Meziřádky mezi kuželosečkami - doplňkový materiál k přednášce Geometrie

Michal Zamboj

January 4, 2018

Pozn. Najdete-li chybu, neváhejte mi napsat, může to ušetřit tápání Vašich kolegů.
Pozn. v dokumentu jde hlavně o pochopení a odůvodnění manipulace s kuželosečkou s cílem její klasifikace, pro podrobné definice viz slidy z přednášky, nebo materiál od M. Holíkové.

1 Obecně

1.1 Projektivní vlastnosti

Kuželosečka a její matice - projektivní klasifikace: regulární/ singulární, reálná/ imaginární

Rovnice kuželosečky c v $\mathbb{CP}^3$ se dá zapsat ako množina bodů X se zástupcem $x^T = (x_1, x_2, x_0)$, pro které platí:

$$x^T \mathbf{A} x = (x_1, x_2, x_0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2 = 0$$

označme dále $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} b & d \\ c & e \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Matici $\mathbf{A}$ můžeme převádět současnými řádkovými a sloupcovými úpravami na diagonální matici $\mathbf{A}'$ vzhledem k polární bázi kuželosečky (viz příklady). Tahle transformace nemění projektivní vlastnosti kuželosečky (mění však metrické vlastnosti!).

$$x^T \mathbf{A}' x = (x_1, x_2, x_0) \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = a'x_1^2 + c'x_2^2 + f'x_0^2 = 0.$$

Je-li hodnost matice $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') = 3$, anebo $\det(\mathbf{A}), \det(\mathbf{A}') \neq 0$, tak je kuželosečka **regulární**, jinak je **singulární**.
Ze **signatury** $(nuly, +, -)$ matice $\mathbf{A}'$, dokážeme dále určit jestli je kuželosečka **reálná**, nebo **imaginární**.

hodnost	signatura	$\mathbb{R} \vee \mathbb{I}$	rovnice	projektivní typ
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(0, 3, 0)$	$\emptyset$ $\mathbb{R}$ bodů	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$	imaginární regulární KS
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(0, 2, 1)$	$\forall$ $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$	reálná regulární KS (el., par., hyp.)
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(1, 2, 0)$	$\emptyset$ $\mathbb{R}$ bodů	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2 imaginární různoběžky
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(1, 1, 1)$	$\forall$ $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2 reálné různoběžky
$h(\mathbf{A}) = 1$	$(2, 1, 0)$	$\forall$ $\mathbb{R}$ body	$x_1^2 = 0$	reálná 2-násobná přímka

Polární vlastnosti kuželosečky - singulární/ regulární body, pól, polára, tečna

body P, Q **polárně konjugované** vzhledem ke kuželosečce c:

$$p^T \mathbf{A} q = (p_1, p_2, p_0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_0 \end{pmatrix} = 0$$

P je **singulární**, je-li polárně konjugován s každým bodem prostoru:

$$p^T\mathbf{A} = (p_1, p_2, p_0)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Není-li bod singulární, potom je **regulární**.

Množina bodů $x^T = (x_1, x_2, x_0)$ polárne konjugovaných s regulárním (!) bodem P (**pólem**) vzhledem ke kuželosečce c je **polára**:

$$p^T\mathbf{A}x = (p_1, p_2, p_0)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = ap_1x_1 + bp_2x_1 + dp_0x_1 + bp_1x_2 + cp_2x_2 + ep_0x_2 + dp_1x_0 + ep_2x_0 + fp_0x_0$$

$$= x_1(ap_1 + bp_2 + dp_0) + x_2(bp_1 + cp_2 + ep_0) + x_0(dp_1 + ep_2 + fp_0) = 0$$

T.j. souřadnice poláry jsou $(ap_1 + bp_2 + dp_0;\ bp_1 + cp_2 + ep_0;\ dp_1 + ep_2 + fp_0)$.

Polára regulárního bodu na kuželosečce se nazývá **tečna** a její pól je **bod dotyku**.

Jednoduché tvrzení na ověření: Jestli má kuželosečka singulární bod, potom ním prochází polára libovolného regulárního bodu.

1.2 Afinní vlastnosti

Afinní klasifikace - počet asymptotických směrů, středová/nestředová

Polára nevlastního bodu U_∞ se zástupcem $(u_1, u_2, 0)$ neležícího (!) na kuželosečce je její **průměr**:

$$u_\infty^T\mathbf{A}x = (u_1, u_2, 0)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = x_1(au_1 + bu_2) + x_2(bu_1 + cu_2) + x_0(du_1 + eu_2) = 0$$

Střed nalezneme jako průsečík průměrů, které jsou poláry dvou nevlastních bodů $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$.

Bod $(1, 0, 0)$ nám dáva rovnici průměru: $ax_1 + bx_2 + dx_0 = 0$

Bod $(0, 1, 0)$ nám dáva rovnici průměru: $bx_1 + cx_2 + ex_0 = 0$

Souřadnice středu tedy jsou $(a, b, d) \times (b, c, e) = (\det \mathbf{A}_1, -\det \mathbf{A}_2, \det \mathbf{A}_3)$.

Je-li determinant $\det(\mathbf{A}_3) = 0$, tak střed je nevlastní.

Má-li kuželosečka singulární bod, potom je tento bod jejím středem. Má-li kuželosečka vlastní střed, potom ji nazýváme **středová, centrická**, jinak je **nestředová**.

Má-li kuželosečka reálný nevlastní bod = **asymptotický směr** A_∞ se zástupcem $(a_1, a_2, 0)$, pak pro něj (po dosazení do rovnice kuželosečky) platí:

$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0$

Protože $(0, 0, 0)$ není bodem, tak alespoň jedna souřadnice $x_1 \vee x_2 \neq 0$ a můžeme ní obě strany rovnice zkrátit. BÚNO $x_2 \neq 0$ dostáváme pak kvadratickou rovnici $a\frac{x_1}{x_2}^2 + 2b\frac{x_1}{x_2} + c = 0$, která má dva reálné kořeny pro $b^2 - ac > 0$, jeden dvojnásobný kořen pro $b^2 - ac = 0$ a žádný reálný kořen pro $b^2 - ac < 0$.

$b^2 - ac$ lze taky dostat přímo z matice jako $-\det(\mathbf{A}_3)$ resp. stačí upravit matici $\mathbf{A}_3$ na diagonální tvar a získáme tzv. **vedlejší signaturu**.

Polára asymptotického směru kuželosečky se nazývá **asymptota** - tečna v nekonečnu.

hodnost	signatura	vedlejší signatura	rovnice	projektivní typ
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(0,3,0)$	$(0,2,0)$	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$	imaginární elipsa
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(0,2,1)$	$(0,2,0)$	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$	elipsa
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(0,2,1)$	$(0,1,1)$	$x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0$	hyperbola
$h(\mathbf{A}) = 3$	$(0,2,1)$	$(1,1,0)$	$x_1^2 + 2x_2 = 0$	parabola
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(1,2,0)$	$(0,2,0)$	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	imaginární různoběžky
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(1,2,0)$	$(1,1,0)$	$x_1^2 + x_0^2 = 0$	imaginární rovnoběžky
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(1,1,1)$	$(0,1,1)$	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	reálné různoběžky
$h(\mathbf{A}) = 2$	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$x_1^2 - x_0^2 = 0$	reálné rovnoběžky
$h(\mathbf{A}) = 2$	$\cancel{(3,0,0)}$	$\cancel{(2,0,0)}$	$x_1 x_0 = 0$	1 vlastní a 1 nevlastní přímka (není diag.)
$h(\mathbf{A}) = 1$	$(2,1,0)$	$(1,1,0)$	$x_1^2 = 0$	jedna dvojnásobná přímka
$h(\mathbf{A}) = 1$	$(2,1,0)$	$(2,0,0)$	$x_0^2 = 0$	jedna dvojnásobná nevlastní přímka

1.3 Metrické vlastnosti

Metrická klasifikace - hlavní směry, osy, vrcholy, ohniska a řídící přímka

Dva vzájemně kolmé polárně sdružené směry $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, 0), \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, 0)$ (nevlastní body) nazýváme **hlavními směry**.

Platí tedy:

$$\overrightarrow{u}^T \mathbf{A} \overrightarrow{v} = (u_1, u_2, 0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$ a současně skalární součin $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}^T \mathbf{E} \overrightarrow{v} = 0$ a taky libovolný λ násobek.

Proto:

$$\overrightarrow{u}^T \lambda \mathbf{E} \overrightarrow{v} = (u_1, u_2, 0) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \overrightarrow{u}^T \mathbf{A} \overrightarrow{v} = (u_1, u_2, 0) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{u}^T (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \overrightarrow{v} = 0$ a hledáme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Taky je odsuď vidět, že stačí hledat vlastní vektory matice $\mathbf{A}_3$.

Polára hlavního směru je **osa kuželosečky**.

Průsečík kuželosečky s osou se nazývá **vrchol kuželosečky**.

Ohniska F_1, F_2 dopočítáme ze vztahů pro elipsu, hyperbolu, kde excentricita je $e = |FS|$, velikost hlavní (delší) poloosy je $a = |AS|$ a velikost vedlejší poloosy je $b = |BS|$, kde S je střed kuželosečky. Ohniska zároveň leží na hlavní ose kuželosečky.

- elipsa: $e^2 = a^2 - b^2$
- hyperbola: $e^2 = a^2 + b^2$

Parabola má jedno ohnisko F ležící na ose, a řídící přímku d, kolmou na osu, pro libovolný bod X paraboly platí $|dX| = |FX|$.

Další možnost je využít toho, že tečna je osou průvodičů paraboly $\overline{FX}$ a přímky procházející bodem X rovnoběžné s osou.

Resp. ohniska a řídící útvary lze řešit transformací - posunutí středu (u paraboly vrcholu) do počátku a otočení do osového tvaru (resp. obráceně), t.j. zbavíme se smíšeného členu xy substitucí (otočení):

$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$
$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$
vyjádříme x, y:
$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$
$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$
dosadíme do rovnice kuželosečky, ve které se vynuluje člen u $x'y'$ a zjistíme velikost α, po dosazení zpátky dostáváme požadovaný tvar po substituci.

U paraboly z vrcholové rovnice $y = 2px^2$ platí, že $|VF| = |Vd| = \frac{p}{2}$.

2 Příklady

1) Klasifikujte kuželosečku $c : x^2 - 2xy + y^2 - 14x - 10y + 25 = 0$ v $\mathbb{R}^2$

Projektivní klasifikace:

Přepíšeme do homegenních souřadnic: $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 14x_1x_0 - 10x_2x_0 + 25x_0^2 = 0$.

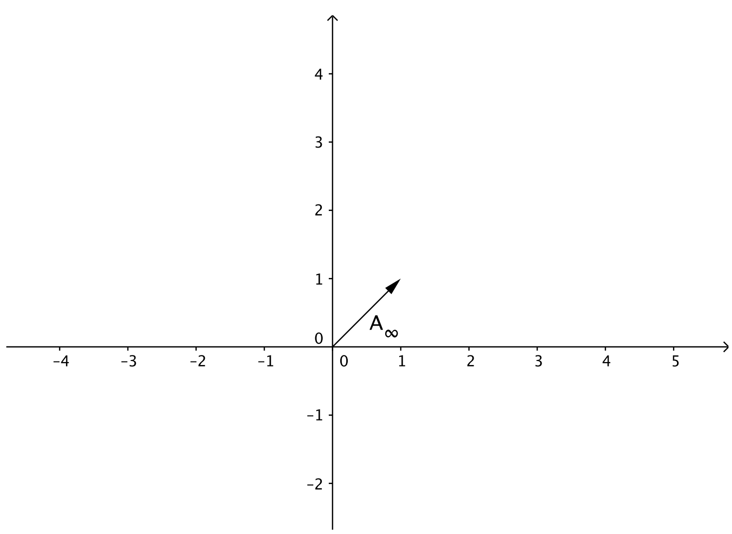
Matice kuželosečky: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & -5 \\ -7 & -5 & 25 \end{pmatrix}$

$\det \mathbf{A} = -144 \Rightarrow$ **regulární**.

Jestli je reálná nebo imaginární zjistíme z dalších výsledků. Druhá možnost je transformovat vzhledem ke polární bázi a zjistit signaturu = (0,2,1), t.j. je **reálná**.

Afinní klasifikace:

Asymptotické směry: $-\det \mathbf{A}_3 = 0$ a kuželosečka má **jeden dvojnásobný asymptotický směr**. $\frac{x_1}{x_2} = (\frac{-2b}{2a}) = \frac{2}{2} = 1$, a $x_1 = 1, x_2 = 1$, t.j. $A_\infty = \langle(1, 1, 0)\rangle$.



Už teď je vidět, že kuželosečkou je **parabola** a **nemá vlastní střed - nestředová**, resp. střed je A_∞. Stejný výsledek dostáváme použitím vzorečku pro střed $S = \langle(\det \mathbf{A}_1, -\det \mathbf{A}_2, \det \mathbf{A}_3)\rangle = \langle(12, 12, 0)\rangle$.

Asymptota paraboly je nevlastní přímka, resp. spočítat jako poláru asymptotického směru:

$$A_\infty^T \mathbf{A} = (1,1,0)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & -5 \\ -7 & -5 & 25 \end{pmatrix} = (0,0,-12) = (0,0,1) \text{ t.j. } x_0 = 0.$$

Metrická klasifikace:

Hlavní směry jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}_3$:

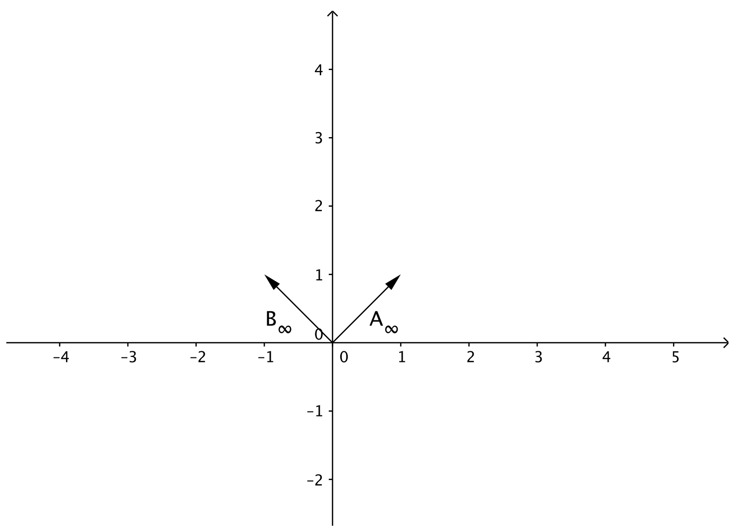
$$\det \mathbf{A}_3 = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-2) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

Pro $\lambda_1 = 0$ dostáváme:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, vlastní vektor je tedy $(1,1)$ t.j. směr $\langle(1,1,0)\rangle = A_\infty$

Pro $\lambda_2 = 2$ dostáváme:

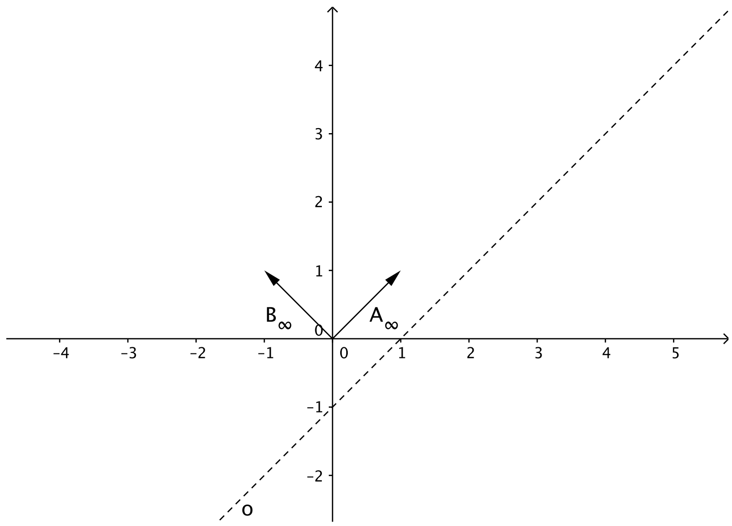
$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, vlastní vektor je tedy $(-1,1)$ t.j. směr $\langle(-1,1,0)\rangle = B_\infty$



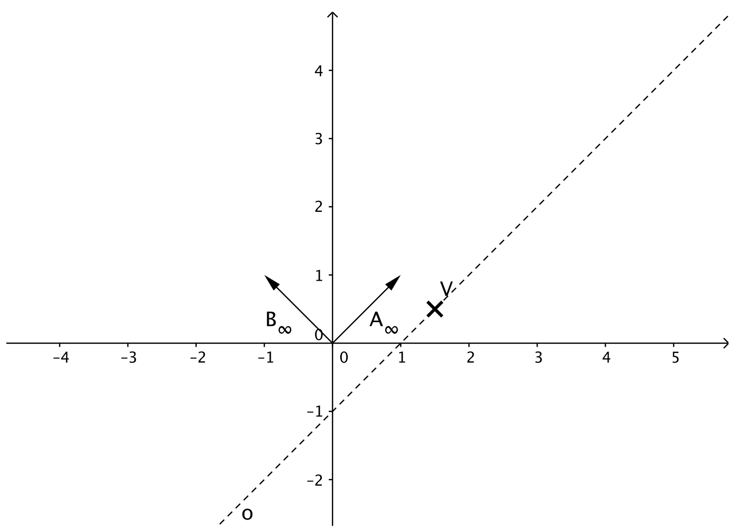
Osa určená směrem A_∞ je právě nevlastní asymptota viz výpočet výš.

Osa určená směrem B_∞ je:

$$B_\infty^T \mathbf{A} = (-1,1,0)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & -5 \\ -7 & -5 & 25 \end{pmatrix} = (-2,2,2) = (-1,1,1) \text{ t.j. } o: -x_1 + x_2 + x_0 = 0.$$



Průsečík osy a kuželosečky je:
Pro $x_0 = 1 \to x_2 = x_1 - 1$ a dosadíme do $c : x_1^2 - 2x_1(x_1 - 1) + (x_1 - 1)^2 - 14x_1 - 10(x_1 - 1) + 25 = -24x_1 + 36 = 0 \to$ $x_1 = \frac{3}{2} \to V = \langle(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)\rangle$

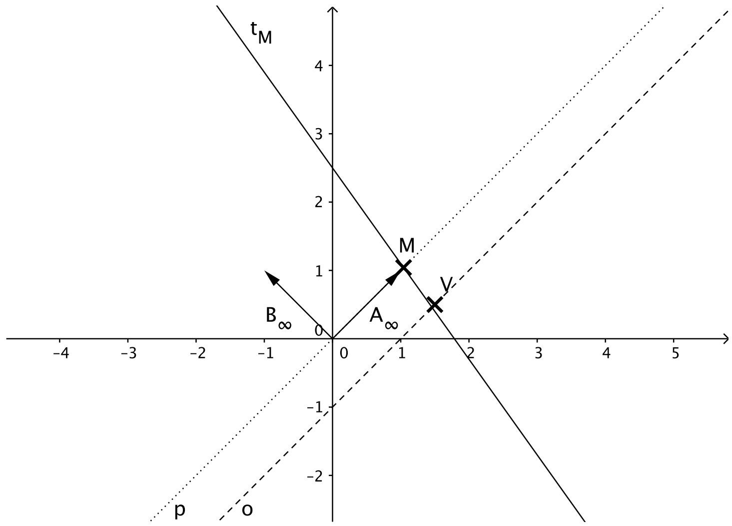


Chceme-li dopočítat ohnisko F a řídící přímku, tak využijeme např. přímku - průvodič $p : x_1 - x_2 = 0$, která protne kuželosečku c v bodě M:

$x_1^2 - 2x_1^2 + x_1^2 - 14x_1 - 10x_1 + 25 = -24x_1 + 25 = 0 \to x_1 = \frac{25}{24}, M = \langle(\frac{25}{24}, \frac{25}{24}, 1)\rangle$

spočítáme tečnu v bodě M:

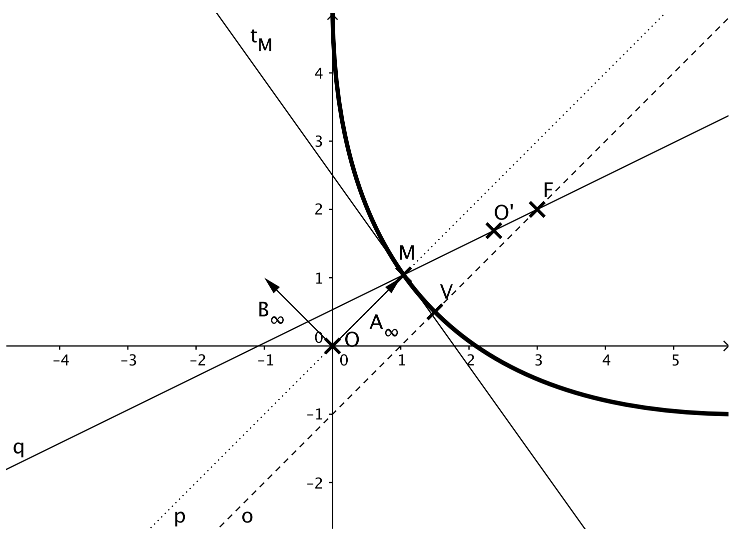
$$(\tfrac{25}{24}, \tfrac{25}{24}, 1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & -5 \\ -7 & -5 & 25 \end{pmatrix} = (-7, -5, \tfrac{25}{2}) = (-14, -10, 25)$$



Pro jednoduchost převedeme tečnu t_M a průvodič p do $\mathbb{R}^2$. Dopočítáme druhý průvodič jako přímku osově souměrnou s přímkou p o ose t_M, stačí nám k tomu obraz $O' = [x', y']$ bodu $O = [0, 0]$:

$$x' = 0 - \frac{-28}{296}25 = \frac{175}{74};\ y' = 0 - \frac{-20}{296}25 = \frac{125}{74}$$

Bodem M a bodem O' vedeme druhý průvodič $(\frac{25}{24}, \frac{25}{24}, 1) \times (\frac{175}{74}, \frac{125}{74}, 1) = (-23, 47, -25) \to q : -23x + 47y - 25 = 0$. Průsečík $o \cap q = [3, 2] = F$.



---

2) Klasifikujte kuželosečku $c : 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y - 2 = 0$ v $\mathbb{R}^2$ a určete poláru bodu $[0, 0]$ vzhledem k c.

Projektivní klasifikace:

Přepíšeme do homogenních souřadnic: $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_0 + x_2x_0 - 2x_0^2 = 0$

Matice kuželosečky: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$

$\det \mathbf{A} = 0 \Rightarrow$ **singulární**. Transformujeme kuželosečku vzhledem k polární bázi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

signatura je $(1, 1, 1)$, t.j. kuželosečka je **reálná**.

Singulární bod kuželosečky:

$$(p_1, p_2, p_0) \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 2, 0)$$

Afinní klasifikace:

Její vedlejší signatura je $(1, 1, 0)$ a jde tedy o **dvě reálné rovnoběžky**. Vlastní střed kuželosečka nemá, je tedy **nestředová**.

Asymptotický směr kuželosečky je dvojnásobný:

$4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = (2x_1 - x_2)^2 = 0 \rightarrow A_\infty = \langle (1, 2, 0) \rangle$

Metrická klasifikace:

Hlavní směry:

$$\det \mathbf{A}_3 = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 5) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5.$$

Pro $\lambda_1 = 0$ dostáváme:

$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, vlastní vektor je tedy $(1, 2)$ t.j. směr $\langle (1, 2, 0) \rangle = A_\infty$

Pro $\lambda_2 = 5$ dostáváme:

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, vlastní vektor je tedy $(-2, 1)$ t.j. směr $\langle (-2, 1, 0) \rangle = B_\infty$

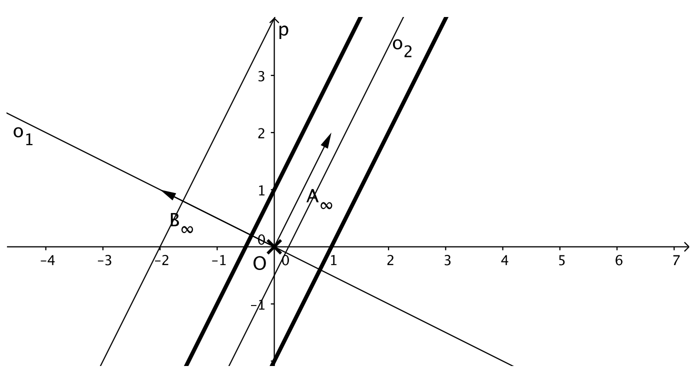
Protože A_∞ je nevlastním singulárním bodem kuželosečky, tak osou vzhledem k A_∞ je libovolná přímka kolmá na tento směr, např. $o_1 : x_1 + 2x_2 = 0$.

Osa určená směrem $(-2, 1, 0)$ je:

$$B_\infty^T \mathbf{A} = (-2, 1, 0) \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} = (-4, 2, 1) \rightarrow o_2 : -4x_1 + 2x_2 + 1 = 0$$

Polára p bodu $O = \langle (0, 0, 1) \rangle$ je:

$$(0, 0, 1) \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} = (-2, 1, -4) \rightarrow -2x_1 + x_2 - 4x_0 = 0 \text{ t.j. } p : -2x + y - 4 = 0.$$



3) V $\mathbb{R}^2$ je dána kuželosečka $c : 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$ a bod $P = [1, 3]$

a) Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic.

b) Klasifikujte kuželosečku c, t.j. určete:

- projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
- afinní vlastnosti - typ kuželosečky, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
- metrické vlastnosti - hlavní a vedlejší směry, osy, vrcholy, ohniska, řídící přímku paraboly (v závislosti na typu KS)

c) Napište rovnice poláry p bodu P a tečen t_1, t_2 z bodu P ke kuželosečce c.

d) Najděte sdružené průměry kuželosečky, prochází-li jeden z nich bodem Q=[1,0].

---

a) $c : 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1x_0 + 4x_2x_0 - 4x_0^2 = 0$

b) – **projektivně:**

Matice kuželosečky: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$\det \mathbf{A} = -64 \neq 0 \Rightarrow$ **regulární** $\Rightarrow$ **nemá singulární body**. Jestli je reálná, zjistíme v dalších krocích.

Přes signaturu: Transformujeme kuželosečku vzhledem k polární bázi:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$

signatura je $(0, 2, 1)$, t.j. kuželosečka je **reálná, regulární**.

– **afinně:**

Asymptotické směry kuželosečky: Hledáme bod $A_\infty = (a_1, a_2, 0)$. Po dosazení do rovnice kuželosečky dostáváme:

$3a_1^2 - 2a_1a_2 + 3a_2^2 = 0$

pro volbu $a_2 = 0$ je taky $a_1 = 0$, což by nebyl žádný bod $(0, 0, 0)$.

pro volbu $a_2 = 1$ máme kvadratickou rovnici $3a_1^2 - 2a_1 + 3 = 0$, jejíž diskriminant $D = -32 = -4 \det \mathbf{A}_3$ je záporný.

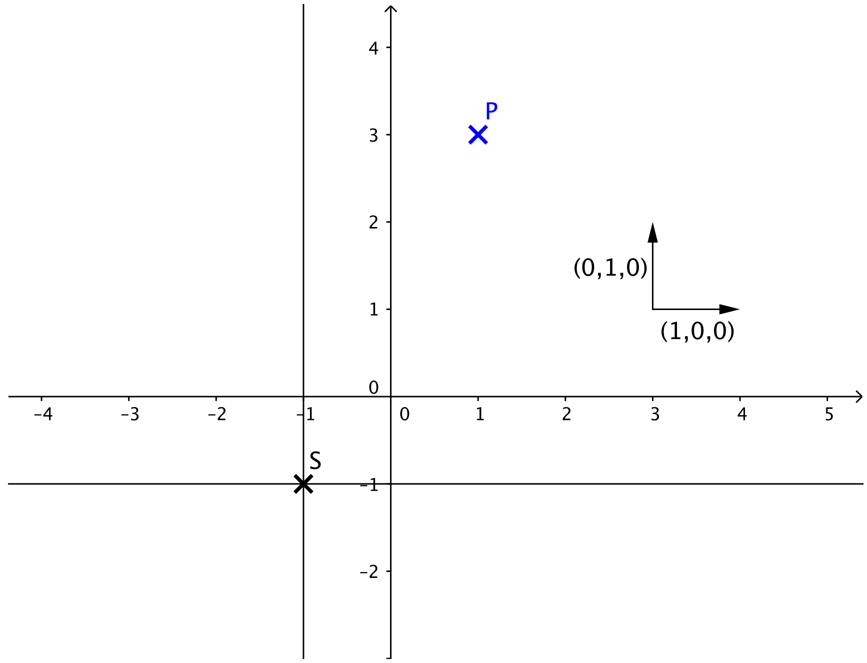
Kuželosečka **nemá žádné reálné nevlastní body = asymptotické směry, ani asymptoty**. Z toho a z předešlého taky plyne, že je to **elipsa** (pořád nevíme jestli reálná nebo imaginární, pokuď jsme nevyřešili hlavní signaturu) a tedy **středová** kuželosečka.

Střed: hledáme poláry bodů $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$. Můžeme dohledat pomoci matice obě najednou (do řádků 1. matice zadáme oba póly $\rightarrow$ řádky poslední matice jsou souřadnice polár):

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, protože střed je společný průsečík, který počítáme vektorovým součinem, stačí nalézt subdeterminanty $S = (\det \mathbf{A}_1, -\det \mathbf{A}_2, \det \mathbf{A}_3) = (-8, -8, 8) = (-1, -1, 1)$.

Přes signaturu: Matice $\mathbf{A}_3$ je:

$\mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ a tedy vedlejší signatura je $(0, 2, 0)$ a jde o **elipsu**, ze znalosti elipsy je kuželosečka **středová** a **nemá žádné asymptotické směry a asymptoty**.



– **metricky:**

Hlavní směry: hledáme vlastní čísla matice $\mathbf{A_3}$

$\mathbf{A_3} = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4)$ a tedy $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$.

Pro $\lambda_1 = 2$ máme

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ vlastní vektor = hlavní směr $A_\infty = (1,1,0)$

Pro $\lambda_1 = 4$ máme

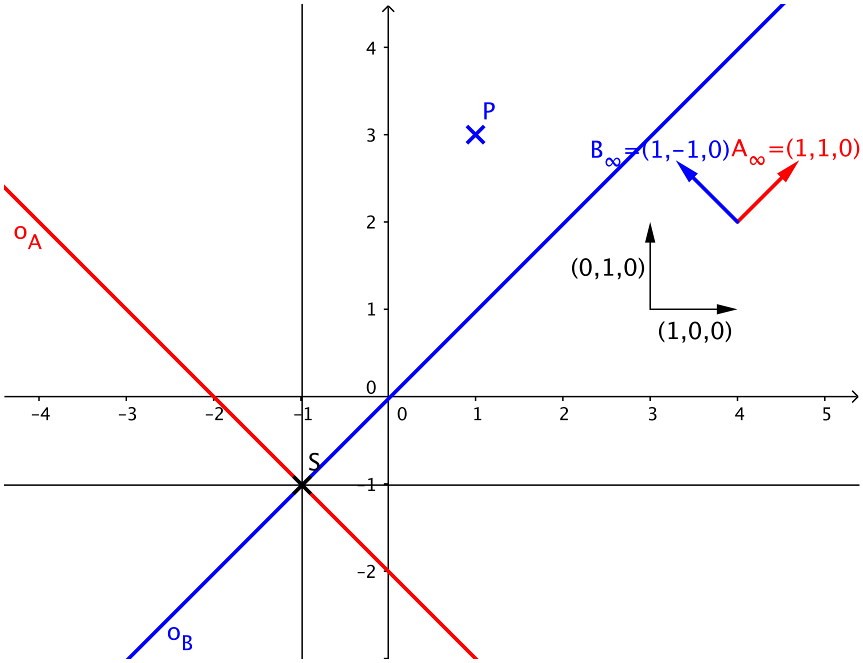
$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ vlastní vektor = hlavní směr $B_\infty = (1,-1,0)$

Osy: poláry hlavních směrů najednou

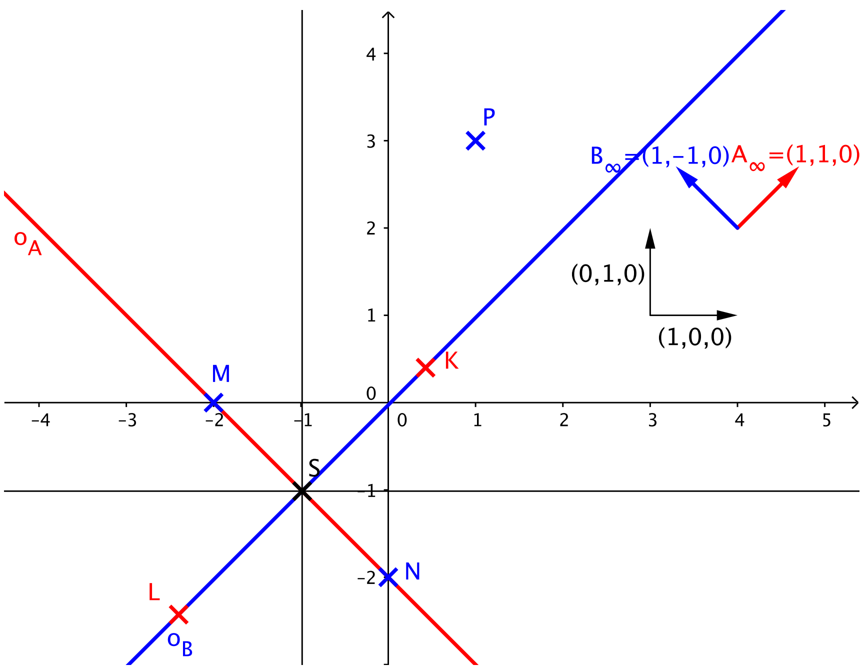
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

osa $o_A : x_1 + x_2 + 2x_0 = 0$ v $\mathbb{R}^2 : x + y + 2 = 0$

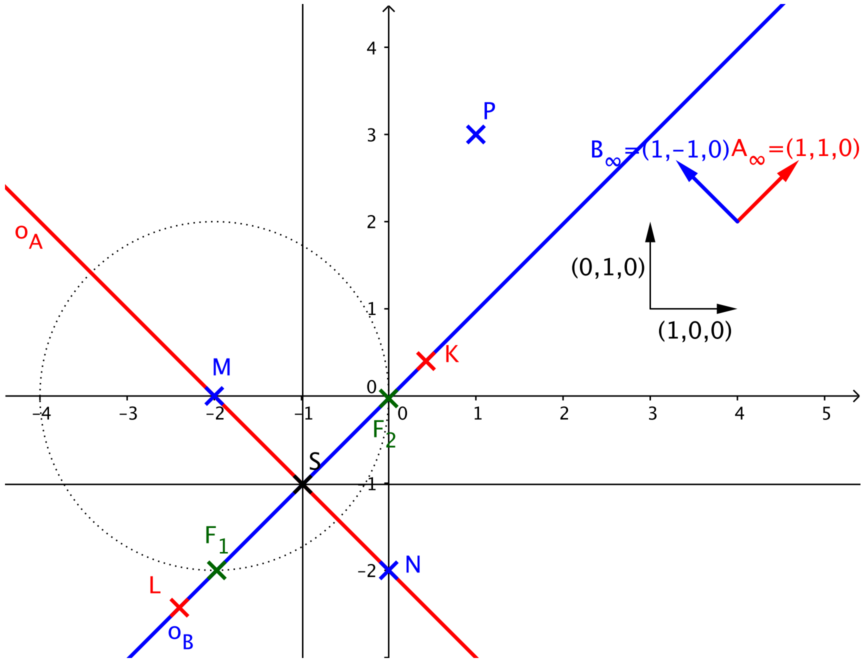
osa $o_B : x_1 - x_2 = 0$ v $\mathbb{R}^2 : x - y = 0$.



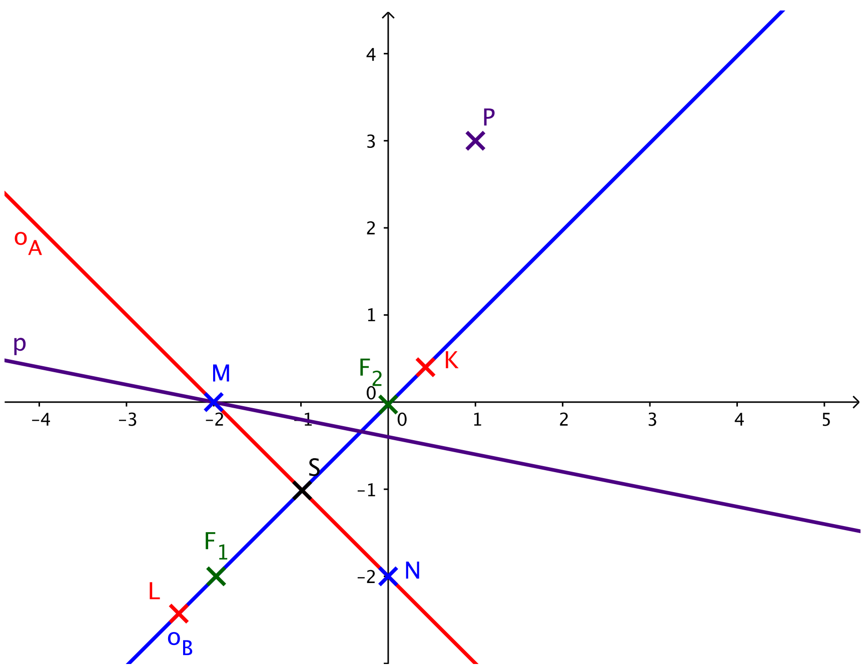
Vrcholy:
$o_A \cap c$: všechny body kuželosečky jsou vlastní, takže řešíme soustavu
$x + y + 2 = 0$
$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$, dostáváme body $M = [-2, 0], N = [0, -2]$
$o_B \cap c$: všechny body kuželosečky jsou vlastní, takže řešíme soustavu
$x - y = 0$
$3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4 = 0$, dostáváme body $K = [\frac{-2+\sqrt{5}}{2}, \frac{-2+\sqrt{5}}{2}], L = [\frac{-2-\sqrt{5}}{2}, \frac{-2+\sqrt{5}}{2}]$ $|KL| = 4 > |MN| = \sqrt{8}$
takže o_B je hlavní osa s délkou poloosy $a = 2$, o_A vedlejší osa s délkou poloosy $b = \sqrt{2}$.



Ohniska: je např. hned vidět že kružnice se středem v bodě M a poloměrem $a = 2$ protne hlavní osu v bodě $F_2 = [0, 0]$ a druhé ohnisko je tedy souměrné podle středu $F_1 = [-2, -2]$. Případně excentricitu lze spočítat z $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}$.



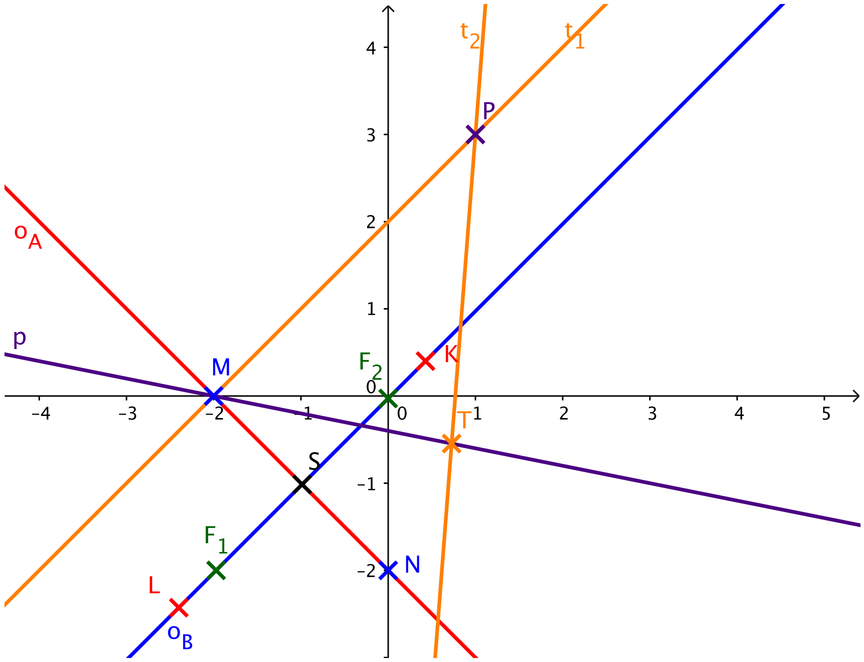
c) souřadnice poláry bodu $P = (1,3,1)$: $(1,3,1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = (1,5,2)$ rovnice je tedy: $p : x_1 + 5x_1 + 2x_0 = 0$, nebo v $\mathbb{R}^2 : x + 5y + 2 = 0$



Body dotyku jsou průsečíky poláry s kuželosečkou. Budou to vlastní body, protože máme elipsu. Lze si všimnout, že bod $M = (-2,0,1)$ již máme. Bod P neleží na elipse, takže zbýva nalézt druhý vlastní reálný průsečík:

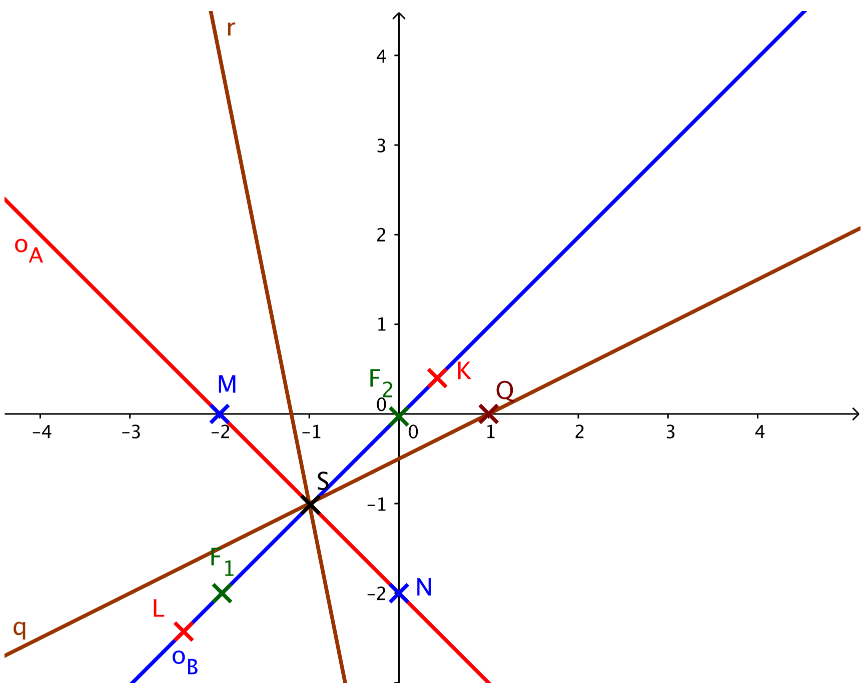
$p \cap c$:
$x + 5y + 2 = 0$
$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$, dostáváme body $M = [-2,0], T = [\frac{8}{11}, -\frac{6}{11}]$.

Tečny najdeme jako spojnice $t_1 = P \times M \sim (1,-1,2)$ s rovnicí v $\mathbf{R}^2 : x - y + 2 = 0$ a $t_2 = P \times T \sim (13,-2,-10)$ s rovnicí $13x - y - 10 = 0$

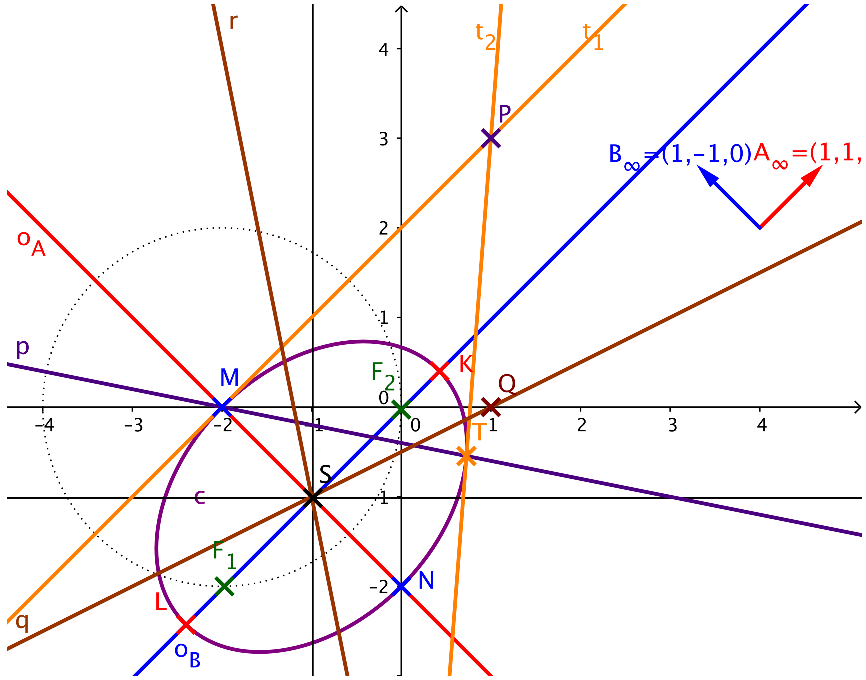


d) Průměr q procházející bodem $Q = [1, 0]$ najdeme v $\mathbf{RP}^2$ jako $Q \times S \sim (1, -2, -1)$, jehož nevlastní bod je (směrový vektor) $U_\infty = (2, 1, 0)$. Polára r bodu U_∞ je sdruženým průměrem k průměru q:

$$(2,1,0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = (5,1,6) \text{ a rovnice } r: 5x + y + 6 = 0.$$



Se vším všudy:


r
t2
t1
P
B∞=(1,−1,0)
A∞=(1,1,
oA
p
M
F2
K
Q
T
S
c
F1
N
L
q
oB