  $\forall X\ \vec{x}^T C\vec{y} = 0 \qquad$ a X leží na kvadrice

  $C\vec{y} = 0 \qquad$ Homogenní soustava

- **Definice:** Body kvadriky, které nejsou singulární jsou **regulární**.

- **Věta:** Buď P singulární bod kvadriky Q. Dále $R \in Q$, potom $PR \subset Q$.



- **Příklad:** Najděte všechny singulární body kuželosečky $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

  V homogenních souřadnicích $x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + x_0{}^2 = 0$

  Homogenní soustava $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} (1 & 1 & 1) \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{matrix}$

  Hodnost matice = 1 (počet řešení je 2)

  Řešením jsou např. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ přímka

  $det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0$

  $x_2 + x_0 + x_1 = 0 \longrightarrow x + y + 1 = 0$

- **Příklad:** Najděte singulární body kuželosečky
  a) $x_0{}^2 + 4x_0x_1 - 2x_0x_2 + 4x_1{}^2 - 4x_1x_2 + x_2{}^2 = 0$

  Rovnice kvadriky $(x_0 \quad x_1 \quad x_2)C\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

  - Je třeba si rovnici kvadriky přepsat do matice (musí být symetrická)

    $$\begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim (1 \quad 2 \quad -1)$$

    $(1 \quad 2 \quad -1)$ Homogenní řešení hodnosti 2 (v projektivním prostoru zadáno dvěma body = přímka)

    Přímka $x_0 + 2x_1 - x_2 = 0 \rightarrow (1,2,-1)^*$ generovaná bodem (1,0,1) a (2,-1,0)

  b) $x_0{}^2 + 2x_0x_1 - 4x_0x_2 + 3x_1{}^2 - 2x_1x_2 + 3x_2{}^2 = 0$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

  Regulární matice, není zde singulární bod.

  Má řešení (1,0,1), není v projektivním prostoru.

- **Příklad:** Ukažte, že body $A = \langle(1,4,0)\rangle$ a $B = \langle(1,4,-3)\rangle$ jsou polárně sdružené vzhledem ke kuželosečce

  $$144x_0{}^2 - 9x_1{}^2 - 16x_2{}^2 = 0$$

  Polárně sdružené vektorový zástupce bodu a C vektorový zástupce bodu b

  $$(\vec{a})^T C(\vec{b}) = 0$$

  $$(1,4,0)\begin{pmatrix} 144 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = (144,-36,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 144 - 144 = 0$$

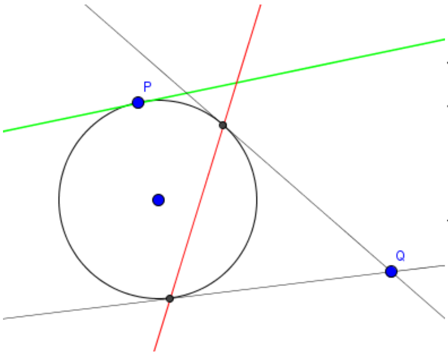
- **Definice:** Nechť P není singulární bod kvadriky Q, pak přímku v $\mathbb{P}_2{}^{\mathbb{C}}$ polárně sdruženou s P nazveme polára a rovinu v $\mathbb{P}_3{}^{\mathbb{C}}$ polárně sdruženou s P nazveme polární rovina vzhledem ke kvadrice Q. od P nazveme pól.
  $P = \langle\vec{p}\rangle$
  $Q \dots C$

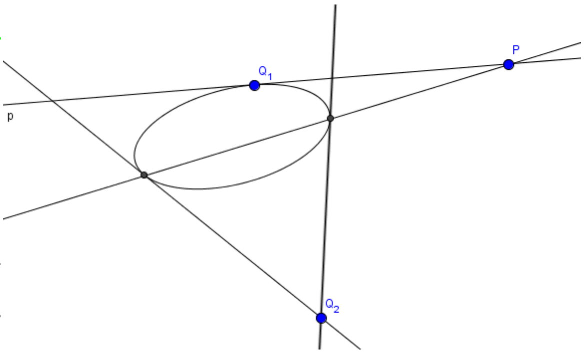
  $$\vec{p}^T C\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \text{...obecná rovnice } \textbf{poláry}$$

  $$\vec{p}^T C\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{...obecná rovnice } \textbf{polární roviny}$$

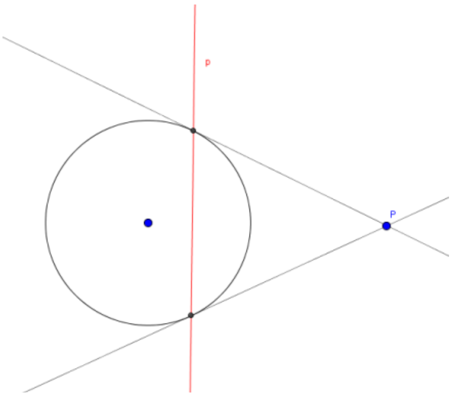
- **Věta (vzájemnost pólu a poláry (polární roviny)):** Nechť Q je kvadrika a P, R jsou dva nesingulární body. Leží-li bod R na poláře (na polární rovině) bodu P, potom i bod R leží na poláře (polární rovině) bodu P.

- Ve chvíli, kdy bod P leží na kvadrice (kuželosečce), pak polára tohoto bodu je tečna kuželosečky v tomto bodě.
- Pokud bod Q neleží na kvadrice (kuželosečce), pak je polára určená tečnami ke kuželosečce k danému bodu.





Polára kružnice



- **Definice:** Nechť T je regulární bod kvadriky Q. Polára (polární rovina) bodu T je tečna (tečná rovina) kvadriky Q s bodem dotyku T.

- **Věta:** Tečné přímky (roviny) vedené ke kvadrice Q z $P \notin Q$ se dotýkají v bodech, v nichž kvadriku Q protíná polára (polární rovina) bodu P.

- **Příklad:** Napište rovnici tečny kuželosečky $5x^2 + 2xy + y^2 - 5 = 0$ v jejím bodě $[1,0]$. Je třeba převést do homogenních souřadnic:

$$[1,0] \to (1,1,0)$$

$$5x^2 + 2xy + y^2 - 5 = 0 \to 5{x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 - 5{x_0}^2 = 0$$

$$(1,1,0)\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(-5,5,1)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -5x_0 + 5x_1 + x_2 = 0$$

- **Příklad:** Napište rovnice tečen (včetně bodů dotyku) ke kuželosečce $-{x_0}^2 + 4x_0x_1 + 2x_0x_2 + {x_1}^2 - 2x_1x_2 = 0$ procházející bodem $B = \langle(1,0,1)\rangle$
  - Zjišťuji poláru (dostanu rovnou homogenní souřadnice přímky, není tam vektor $(x_0 \quad x_1 \quad x_2)$)

    $(1,0,1)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = (0,1,1)^*$ (homogenní souřadnice poláry)
  - Průsečíky této poláry s kvadrikou
    Máme rovnici $x_1 + x_2 = 0$ (z homogenních souřadnic) a hledáme průsečík s kuželosečkou $-{x_0}^2 + 4x_0x_1 + 2x_0x_2 + {x_1}^2 - 2x_1x_2 = 0$

    $x_1 = -x_2$
    $-{x_0}^2 - 4x_0x_2 + 2x_0x_2 + {x_2}^2 + 2{x_2}^2 = 0$
    $-{x_0}^2 - 2x_0x_2 + 3{x_2}^2 = 0$
  - x_0 je buď nula nebo jednička:
    $x_0 = 0$
    $3{x_2}^2 = 0$ není řešením, protože $(0,0,0) \notin {\mathbb{P}_2}^{\mathbb{C}}$

    $x_0 = 1$
    $-1 - 2x_2 + 3{x_2}^2 = 0 \longrightarrow x_2 = 1; x_2 = \frac{-1}{3} \longrightarrow (1,-1,1) a\ (1,\frac{1}{3},\frac{-1}{3})$

    $(1,-1,1)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = (-2,0,2)^*$
    $(3,1,-1)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = (-2,8,2)^*$ toto jsou homogenní souřadnice tečen,

    Tečny $-x_0 + x_2 = 0$ a $-x_0 + 4x_1 + x_2 = 0$

- Aplikujeme změnu projektivní báze vůči níž je kvadrika vyjádřena
  $Q \ldots \vec{x}^T C\vec{x} = 0$
  "Otočení" $Q' \ldots \vec{y}^T(A^T CA)\vec{y} = 0$ A...matice změny báze, $(A^T CA) = C'$

- Každou symetrickou matici C lze transformovat na diagonální matici pomocí vhodných řádkových úprav, které jsou následovány stejnými sloupcovými úpravami.
  Ta nová vhodná báze vůči níž je matice kvadriky diagonální se nazývá polární báze

- **Příklad:** Mějme matici
  $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 5\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}(1+2\ \check{r}\acute{a}dek)\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 6\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}(1+2\ sloupec)\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 6\\ 1 & 6 & 1\end{pmatrix}$
  $(3-1\ \check{r}\acute{a}dek)\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 6\\ 0 & 6 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 6\\ 0 & 6 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 36\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 36\end{pmatrix}$

  ${x_0}^2 - {x_1}^2 + 36{x_2}^2 = 0$ (chceme vždy počet záporných čísel na diagonále menší nebo rovno počtu kladných čísel)

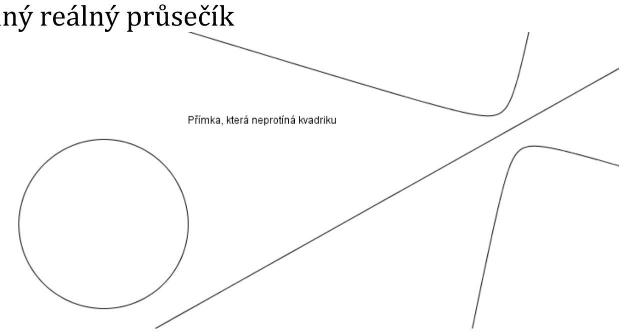
- **Definice:** Buď C' diagonální matice vzniklá matice z C (úpravami viz výše).
  Označme n počet nul na diagonále C', p počet kladných čísel na diagonále C' a q počet záporných čísel na diagonále C'.
  Pak (n, p, q) je **signatura** matice C.

- **Příklad:** Určete signaturu matice kvadriky ${x_0}^2 + 6x_0x_1 + 9{x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \textit{ a signatura je } (1,1,1)$$

- Stejný projektivní typ kvadriky má stejnou signaturu
- Pokud je kvadrika přímka, pak jediné, co jí neprotíná je bod

- **Věta:** Nechť Q je kvadrika s maticí, která má signaturu (n, p, q), pak $p - 1$ je největší číslo takové, že existuje reálný $(p-1)$-rozměrný prostor ${\mathbb{P}_2}^{\mathbb{C}}$ (${\mathbb{P}_3}^{\mathbb{C}}$), který nemá s Q žádný reálný průsečík



$(0,2,1)\;\; 2 - 1 = 1\ (\textit{dimenze})$

- Abychom toto dokázali rozlišit, podíváme se na to afině

AFINNÍ KLASIFIKACE

- Přechod od projektivního prostoru k afinnímu označíme $x_0 = 0$ jako nevlastní (přímku) rovinu.

$$C = \begin{pmatrix} c_{00} & \boxed{\quad\quad} \\ \boxed{\;} & \bar{C} \end{pmatrix}$$

Hlavní signatura C
Vedlejší signatura $\bar{C}$

Afinní klasifikace kuželoseček v $\overline{A_2^{\mathbb{C}}}$ pomocí signatury

Signatura $(0,+,-)$ hlavní	vedlejší	Rovnice v nehomogenních souřadnicích	typ kuželosečky
$(0,3,0)$	$(0,2,0)$	$x^2+y^2=-1$	imaginární elipsa
$(0,2,1)$	$(0,2,0)$	$x^2+y^2=1$	elipsa
$(0,2,1)$	$(0,1,1)$	$x^2-y^2=1$	hyperbola
$(0,2,1)$	$(1,1,0)$	$x^2+2y=0$	parabola
$(1,2,0)$	$(0,2,0)$	$x^2+y^2=0$	imaginární různoběžky
$(1,2,0)$	$(1,1,0)$	$x^2+1=0$	imaginární rovnoběžky
$(1,1,1)$	$(0,1,1)$	$x^2-y^2=0$	reálné různoběžky
$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$x^2-1=0$	reálné rovnoběžky
$(1,1,1)$	$(2,0,0)$	nelze vyjádřit	1 vlastní a 1 nevlastní přímka
$(2,1,0)$	$(1,1,0)$	$x^2=0$	jedna dvojnásobná přímka
$(2,1,0)$	$(2,0,0)$	nelze vyjádřit	jedna dvojnásobná nevlastní přímka

- Kuželosečka jejíž matice má hodnost 3 je regulární kuželosečka.
- Kuželosečka jejíž matice má hodnost 2 je dvojce přímek.
- Kuželosečka jejíž matice má hodnost 1 je tvořena jednou přímkou.

Afinní klasifikace kvadrik v $\overline{A_3^{\mathbb{C}}}$ pomocí signatury

Signatura $(0,+,-)$ hlavní	vedlejší	Rovnice v nehomogenních souřadnicích	typ kvadriky
$(0,4,0)$	$(0,3,0)$	$x^2+y^2+z^2=-1$	imaginární elipsoid
$(0,3,1)$	$(0,3,0)$	$x^2+y^2+z^2=1$	elipsoid
$(0,3,1)$	$(0,2,1)$	$x^2-y^2-z^2=1$	dvojdílný hyperboloid
$(0,3,1)$	$(1,2,0)$	$x^2+y^2+2z=0$	eliptický paraboloid
$(0,2,2)$	$(0,2,1)$	$x^2+y^2-z^2=1$	jednodílný hyperboloid
$(0,2,2)$	$(1,1,1)$	$x^2-y^2+2z=0$	hyperbolický paraboloid
$(1,3,0)$	$(0,3,0)$	$x^2+y^2+z^2=0$	imaginární kuželová plocha
$(1,3,0)$	$(1,2,0)$	$x^2+y^2+1=0$	imaginární eliptická válcová plocha
$(1,2,1)$	$(0,2,1)$	$x^2+y^2-z^2=0$	reálná kuželová plocha
$(1,2,1)$	$(1,2,0)$	$x^2+y^2-1=0$	eliptická válcová plocha
$(1,2,1)$	$(1,1,1)$	$x^2-y^2-1=0$	hyperbolická válcová plocha
$(1,2,1)$	$(2,1,0)$	$x^2+2y=0$	parabolická válcová plocha
$(2,2,0)$	$(1,2,0)$	$x^2+y^2=0$	dvojce komplexně sdružených imag. různoběžných rovin
$(2,2,0)$	$(2,1,0)$	$x^2+1=0$	dvojce komplexně sdružených imag. rovnoběžných rovin
$(2,1,1)$	$(1,1,1)$	$x^2-y^2=0$	dvojce reálných různoběžných rovin
$(2,1,1)$	$(2,1,0)$	$x^2-1=0$	dvojce reálných rovnoběžných rovin
$(2,1,1)$	$(3,0,0)$	nelze vyjádřit	jedna vlastní a jedna nevlastní rovina
$(3,1,0)$	$(2,1,0)$	$x^2=0$	dvojnásobná vlastní rovina
$(3,1,0)$	$(3,0,0)$	nelze vyjádřit	dvojnásobná nevlastní rovina

- Kvadrika jejíž matice má hodnost 4 je regulární kvadrika.
- Kvadrika jejíž matice má hodnost 3 je kuželová nebo válcová plocha.
- Kvadrika jejíž matice má hodnost 2 je tvořena dvojicí rovin.
- Kvadrika jejíž matice má hodnost 1 je tvořena jednou rovinou.

- **Příklad:** Určete typ následující kuželosečky:

a) $4x^2+4xy+y^2+4x-4=0$

$$C=\begin{pmatrix}-4&2&0\\2&4&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ hlavní signatura je (0,2,1)

$$\bar{C}=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$ vedlejší signatura je (1,1,0)

Je to parabola.

b) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$

$$C=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&3&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&2&2\\0&4&0\\2&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&0&2\\0&4&0\\2&0&3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-4&0&2\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$ hlavní signatura je (0,2,1)

$$\bar{C}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&-1\\0&2\frac{2}{3}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}+&0\\0&+\end{pmatrix}$$ vedlejší signatura je (0,2,0)

Je to elipsa.

c) $1+9x^2-y^2-3z^2+6x+2yz=0$

$$C=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\3&9&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&0\\3&9&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&0\\3&9&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$ vedlejší sign. (0,2,1)

$$\begin{pmatrix}1&3&0&0\\3&9&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$ hlavní signatura (1,2,1)

Reálná kuželová plocha.

STŘED, PRŮMĚRY, ASYMPTOTICKÉ SMĚRY KVADRIK

- **Definice:** Bod S nazveme středem kvadriky Q, je-li polárně sdružen se všemi nevlastními body.
  Všechny singulární body jsou středy kvadriky

  Q: $\quad C = \begin{pmatrix} c_{00} & c^T \\ c & \bar{C} \end{pmatrix}$ (chceme, aby byl polárně sdružen se všemi souřadnicí nulovou)?

  Bod $S = \langle (s_0, s_1, s_2, s_3) \rangle$ je středem kvadriky právě tehdy, když jeho souřadnice splňují

$$C \cdot s_0 + \bar{C}(s_1, s_2, s_3)^T = \vec{o}$$

$$(c\bar{C}) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Příklad:** Určete střed kuželosečky $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad S = \langle (s_0, s_1, s_2) \rangle$

$$-2s_0 + s_1 - s_2 = 0$$
$$-3s_0 - s_1 + 2s_2 = 0$$

  - Trik: vektorový součin
    $(-2,1,-1) \times (-3,-1,2) = (s_0, s_1, s_2)$
    $(2 - 1,3 + 4,2 + 3) = (s_0, s_1, s_2)$
    $(1,7,5) = (s_0, s_1, s_2) \longrightarrow [7,5]$

- **Příklad:** Určete střed kuželosečky $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

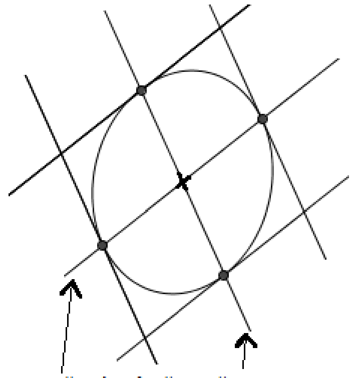
  $(-2,1,-1) \times (-3,-1,1) = (s_0, s_1, s_2)$
  $(1 - 1,3 + 2,2 + 3) = (s_0, s_1, s_2)$
  $(0,5,5) = (s_0, s_1, s_2) \longrightarrow$ nevlastní střed

- **Definice:** Kvadrika, která má alespoň jeden vlastní střed, se nazývá **středová**. V opačném případě je **nestředová**.

  Je-li Q středová kvadrika, pak je Q středově souměrná podle každého svého středu.
  Kvadrika je středová, právě tehdy, když hodnost $\bar{C} = hodnosti\ (c\bar{C})$ (matice rozšířené)
  Speciálně má právě jeden vlastní střed právě tehdy, když $\bar{C} \neq 0$

- **Definice:** Nechť U_∞ je nevlastní bod, jež není bodem kvadriky Q v $\bar{A}^{\mathbb{C}}{}_2$ nazveme poláru bodu U_∞ vůči Q **průměrem kuželosečky**, Q v $\bar{A}^{\mathbb{C}}{}_3$ nazveme polární rovinu bodu U_∞ vůči Q **průměrovou rovinou** kvadriky Q.

- **Definice:** Nevlastní bod (tj. směr) kvadriky se nazývá **asymptotický směr kvadriky**. Vlastní tečna (tečná rovina) s nevlastním bodem dotyku je **asymptota (asymptotická rovina)** . Asymptoty obsahují středy (středy kuželosečky)



Sdružené průměry tečny v bodech

- **Příklad:** Určete asymptotické směry kuželosečky $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$

$2{x_1}^2 - 4x_1x_2 + {x_2}^2 - 2x_1x_0 + 6x_2x_0 - 3{x_0}^2 = 0$

  - Nevlastní bod $x_0 = 0$
    $2{x_1}^2 - 4x_1x_2 + {x_2}^2 = 0$
    - $x_1 = 0$
      ${x_2}^2 = 0 \longrightarrow (0,0,0)$ není v projektivním prostoru $\notin \bar{A}^{\mathbb{C}}{}_2$
    - $x_1 = 1$
      $2 - 4x_2 + {x_2}^2 = 0 \longrightarrow x_2 = 2 \pm \sqrt{2}$
      Asymptotické směry $(1,2+\sqrt{2}); (1,2-\sqrt{2})$

- **Příklad:** Určete asymptoty kuželosečky $x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$

  - Nevlastní bod $x_0 = 0$
    ${x_1}^2 - 2x_1x_2 = 0$
    - $x_1 = 0$
      $x_2 = \mathbb{R} \longrightarrow (0,0,1)$
    - $x_1 = 1$
      $1 - 2x_2 = 0 \longrightarrow x_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow (0,0,\frac{1}{2})$

      $$(0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$
      $$(2 \quad -1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow 2x_0 - x_1 = 0 \longrightarrow \mathit{Tečna}\ x = 2$$
      $$\left(0 \quad 1 \quad \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$
      $$\left(2 \quad \frac{1}{2} \quad -1\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow 2x_0 + \frac{1}{2}x_1 - x_2 = 0 \longrightarrow \mathit{Tečna}\ \frac{1}{2}x - y + 2 = 0$$

- **Příklad:** Najděte tečny kuželosečky $x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$ procházející bodem [2,4]

$$(1 \quad 2 \quad 4)\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$(5 \quad -1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow 5x_0 - x_1 = 0 \longrightarrow \mathit{Tečna}\ x = 5$$

  - $x = 5$ dosadíme do původní rovnice
    $5^2 - 10y + 10 + 4y - 5 = 0 \longrightarrow y = 5 \longrightarrow \mathit{bod\ dotyku}\ [5,5] = (1,5,5)$

  - Rovnice tečny
    $$(1 \quad 5 \quad 5)\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$
    $$(10 \quad 1 \quad -3)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow 10x_0 + x_1 - 3x_2 = 0 \longrightarrow \mathit{Tečna}\ x - 3y + 10 = 0$$

METRICKÉ VLASTNOSTI KUŽELOSEČEK

- Pohybujeme se v $\overline{\mathbb{E}}^{\mathbb{C}}{}_2$
- Budeme uvažovat jen kuželosečky s maticí $C = \begin{pmatrix} c_{00} & c^T \\ c & \bar{C} \end{pmatrix}$, kde $\bar{C}$ je nenulová matice
- **Definice:** Směr určený nenulovým reálným vektorem $\vec{u}$ se nazývá **hlavním směrem kuželosečky** Q, je-li pomárně sdružen s kolmým směrem vzhledem ke Q.

- **Věta:** Ke každé kuželosečce existují alespoň dva na sebe kolmé směry.
  Má-li kuželosečka matici $C = \begin{pmatrix} c_{00} & c^T \\ c & \bar{C} \end{pmatrix}$, pak jsou hlavní směry kuželosečky vlastními vektory matice $\bar{C}$.

  Pokud dostaneme dvě stejná vlastní čísla,má matice nekonečně mnoho vlastních vektorů a za hlavní směry vybereme dva z nich na sebe kolmé

- **Definice:** Je-li U_∞ nevlastní nesingulární bod určený hlavním směrem kuželosečky, pak polára bodu U_∞, pokud je to vlastní přímka, je **osou kuželosečky**. Vlastní průsečík kuželosečky s její osou je vrchol kuželosečky.

  Pokud má matice $\bar{C}$ vlastní číslo 0, je $det\bar{C} = 0$ a jde o kuželosečku s nevlastním středem (parabola). Vlastní vektor k vlastnímu číslu 0 určuje osu - to je ale nevlastní přímka, kterou za kuželosečky nepovažujeme.

  Je-li U_∞ nevlastní bod hlavního směru singulárním bodem kuželosečky, pak definujeme jako osu kuželosečky libovolnou vlastní přímku kolmou na tento směr.

- **Příklad:** Určete hlavní směry, osy a vrcholy kuželosečky
  $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 32 = 0$

  $C = \begin{pmatrix} -32 & 8 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

  - Hlavní směry
    $\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = 4$

    Pro $\lambda_1 = -1$
    $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ vlastní vektor $(-2,1)$

    Pro $\lambda_2 = 4$
    $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ vlastní vektor $(1,2)$
    Hlavní směry $(-2,1)$ a $(1,2)$

  - Osy: $(0,-2,1)$ a $(0,1,2)$ nevlastní body

    $(0 \quad -2 \quad 1)\begin{pmatrix} -32 & 8 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -10x_0 + 2x_1 - x_2 = 0 \longrightarrow 2x - y - 10 = 0$
    $(0 \quad 1 \quad 2)\begin{pmatrix} -32 & 8 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 20x_0 + 4x_1 + 8x_2 = 0 \longrightarrow x + 2y + 5 = 0$
    Osy jsou $2x - y - 10 = 0$ a $x + 2y + 5 = 0$

- Vrcholy: průsečík osy a kvadriky
  $2x - y - 10 = 0 \longrightarrow y = 2x - 10$
  $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 32 = 0$

  $4x(2x - 10) + 3(2x - 10)^2 + 16x + 12(2x - 10) - 32 = 0$
  $8x^2 - 40x + 12x^2 - 120x + 300 + 16x + 24x - 120 - 32 = 0$
  $20x^2 - 120x + 148 = 0$

  $$5x^2 - 30x + 37 = 0 \longrightarrow A = \left[3 + \frac{2\sqrt{10}}{5}, -4 + \frac{\sqrt{10}}{5}\right], B = \left[3 - \frac{2\sqrt{10}}{5}, -4 - \frac{\sqrt{10}}{5}\right]$$

  $x + 2y + 5 = 0 \longrightarrow x = -2y - 5$
  $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 32 = 0$

  $4(-2y - 5)y + 3y^2 + 16(-2y - 5) + 12y - 32 = 0$
  $-8y^2 - 20y + 3y^2 - 32y - 80 + 12y - 32 = 0$
  $-5y^2 - 40y - 112 = 0$

  $$\longrightarrow A = \left[3 - \frac{i8\sqrt{10}}{5}, -4 + i\frac{4\sqrt{10}}{5}\right], B = \left[3 + \frac{i8\sqrt{10}}{5}, -4 - i\frac{4\sqrt{10}}{5}\right]$$

- **Příklad:** Určete tečny kuželosečky $5 + 2x - 4y + 6xy + y^2 = 0$ procházející bodem $A[-2, -3]$.

$$A[-2, -3] = (1, -2, -3)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -8 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow 9x_0 - 8x_1 - 11x_2 = 0 \longrightarrow -8x - 11y + 9 = 0$$

- Abychom zjistili, zda-li se jedná o tečnu či poláru, dosadíme bod A
  $-8 \cdot (-2) - 11 \cdot (-3) + 9 \neq 0 \longrightarrow \textit{nejedná se o tečnu}$

- Musíme najít body průniku
  $-8x - 11y + 9 = 0 \longrightarrow x = \dfrac{9 - 11y}{8}$
  $5 + 2x - 4y + 6xy + y^2 = 0$

  $5 + 2 \cdot \left(\dfrac{9 - 11y}{8}\right) - 4y + 6 \cdot \left(\dfrac{9 - 11y}{8}\right) \cdot y + y^2 = 0 / \cdot 4$
  $20 + 9 - 11y - 16y + 27y - 33y^2 + 4y^2 = 0$
  $-29y^2 + 29 = 0 \longrightarrow y_{1,2} = \pm 1 \longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{9 \mp 11}{8}$

  $$T_1\left[-\frac{1}{4}, 1\right] = \left(1, -\frac{1}{4}, 1\right), T_2\left[\frac{5}{2}, -1\right] = \left(1, \frac{5}{2}, -1\right)$$

- Hledání rovnic tečen

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}2\frac{3}{4} & 4 & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0 \longrightarrow 2\frac{3}{4}x_0+4x_1-\frac{7}{4}x_2=0$$

pronásobeno $\begin{pmatrix}2 & 5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$

$$\begin{pmatrix}19 & -4 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0 \longrightarrow 19x_0-4x_1+9x_2=0$$

- Rovnice v nehomogenních souřadnicích
  $16x-7y+11=0; 4x-9y-19=0$

- Určete, o jakou se jedná kuželosečku
-

$$C=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -15\\ 0 & 3 & 13\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -15\\ 0 & -15 & 13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -15\\ 0 & 0 & 58\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 58\end{pmatrix}\text{hlavní signatura } (0,2,1)$$

$$\bar{C}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-9 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-9 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{ vedlejší signatura } (0,1,1)$$

Jedná se o hyperbolu

- Najděte asymptoty
  - Nevlastní body hyperboly
    $x_0=0 \longrightarrow 5{x_0}^2+2x_1x_0-4x_0x_2+6x_1x_2+{x_2}^2=0$
    $6x_1x_2+{x_2}^2=0$
    a) $x_1=0$ ${x_2}^2=0 \longrightarrow (0,0,0)$ bod, který není v projektivním prostoru $\not\subset \bar{A}_2^{\mathbb{C}}$
    b) $x_1=1$ $6x_2+{x_2}^2=0 \longrightarrow (0,1,0); (0,1,-6)$ nevl. body z projekt. prostoru

  - Asymptotické směry $(1,0)$ a $(1,-6)$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0 \longrightarrow x_0+3x_2=0$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}13 & -18 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0 \longrightarrow 13x_0-18x_1-3x_2=0$$

  - Asymptoty
    $3y+1=0$ $18x+3y-13=0$

- Najděte střed
  - Průnik

    $18x - 1 - 13 = 0 \longrightarrow x = \frac{7}{9}; y = -\frac{1}{3}$
  - Vektorový součin druhých dvou řádku matice kuželosečky

    Homogenní souřadnice středu $(1,0,3) \times (-2,3,1) = (-9,-7,3) = \left[\frac{7}{9}, -\frac{1}{3}\right]$

- **Příklad:** Mějme matici A, určete typ, osy a vrcholy.

  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 5 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$

  $\sim \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$ hlavní signatura (0,2,1), vedlejší signatura (0,2,0) $\longrightarrow$ Elipsa

- Hledat vlastní vektory $\bar{C}$ = hlavní směry
  - Polára těch hlavních směrů je osa

    $det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

    $\lambda_1 = 6$ a $\lambda_2 = 1$

    Pro $\lambda_1 = 6$

    $\begin{pmatrix} 5-6 & 2 \\ 2 & 2-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

    $-u_1 + 2u_2 = 0$
    $2u_1 - 4u_2 = 0$

    $u = (2,1)$

    Pro $\lambda_2 = 1$

    $\begin{pmatrix} 5-1 & 2 \\ 2 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

    $4u_1 + 2u_2 = 0$
    $2u_1 + u_2 = 0$

    $u = (1,-2)$

    Hlavní směry $(2,1)$ a $(1,-2)$

- Osy: $(0,2,1)$ a $(0,1,-2) \longrightarrow$ nevlastní body

  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

  $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow x_0 + 12x_1 + 6x_2 = 0$

  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

  $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow -2x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$
  - Osy jsou

    $12x + 6y + 1 = 0$
    $x - 2y - 2 = 0$

- Vrcholy = průsečíky osy a kvadriky $5{x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 2x_0x_2 + 4x_1x_2 = 0$
    - $12x + 6y + 1 = 0 \longrightarrow y = -2x - \frac{1}{6} \longrightarrow 2y^2 + 4xy + 5x + 2y = 0$
      $2\left(-2x - \frac{1}{6}\right)^2 + 4x\left(-2x - \frac{1}{6}\right) + 5x + 2\left(-2x - \frac{1}{6}\right) = 0$
      $2\left(4x^2 + \frac{4}{6}x + \frac{1}{36}\right) - 8x^2 - \frac{4}{6}x + 5x - 4x - \frac{2}{6} = 0$
      $\frac{5}{3}x - \frac{11}{18} = 0 \longrightarrow \left[\frac{11}{30}, -\frac{9}{10}\right]$
    - $x - 2y - 2 = 0 \longrightarrow x = 2y + 2 \longrightarrow 2y^2 + 4xy + 5x + 2y = 0$
      $2y^2 + 4(2y + 2)y + 5(2y + 2) + 2y = 0$
      $2y^2 + 8y^2 + 8y + 10y + 10 + 2y = 0$
      $10y^2 + 20y + 10 = 0$
      $y^2 + 2y + 1 = 0 \longrightarrow [0, -1]$

PARAMETRIZACE KŘIVEK V $\mathbb{R}^2$

- Přímka

  $\boldsymbol{x = a_1 + u_1 t}$

  $\boldsymbol{y = a_2 + u_2 t}; \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}]$ $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2})$

  Lineární funkce

  $\boldsymbol{y = px + q}$