



ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

KMA/G1 GEOMETRIE 1

Pomocný učební text

Miroslav Lávička

Plzeň, září 2008

Předmluva

Tento text vznikl jako pomocný učební materiál pro potřeby studentů Fakulty aplikovaných věd a Fakulty pedagogické Západočeské univerzity v Plzni, kteří v akademickém roce 2003/04 navštěvovali předmět *KMA/G1 Geometrie 1*. V následujících letech bylo na podnět studentů provedeno několik drobných úprav a doplnění a byly odstraněny některé překlepy.

Jsem si plně vědom, že jde stále jen o provizorní formu textu a že v materiálu nejspíše stále najdete určité množství nedopatření a chyb. Budu Vám proto velmi vděčný za případné připomínky a návrhy na úpravy či doplnění, které by mohly přispět ke zlepšení tohoto učebního textu.

Plzeň, 5. září 2008

Miroslav Lávička (lavicka@kma.zcu.cz)

Použité značky a symboly

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$	obor reálných, komplexních, celých čísel
\mathbb{R}^n	aritmetický vektorový prostor tvořený n -ticemi reálných čísel
V_n	vektorový prostor volných vektorů
$V_n(O)$	vektorový prostor vázaných vektorů vycházejících z bodu O
$\vec{x} \in V_n$	vektor
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	aritmetický vektor (souřadný vektor)
\vec{o}, \mathbf{o}	nulový vektor
A	matice
$\mathbb{A}_n, \mathbb{E}_n$	afinní, eukleidovský prostor
A, B, C, \dots	body
p, q, \dots	přímky
ϱ, σ, \dots	(nad)roviny
$\alpha, \beta, \dots, \angle$	úhel
$k(\varrho, S, r)$	kružnice se středem S a poloměrem r ležící v rovině ϱ
$\kappa(S, r)$	kulová plocha/(nad)sféra se středem S a poloměrem r
$S\langle \dots \rangle, \mathcal{KSS}$	soustava souřadnic, kartézská soustava souřadnic
$A \in p, A \in \varrho$	bod A inciduje s přímkou p , resp. s (nad)rovinou ϱ
$p \subset \varrho$	přímka p inciduje s (nad)rovinou ϱ
$P \in p \cap q, \dots$	bod P je průsečík přímek p a q
$p = \varrho \cap \sigma$	přímka p je průsečnice rovin ϱ a σ
$p \parallel q, p \parallel \varrho$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q , resp. s (nad)rovinou ϱ
$p \perp q, p \perp \varrho$	přímka p je kolmá na přímkou q , resp. na (nad)rovinu ϱ
$ XY , \vec{x} , \mathbf{x} $	velikost úsečky XY , velikost (norma) vektoru \vec{x} , resp. \mathbf{x}
$ A, p , A, \varrho $	vzdálenost bodu A od přímky p , resp. od (nad)roviny ϱ
(A, B, C)	dělicí poměr tří kolineárních bodů

Obsah

1	Základní vlastnosti afinního prostoru	7
1.1	Afinní prostor	8
1.2	Podprostory afinního prostoru	15
1.3	Vzájemná poloha afinních podprostorů	22
1.4	Svazky a trsy nadrovin	32
1.5	Podmnožiny afinních podprostorů	39
2	Základní vlastnosti eukleidovského prostoru	46
2.1	Eukleidovský prostor	46
2.2	Kolmost podprostorů	54
2.3	Vzdálenosti podprostorů	58
2.4	Odchyly podprostorů	63
2.5	Objem rovnoběžnostěnu a simplexu	64
3	Kružnice a kulová plocha	68
3.1	Kružnice	68
3.2	Kulová plocha	73
4	Kuželosečky	76
4.1	Elipsa	76

4.2	Hyperbola	82
4.3	Parabola	87
4.4	Společné vlastnosti elipsy, hyperboly a paraboly	90
4.5	Řezy na kuželové ploše	92
4.6	Kuželosečky — kvadratické křivky v \mathbb{E}_2	95
5	Kvadriky	105
5.1	Rotační plochy	105
5.2	Rotační kvadriky	106
5.3	Obecné kvadriky v základní poloze	108
5.4	Kvadriky — kvadratické plochy v \mathbb{E}_3	111

Kapitola 1

Základní vlastnosti afinního prostoru

Předpokládáme, že čtenář je seznámen s pojmem **vektorového prostoru** a jeho základními vlastnostmi, zná pojmy *lineární kombinace*, *lineární závislost a nezávislost vektorů*, *dimenze* a *báze vektorového prostoru*, *podprostor vektorového podprostoru* apod.

Připomeňme jen, že pojem vektoru lze budovat několika způsoby. V *názorném geometrickém modelu* vektorového prostoru pracujeme jednak s **vázanými vektory** — vektorový prostor všech orientovaných úseček \overrightarrow{OX} vycházejících z daného pevného bodu O značíme $V_n(O)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) a dále s **volnými vektory** \vec{x} jakožto třídami všech navzájem rovnoběžných, souhlasně orientovaných a stejně dlouhých úseček (vázaný vektor \overrightarrow{OX} příslušný k volnému vektoru \vec{x} nazýváme jeho **representant**) — vektorový prostor volných vektorů značíme V_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). V *aritmetickém modelu* pracujeme s uspořádanými n – ticemi reálných čísel, tzv. **aritmetickými vektory** $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — tento vektorový prostor značíme \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3, \dots$

Uvažujme bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ vektorového prostoru V_n . Potom každý

vektor $\vec{x} \in V_n$ lze vyjádřit pomocí lineární kombinace

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i \quad (1.1)$$

s *jednoznačně* určenými koeficienty lineární kombinace $x_i \in \mathbb{R}$.

Uspořádaná n -tice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je tzv. **souřadným** (tj. aritmetickým) **vektorem** geometrického vektoru $\vec{x} \in V_n$. Vzhledem k izomorfismu obou vektorových prostorů (geometrického V_n a aritmetického \mathbb{R}^n), popsanému vztahem (1.1), není nutné mezi vektory \vec{x} a \mathbf{x} rozlišovat. Zdůrazněme ještě, že v některých případech (např. budeme-li využívat maticového zápisu) je výhodné chápat vektor \mathbf{x} jako sloupcový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

V analytické geometrii umožňují vektory převádět geometrické problémy na problémy algebraické, ty následně řešit a výsledky opět geometricky interpretovat.

1.1 Afinní prostor

Afinní prostor. Idea pojmu *afinní prostor* vychází z názorné skutečnosti, že dva body jednoznačně určují vektor a obráceně, umístěním vektoru do pevně zvoleného počátečního bodu dostaneme jednoznačně určený koncový bod.

DEFINICE 1.1.1.

Uvažujme neprázdnou množinu \mathcal{B} , vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení φ kartézského součinu $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ do prostoru V_n . Trojici $(\mathcal{B}, V_n, \varphi)$ nazýváme **n -rozměrný afinní prostor** (značíme \mathbb{A}_n), jestliže platí

- (i) $(\forall X, Y, Z \in \mathcal{B})[\varphi(X, Y) + \varphi(Y, Z) = \varphi(X, Z)];$
- (ii) $(\forall X \in \mathcal{B})(\forall \vec{u} \in V_n)(\exists! Y \in \mathcal{B})[\varphi(X, Y) = \vec{u}].$

Množina \mathcal{B} se nazývá **nositelka** a vektorový prostor V_n **vektorové zaměření** afinního prostoru \mathbb{A}_n . Prvky nositelky \mathcal{B} a tím i prostoru \mathbb{A}_n označujeme jako **body** afinního prostoru.

Afinní prostor \mathbb{A}_1 nazýváme afinní přímka, \mathbb{A}_2 afinní rovina a \mathbb{A}_3 afinní prostor (v užším slova smyslu).

Jelikož zápis zobrazení φ je poněkud těžkopádný, budeme místo $\vec{u} = \varphi(X, Y)$ psát $\vec{u} = Y - X$ (tzv. **rozdíl dvou bodů**); po formální úpravě lze získat tzv. **součet bodu a vektoru** $Y = X + \vec{u}$. Zdůvodnění výše uvedeného zápisu plyne z následujícího příkladu.

Příklad 1.1.1. Nechť je dána uspořádaná trojice $(\mathcal{B}, V_n, \varphi)$, kde $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$, $V_n = \mathbb{R}^n$ a zobrazení φ je dáno předpisem $\forall X, Y \in \mathcal{B}$ je $\varphi(X, Y) = Y - X = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) = (u_1, \dots, u_n) = \vec{u} \in V_n$. Snadno se přesvědčíme, že jsou splněny obě podmínky definice 1.1.1, tj. struktura $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, -)$ je afinní prostor.

Věta 1.1.1. *Nechť je dán afinní prostor $\mathbb{A}_n(\mathcal{B}, V_n, \varphi)$ a nechť $X, Y, Z, U \in \mathcal{B}$ a $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$. Potom platí*

$$(i) \quad X - X = \vec{o},$$

$$(ii) \quad X - Y = -(Y - X),$$

$$(iii) \quad (X + \vec{u}) + \vec{v} = X + (\vec{u} + \vec{v}),$$

$$(iv) \quad (X + \vec{u}) - (Y + \vec{v}) = (X - Y) + (\vec{u} - \vec{v}),$$

$$(v) \quad (X - Y) + (Z - U) = (X - U) + (Z - Y),$$

$$(vi) \quad X + (Y - X) = Y. \quad \square$$

Důkaz: [Se1]

Soustava souřadnic. Zvolíme-li pevně bod $O \in \mathbb{A}_n$ a bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle \subset V_n$, potom lze podle definice 1.1.1 každému bodu $X \in \mathbb{A}_n$ jednoznačně přiřadit geometrický vektor $\vec{x} = \vec{OX} = X - O$ (tzv. **polohový vektor** bodu X) a podle (1.1) i uspořádanou n -tici $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$

$$X - O = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \quad (1.2)$$

Uspořádanou $(n+1)$ -tici $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ budeme nazývat **repér**.

DEFINICE 1.1.2.

Zobrazení \mathcal{S} dané repérem $\langle O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \rangle$, které každému bodu $X \in \mathbb{A}_n$ přiřazuje uspořádanou n -tici $\{X\}_{\mathcal{S}} = \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ (tzv. **souřadnice bodu** X), nazýváme **soustava souřadnic** v afinním prostoru \mathbb{A}_n . Bod O se nazývá **počátek** soustavy souřadnic a bod E_i odpovídající **souřadnicovému vektoru** \vec{e}_i označujeme jako **jednotkový bod** na **i -té souřadnicové ose**, $i = 1, \dots, n$. **Souřadnicemi vektoru** $\vec{u} \in V_n$ vzhledem k \mathcal{S} rozumíme jeho souřadnice $\{\vec{u}\}_{\mathcal{S}} = \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ vzhledem k bázi $\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \rangle \subset V_n$.

Je zřejmé, že souřadnicové vektory \mathbf{e}_i příslušné k vektorům \vec{e}_i nabývají tvaru $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ a tvoří tzv. *kanonickou bázi* aritmetického vektorového prostoru \mathbb{R}^n .

Věta 1.1.2. *Nechť je repérem $\langle O; \vec{e}_i \rangle$ dána soustava souřadnic \mathcal{S} . Potom $\forall A, B \in A_n$, a $\forall u \in V_n$ platí*

$$\{B - A\}_{\mathcal{S}} = \{B\}_{\mathcal{S}} - \{A\}_{\mathcal{S}} \quad a \quad \{A + \vec{u}\}_{\mathcal{S}} = \{A\}_{\mathcal{S}} + \{\vec{u}\}_{\mathcal{S}}$$

Důkaz: Zřejmé.

Úmluva. Budeme-li chtít popisovat bodové množiny (přímky, roviny, atd.), bylo by nejlogičtější pracovat výhradně se souřadnicemi bodů. V aplikacích se však často pracuje s vektory. Je zřejmé, že k žádným nejasnostem nemůže dojít, neboť polohový vektor $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ jednoznačně určuje bod X (a naopak). Navíc při pevně zvolené souřadné soustavě mají bod X a geometrický vektor $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ stejné souřadnice, které jen z formálních důvodů zapisujeme v případě bodu $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a v případě vektoru (x_1, x_2, \dots, x_n) . Místo bodu i místo geometrického vektoru tak můžeme používat aritmetický vektor jejich souřadnic. Zápisy X , \vec{x} a \mathbf{x} budeme proto považovat za rovnocenné. Přesto je však nutné si být při práci s body a vektory vědom jisté obezřetnosti, neboť zatímco součet dvou vektorů $\vec{x} + \vec{y}$, resp. $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ je samozřejmě definován, výrazu $X + Y$, popř. jiné lineární kombinaci bodů nebyl zatím dán žádný geometrický smysl!

Příklad 1.1.2. Určete souřadnice bodu $M = [-2, 0, 2, 2]$ v soustavě souřadnic \mathcal{S} dané repérem $\langle P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle$, kde $P = [1, 2, -1, 3]$, $\vec{e}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\vec{e}_2 = (3, 1, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (-2, 0, 0, 1)$, $\vec{e}_4 = (-1, 1, -2, 1)$.

Řešení: Hledáme vektor souřadnic $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3, m_4]$ bodu M , pro

který podle definice 1.1.2. platí

$$M - P = m_1 \vec{e}_1 + m_2 \vec{e}_2 + m_3 \vec{e}_3 + m_4 \vec{e}_4,$$

tj. po rozepsání dostáváme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých

$$\begin{array}{cccccc} m_1 & + & 3m_2 & - & 2m_3 & - & m_4 & = & -3 \\ & & m_2 & & & + & m_4 & = & -2 \\ 2m_1 & & + & m_2 & & - & 2m_4 & = & 3 \\ -m_1 & & & + & m_3 & + & m_4 & = & -1 \end{array}$$

Řešením soustavy získáme $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, $m_3 = 1$, $m_4 = -1$ neboli $\{[-2, 0, 2, 2]\}_{\mathcal{S}} = [1, -1, 1, -1]$. \diamond

Transformace souřadnic vektorů a bodů. Uvažujme repér $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$, jenž určuje v afinním prostoru $\mathbb{A}_n(\mathcal{B}, V_n, -)$ soustavu souřadnic \mathcal{S} . Každý vektor $\vec{u} \in V_n$ lze potom jednoznačně zapsat jako lineární kombinaci

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + \dots + u_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i, \text{ kde } u_i \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Jestliže zvolíme nový repér $\langle P; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n \rangle$, jenž ve stejném afinním prostoru \mathbb{A}_n definuje soustavu souřadnic \mathcal{S}' , dostáváme pro též vektor $\vec{u} \in V_n$ vyjádření

$$\vec{u} = u'_1 \vec{d}_1 + u'_2 \vec{d}_2 + \dots + u'_n \vec{d}_n = \sum_{j=1}^n u'_j \vec{d}_j, \text{ kde } u'_j \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Označíme-li $\vec{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)^T$ a $\vec{d} = (\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n)^T$ potom můžeme vztah mezi vektorem \vec{u} a příslušnými souřadnými vektory $\{\vec{u}\}_{\mathcal{S}} = \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, resp. $\{\vec{u}\}_{\mathcal{S}'} = \mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n)^T$ zachytit ve tvaru

$$\vec{u} = \mathbf{u}^T \vec{e}, \quad \text{resp.} \quad \vec{u} = \mathbf{u}'^T \vec{d}.$$

Ptáme se, jaký je vztah mezi „starými“ souřadnicemi $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ a „novými“ souřadnicemi $(u'_1, u'_2, \dots, u'_n) \in \mathbb{R}^n$. Jelikož vektory $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n$ nové báze rovněž náležejí vektorovému prostoru V_n , lze je samozřejmě nagenarovat pomocí původní báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$, tj. platí

$$\vec{d}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i \quad \text{kde } j = 1, \dots, n \text{ a } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Tedy $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ jsou souřadnice vektoru \vec{d}_j v bázi $\langle \vec{e}_i \rangle$. S využitím výše zavedeného označení můžeme tedy psát

$$\vec{\mathbf{d}} = \mathbf{A}^T \vec{\mathbf{e}}, \quad (1.5)$$

kde

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pro vektor \vec{u} dostáváme

$$\vec{u} = \begin{cases} \mathbf{u}^T \vec{\mathbf{e}} \\ \mathbf{u}'^T \vec{\mathbf{d}} = \mathbf{u}'^T (\mathbf{A}^T \vec{\mathbf{e}}) = (\mathbf{u}'^T \mathbf{A}^T) \vec{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} \mathbf{u}')^T \vec{\mathbf{e}} \end{cases}$$

Pro souřadnice libovolného vektoru \vec{u} v soustavě \mathcal{S} a \mathcal{S}' tedy platí transformační vztahy

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}', \quad (1.6)$$

resp. po rozepsání

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}.$$

Matice \mathbf{A} se nazývá **matice přechodu** od báze $\langle \vec{e}_i \rangle$ k bázi $\langle \vec{d}_j \rangle$. Všimněme si, že její sloupce $\mathbf{d}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T$ tvoří souřadnice nových bázevých vektorů \vec{d}_j vzhledem k původní bázi $\langle \vec{e}_i \rangle$.

Je zřejmé, že matice \mathbf{A} musí být *regulární* — jinak by byl jeden řádek buďto nulový, anebo by byl lineární kombinací řádků zbývajících, což je spor s předpokladem, že \mathbf{d}_j jsou vektory báze (tj. lineárně nezávislé). Determinant regulární matice je různý od nuly — jestliže $\det(\mathbf{A}) > 0$, potom říkáme, že báze $\langle \vec{e}_i \rangle$ a $\langle \vec{d}_j \rangle$ jsou **souhlasně orientované**; jestliže $\det(\mathbf{A}) < 0$, potom říkáme, že báze $\langle \vec{e}_i \rangle$ a $\langle \vec{d}_j \rangle$ jsou **nesouhlasně orientované**.

Relace *souhlasných bází* je relací ekvivalence, a proto vytváří na množině všech uspořádaných bází rozklad na dvě třídy. Jednu ze tříd

nazveme **kladně orientovanou**, druhou **záporně orientovanou** (dle úmluvy) — tento proces se označuje jako **orientace vektorového prostoru** V_n .

Pokud zaměníme roli obou bází $\langle \vec{e}_i \rangle$ a $\langle \vec{d}_j \rangle$, dostaneme obdobně

$$\mathbf{u}' = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (1.7)$$

kde sloupce matice \mathbf{B} tvoří souřadnice starých bázových vektorů \vec{e}_i vzhledem k nové bázi $\langle \vec{d}_j \rangle$, tj.

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} \vec{d}_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

Dosazením (1.6) do (1.7) obdržíme

$$\mathbf{u}' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{u}',$$

odkud plyne

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}, \text{ resp. } \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}. \quad (1.8)$$

Nyní se podívejme na transformaci souřadnic bodů v afinním prostoru \mathbb{A}_n . Přejít od jedné soustavy souřadnic k jiné může totiž významně zjednodušit řešení řady úloh afinní geometrie.

Nechť „nový“ počátek P má vzhledem ke „staré“ souřadné soustavě souřadnice $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$, tj. platí

$$P = O + \sum_{i=1}^n b_i \vec{e}_i, \quad \text{neboli } \mathbf{b} = \{P - O\}_{\mathcal{S}} \quad (1.9)$$

a nechť transformace souřadnic vektorů způsobená přechodem od báze $\langle \vec{e}_i \rangle$ k bázi $\langle \vec{d}_j \rangle$ se odehrává podle vztahu (1.6).

Dále označme $\mathbf{x} = \{X - O\}_{\mathcal{S}}$ souřadnice bodu $X \in \mathbb{A}_n$ v soustavě souřadnic \mathcal{S} a $\mathbf{x}' = \{X - P\}_{\mathcal{S}'}$ souřadnice téhož bodu X v soustavě souřadnic \mathcal{S}' .

Potom můžeme psát

$$\mathbf{x} = \{X - O\}_{\mathcal{S}} = \{X - P + P - O\}_{\mathcal{S}} = \{X - P\}_{\mathcal{S}} + \{P - O\}_{\mathcal{S}} =$$

$$= \mathbf{A} \cdot \{X - P\}_{S'} + \{P - O\}_S = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{b},$$

tj.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

resp. po rozepsání do souřadnic

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j + b_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.10)$$

Snadno nahlédneme, že přechod od „čárkovaných“ souřadnic k „nečárkovaným“ je dán vztahem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b}). \quad (1.11)$$

Příklad 1.1.3. V afinní rovině \mathbb{A}_2 jsou dány body $P = [-1, 3]$, $P' = [2, -3]$ a vektory $\vec{u} = (1, 4)$, $\vec{v} = (5, 2)$, $\vec{u}' = (6, 6)$, $\vec{v}' = (-3, 6)$. Určete transformační rovnice přechodu od soustavy souřadnic $\mathcal{S} = \langle P, \vec{u}, \vec{v} \rangle$ k soustavě souřadnic $\mathcal{S}' = \langle P', \vec{u}', \vec{v}' \rangle$. Rozhodněte, zdali jsou obě soustavy souhlasně, nebo nesouhlasně orientované.

Řešení: Postupem z příkladu 1.1.2 určíme nejprve souřadnice bodu P' a vektorů \vec{u}' , \vec{v}' v soustavě souřadnic dané repérem $\langle P; \vec{u}, \vec{v} \rangle$ — obdržíme $\{P'\}_S = [-2, 1]$, $\{\vec{u}'\}_S = (1, 1)$ a $\{\vec{v}'\}_S = (2, -1)$. Transformační vztahy tedy nabývají tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A vzhledem k tomu, že determinant matice přechodu je záporný ($\det(\mathbf{A}) = -3$), jedná se o nesouhlasně orientované soustavy souřadnic.

◇

1.2 Podprostory afinního prostoru

DEFINICE 1.2.1.

Buďte $\mathbb{A}_n(\mathcal{B}, V_n, \varphi)$ afinní prostor, A libovolný bod nositelky \mathcal{B} a V'_k , $k \leq n$, libovolný vektorový podprostor zaměření V_n . Potom množinu bodů

$$\mathbb{A}'_k = \{X \in \mathbb{A}_n : X = A + \vec{v}, \vec{v} \in V'_k\}$$

nazýváme **podprostorem** afinního prostoru \mathbb{A}_n . Stručně zapisujeme $\mathbb{A}'_k = A + V'_k$, resp. $\mathbb{A}'_k = \{A; V'_k\}$.

Podprostor \mathbb{A}'_k pro $k = 1$, resp. $k = 2$, resp. $k = n - 1$ nazýváme **přímka**, resp. **rovina**, resp. **nadrovina** afinního prostoru \mathbb{A}_n .

Poznámka 1.2.1. Je vidět, že pojem nadroviny je relativní, neboť nabývá svého přesného významu až v závislosti na dimenzi celého afinního prostoru — v \mathbb{A}_2 je tedy nadrovinou přímka, v \mathbb{A}_3 pak rovina atd.

Snadno bychom dokázali (ověřením obou podmínek definice 1.1.1.), že podprostor \mathbb{A}'_k zavedený výše uvedenou definicí je k -rozměrným afinním prostorem $\mathbb{A}'_k(\mathcal{B}', V'_k, \varphi')$ s nositelkou $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, zaměřením $V'_k \subset V_n$ a zobrazením φ' , jenž je *restrikcí (zúžením)* zobrazení φ („zúžili“ jsme levý obor na $\mathcal{B}' \times \mathcal{B}'$ a pravý obor na V'_k .)

Poznámka 1.2.2. Je zřejmé, že pro zaměření V'_k obsahující jen nulový vektor $\vec{0}$ dostáváme bod A jakožto *podprostor dimenze nula*.

Věta 1.2.1. *Afinní bodový podprostor \mathbb{A}'_k prostoru \mathbb{A}_n je určen svým zaměřením a jedním svým libovolným bodem.* \square

Důkaz: Dokazujeme libovolnost výběru. Nechť $B \in \mathbb{A}'_k = \{A; V'_k\}$, musíme dokázat $\{A; V'_k\} = \{B; V'_k\}$.

Jelikož $B \in \mathbb{A}'_k$, pak existuje vektor $\vec{b} \in V'_k$ takový, že $B = A + \vec{b}$ — odtud plyne $A = B - \vec{b}$. Nechť dále X je libovolný bod podprostoru \mathbb{A}'_k , tj. existuje takový vektor $\vec{x} \in V'_k$, že $X = A + \vec{x}$. Po dosazení dostáváme $X = B + (-\vec{b} + \vec{x})$, kde zřejmě $(-\vec{b} + \vec{x}) \in V'_k$. Odtud již ihned plyne $X \in \{B; V'_k\}$. Proto $\{A; V'_k\} \subset \{B; V'_k\}$.

Analogicky bychom dokázali i $\{B; V'_k\} \subset \{A; V'_k\}$, a proto platí rovnost $\{B; V'_k\} = \{A; V'_k\}$. \square

Libovolný bod $X \in \mathbb{A}'_k$ lze podle definice podprostoru popsat

$$X = A + \vec{v}, \text{ kde } \vec{v} \in V'_k.$$

Jestliže známe bázi $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \rangle \subset V'_k$, můžeme vektor \vec{v} vyjádřit jako lineární kombinaci $\vec{v} = t_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 + \dots + t_k \vec{u}_k$, a proto

$$X = A + \sum_{i=1}^k t_i \vec{u}_i, \text{ kde } t_i \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Je-li dána soustava souřadnic \mathcal{S} , v níž má bod A souřadnice \mathbf{a} a vektory \vec{u}_i mají souřadnice \mathbf{u}_i , potom výše uvedený vztah můžeme přepsat

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^k t_i \mathbf{u}_i, \text{ kde } t_i \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

DEFINICE 1.2.2.

Vyjádření (1.12), resp. (1.13) se nazývá **parametrické vyjádření**, resp. **parametrická rovnice** podprostoru \mathbb{A}'_k . Říkáme rovněž, že podprostor \mathbb{A}'_k je **dán parametricky**.

Všimněme si, že bod A a vektory \vec{u}_i udávají v afinním prostoru \mathbb{A}_k tzv. **lokální soustavu souřadnic** $\mathcal{S}\langle A; \vec{u}_i \rangle$, vzhledem k níž má každý bod $X \in \mathbb{A}'_k$ souřadnice $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$.

Ukázali jsme, že každý k -rozměrný podprostor \mathbb{A}'_k je jednoznačně určen libovolným svým bodem a vektorovým zaměřením. Nyní ukážeme, jak lze afinní podprostor zadat pomocí bodů. K tomu je však nutné definovat pojem *bodové lineární nezávislosti*.

DEFINICE 1.2.3.

Skupina $k + 1$ bodů $B_0, B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathbb{A}_n$ se nazývá **lineárně nezávislá**, právě když je lineárně nezávislá k -tice vektorů $B_1 - B_0, B_2 - B_0, \dots, B_k - B_0$

Z definice mj. plyne, že počátek O a jednotkové body E_i každé souřadné soustavy $\mathcal{S}\langle O; \vec{i} \rangle$ jsou lineárně nezávislými body. Dále je zřejmé, že v afinním prostoru \mathbb{A}_n existuje maximálně $n+1$ lineárně nezávislých bodů.

Věta 1.2.2. *Afinní podprostor \mathbb{A}'_k afinního prostoru \mathbb{A}_n je určen $k + 1$ lineárně nezávislými body.* \square

Důkaz: Z lineární nezávislosti bodů $B_0, B_1, B_2, \dots, B_k$ plyne lineární nezávislost vektorů $B_1 - B_0, B_2 - B_0, \dots, B_k - B_0$, které jednoznačně generují vektorový podprostor V'_k . Proto $\mathbb{A}'_k = \{B_0; B_1 - B_0, B_2 - B_0, \dots, B_k - B_0\}$. \square

Poznámka 1.2.3. Je zřejmé, že každých $l \geq k + 2$ bodů z podprostoru \mathbb{A}_k musí být vždy lineárně závislých.

Přímka. Přímka p spojující dva lineárně nezávislé (tj. různé) body A, B má *parametrickou rovnici*

$$p: X = A + t(B - A) = A + t\vec{u}, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}; \quad (1.14)$$

Vektor $\vec{u} = B - A$ nazýváme **směrový vektor** přímky p . Parametrickou rovnici přímky p lze samozřejmě psát také ve tvaru $X = A + t\vec{u}$. Body ležící na téže přímce nazýváme **kolineární**.

Vzhledem k lokální soustavě souřadnic $\mathcal{S}\langle A; \vec{u} \rangle$ na přímce p má bod $X \in p$, resp. A , resp. B souřadnici t , resp. 0, resp. 1. **Střed** S dvojice bodů A, B má souřadnici $\frac{1}{2}$ a snadno nahlédneme, že platí $S = A + \frac{1}{2}(B - A)$, resp. pomocí odpovídajících souřadných (aritmetických) vektorů

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Skutečnost, že pro souřadnice středu S dvojice bodů A, B platí $s_i = \frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}b_i$, budeme psát symbolicky

$$S = \frac{A + B}{2} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B.$$

Poznámka 1.2.4. Parametrickou rovnici přímky p rozepíšeme do souřadnic a v afinní rovině \mathbb{A}_2 ($x_1 = x, x_2 = y$) dostáváme

$$x = a_1 + tu_1, \quad y = a_2 + tu_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

resp. v afinním prostoru \mathbb{A}_3 ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$)

$$x = a_1 + tu_1, \quad y = a_2 + tu_2, \quad z = a_3 + tu_3, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Rovina. Rovina ρ procházející třemi lineárně nezávislými (tj. neko-lineárnými) body A, B, C má *parametrickou rovnici*

$$\rho: X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A) = A + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}, \quad \text{kde } t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

Body ležící v téže rovině nazýváme **komplanární**.

Vzhledem k lokální soustavě souřadnic $\mathcal{S}\langle A; \vec{u}, \vec{v} \rangle$ v rovině ρ má každý bod $X \in \rho$ souřadnice $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$.

Poznámka 1.2.5. Parametrickou rovnici roviny ρ rozepíšeme do souřadnic a v afinním prostoru \mathbb{A}_3 ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$) dostáváme

$$x = a_1 + t_1u_1 + t_2v_1, \quad y = a_2 + t_1u_2 + t_2v_2, \quad z = a_3 + t_1u_3 + t_2v_3, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Příklad 1.2.1.

Rozhodněte, o jaké podprostory se jedná:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x_1 = 3 - 2t & \text{b) } x_1 = 1 + 2t - r \\ x_2 = 1 + 3t & x_2 = -2 - 4t \\ x_3 = -t & x_3 = 3 - t + 3r \\ & x_4 = 2 + r \end{array}$$

Řešení:

a) Jde o přímku v \mathbb{A}_3 , která je určena bodem $[3, 1, 0]$ a směrovým vektorem $(-2, 3, -1)$.

b) Jedná se o rovinu v \mathbb{A}_4 , která je určena bodem $[1, -2, 3, 2]$ a zaměřením generovaným vektory $(2, -4, -1, 0)$ a $(-1, 0, 3, 1)$. ◇

Nadrovina, obecná rovnice nadroviny. Nadrovina $\eta = \mathbb{A}'_{n-1}$ afinního prostoru \mathbb{A}_n (tj. v \mathbb{A}_2 přímka; v \mathbb{A}_3 rovina apod.) je určena n lineárně nezávislými body P_1, P_2, \dots, P_n a má *parametrickou rovnici*

$$\begin{aligned} \eta: X &= P_1 + t_1(P_2 - P_1) + t_2(P_3 - P_1) + \dots + t_{n-1}(P_n - P_1) = \\ &= P_1 + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \dots + t_{n-1}\vec{u}_{n-1}, \quad \text{kde } t_i \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

V následující části ukážeme, že každou *nadrovinu*(!) afinního prostoru \mathbb{A}_n lze popsat i jinak než parametricky.

Předpokládejme tedy, že nadrovina η je dána bodem P a vektorovým zaměřením $V_{n-1}^\eta = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n-1} \rangle$ a necht' \mathbf{p} , \mathbf{u}_i jsou příslušné souřadné vektory vztažené k jisté soustavě souřadnic \mathcal{S} . Uvažujme X libovolný bod nadroviny η . Neboť vektory \vec{u}_i tvoří bázi zaměření nadroviny, je vektor $X - P$ jejich lineární kombinací; tj. hodnost čtvercové matice $(\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1})$ typu $n \times n$ musí být $n - 1$, tj.

$$\text{hod} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & \dots & x_n - p_n \\ u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \dots & u_{n-1,n} \end{pmatrix} = n - 1.$$

Pro determinant této matice proto platí

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & \dots & x_n - p_n \\ u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \dots & u_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.17)$$

Provedeme rozvoj determinantu podle prvního řádku a dostáváme

$$(x_1 - p_1)D_{11} - (x_2 - p_2)D_{12} + \dots + (-1)^{n+1}(x_n - p_n)D_{1n} = 0,$$

kde vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}$ (báze) je alespoň jeden ze subdeterminantů $D_{11}, D_{12}, \dots, D_{1n}$ různý od nuly.

Po úpravě a přeznačení $a_1 = D_{11}$, $a_2 = -D_{12}$, \dots , $a_n = (-1)^{n+1}D_{1n}$ a $a_0 = -(p_1D_{11} - p_2D_{12} + \dots + (-1)^{n+1}p_nD_{1n})$ dostáváme rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0 = \sum_{i=1}^n a_ix_i + a_0 = 0, \quad (1.18)$$

kde $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

DEFINICE 1.2.4.

Rovnice (1.18) se nazývá **obecná rovnice nadroviny** $\eta = \mathbb{A}'_{n-1}$.

Z výše uvedeného postupu plyne, že každá nadrovina má svoji obecnou rovnici. Obráceně platí

Věta 1.2.3. Každá rovnice typu (1.18) je rovnicí jisté nadroviny. \square

Důkaz: Podle předpokladů existuje v rovnici (1.18) $\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0$ alespoň jeden nenulový koeficient a_i ($i = 1, \dots, n$). Proto můžeme psát

$$x_i = -\frac{1}{a_i}(a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{i-1} x_{i-1} + a_{i+1} x_{i+1} + \dots + a_n x_n).$$

Řešení rovnice lze tudíž parametricky popsat

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) &= \\ &= \left(t_1, \dots, t_{i-1}, -\frac{a_0}{a_i} - \frac{a_1}{a_i} t_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} t_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} t_i - \dots - \frac{a_n}{a_i} t_{n-1}, \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. t_i, \dots, t_{n-1} \right) \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že výše uvedené vyjádření představuje parametrickou rovnici podprostoru \mathbb{A}' , jehož dimenze je $n - 1$, tj. jde o nadrovinu podprostoru \mathbb{A}_n . \square

Poznámka 1.2.6. V \mathbb{A}_2 je nadrovinou přímka, tj. při označení $x_1 = x$, $x_2 = y$ můžeme *obecnou rovnici přímky* $p = \{P; \langle \vec{u} \rangle\}$ psát ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = 0,$$

resp. po úpravě

$$ax + by + c = 0, \text{ kde } (a, b) \neq (0, 0).$$

Poznámka 1.2.7. V \mathbb{A}_3 je nadrovinou rovina, tj. při označení $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ můžeme *obecnou rovnici roviny* $\rho = \{P; \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle\}$ psát ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

resp. po úpravě

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ kde } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Příklad 1.2.2. Jsou dány body $A = [1, 2, 1, -2]$, $B = [0, 2, 1, 0]$, $C = [2, 1, -1, 1]$ a $D = [1, -1, -1, 1]$. Ukažte, že tyto body určují v prostoru \mathbb{A}_4 nadrovinu. Zapište parametrické vyjádření a obecnou rovnici uvedené nadroviny.

Řešení: Body A, B, C, D určují nadrovinu v \mathbb{A}_4 (tj. třírozměrný podprostor \mathbb{A}'_3), právě když jsou lineárně nezávislé. To nastává právě tehdy, jsou-li lineárně nezávislé vektory $B - A, C - A, D - A$. Vektory zapíšeme do matice a s využitím řádkově ekvivalentních úprav můžeme psát

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{pmatrix}.$$

Je zřejmé, že matice má hodnotu 3 a body A, B, C, D jsou tedy lineárně nezávislé.

Parametrická rovnice podprostoru \mathbb{A}'_3 je

$$X = A + t(B - A) + r(C - A) + s(D - A),$$

tj. po rozepsání do souřadnic

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - t + r \\ x_2 &= 2 - r - 3s \\ x_3 &= 1 - 2r - 2s \\ x_4 &= -2 + 2t + 3r + 3s \end{aligned}$$

Hledáme obecnou rovnici nadroviny \mathbb{A}'_3 — užitím (1.17) dostáváme

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 & x_3 - 1 & x_4 + 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

Rozvinutím determinantu podle prvního řádku a po výpočtu subdeterminantů vyjde $-8(x_1 - 1) + 4(x_2 - 2) - 12(x_3 - 1) - 4(x_4 + 2) = 0$, tj. po úpravě získáváme obecnou rovnici nadroviny

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 1 = 0.$$

Poznámka 1.2.8. Zdůrazněme ještě jednou, že obecná rovnice se vždy týká jen nadrovin, tj. *neexistuje* obecná rovnice přímky v afinním prostoru \mathbb{A}_n , $n \geq 3$; ani obecná rovnice roviny v afinním prostoru \mathbb{A}_n , $n \geq 4$ atd. V případě přímky je však možné zavést některé další pomocné typy rovnic. Je-li $u_i \neq 0$ (pro všechna $i = 1, \dots, n$), lze z rovnice (1.14) vyjádřit parametr t , čímž dostáváme

$$t = \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{u_n}. \quad (1.19)$$

Výše uvedená rovnice se nazývá **kanonická rovnice přímky**.

Závěrem této kapitoly odpovíme ještě na následující otázku. Je-li nadrovina $\eta = \{A; V_{n-1}^\eta\}$ afinního prostoru \mathbb{A}_n dána parametricky, není problém ověřit, zda libovolný vektor \vec{v} (ne)náleží zaměření V_{n-1}^η . Lze však stejně bezproblémově rozhodnout i v případě, že nadrovina η je dána obecnou rovnicí $\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0$, a to bez určení parametrické rovnice?

Zřejmě $\vec{v} \in V_{n-1}^\eta$ právě tehdy, když existují body $P, Q \in \eta$ takové, že $P - Q = \vec{v}$. Dále

$$P = [p_1, p_2, \dots, p_n] \in \eta \Leftrightarrow a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n + a_0 = 0,$$

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_n] \in \eta \Leftrightarrow a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots + a_n q_n + a_0 = 0,$$

tj. po odečtení druhé rovnice od první dostáváme

$$\begin{aligned} P - Q &= (p_1 - q_1, p_2 - q_2, \dots, p_n - q_n) \in V_{n-1}^\eta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_1(p_1 - q_1) + a_2(p_2 - q_2) + \dots + a_n(p_n - q_n) = 0 \end{aligned}$$

a hledané kritérium zní

Věta 1.2.4. *Nechť je obecnou rovnicí $\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0$ dána nadrovina $\eta = \mathbb{A}'_{n-1}$ afinního prostoru \mathbb{A}_n . Vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ náleží zaměření V_{n-1}^η nadroviny η , právě když platí*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0. \quad (1.20)$$

Příklad 1.2.3. Zvolte parametr λ tak, aby vektor $\vec{u} = (2, \lambda + 1, \lambda, -1)$ náležel zaměření nadroviny $\eta : 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 5 = 0$.

Řešení: Podle věty V.1.2.4 je $\vec{u} \in V_2^\eta$, právě když platí $3 \cdot 2 + (\lambda + 1) - 2 \cdot \lambda + (-1) = 0$. Odtud již snadno zjistíme $\lambda = 6$. \diamond

1.3 Vzájemná poloha afinních podprostorů

Předmětem studia **afinní geometrie** (tj. geometrie v afinním prostoru) je vyšetřování polohových vlastností geometrických útvarů tj. studium incidence, rovnoběžnosti, hledání průsečíků, průsečnic apod.

Dříve než zavedeme základní pojmy, vyslovme větu, která nám pomůže při určování vzájemné polohy dvou afinních podprostorů.

Věta 1.3.1. Podprostory $\mathbb{A}'_r = A + V'_r$ a $\mathbb{A}''_s = B + V''_s$ afinního prostoru \mathbb{A}_n ($1 \leq r, s \leq n$) mají neprázdný průnik, právě když existují vektory $\vec{u} \in V'_r$, $\vec{v} \in V''_s$ takové, že $A - B = \vec{u} + \vec{v}$. \square

Důkaz: (\Rightarrow) Předpokládejme nejprve, že $\mathbb{A}'_r \cap \mathbb{A}''_s \neq \emptyset$, tj. $\exists P \in \mathbb{A}'_r \cap \mathbb{A}''_s$. Jelikož $A \in \mathbb{A}'_r$ a $P \in \mathbb{A}'_r$, potom zřejmě vektor $A - P = \vec{u}$ náleží zaměření V'_r . Obdobně bychom ukázali, že vektor $P - B = \vec{v}$ náleží zaměření V''_s . Sečtením získáme $A - B = \vec{u} + \vec{v}$.

(\Leftarrow) Nechť naopak platí $A - B = \vec{u} + \vec{v}$, tj. po úpravě $A - \vec{u} = B + \vec{v}$. Snadno nahlédneme, že bod $P = A - \vec{u} = B + \vec{v}$ je společný bod podprostorů \mathbb{A}'_r a \mathbb{A}''_s , tj. $\mathcal{A}'_r \cap \mathcal{A}''_s \neq \emptyset$. \square

Incidence a rovnoběžnost podprostorů. V dalším textu budeme předpokládat, že jsou dány dva afinní podprostory $\mathbb{A}'_k = \{A, V'_k\}$ a $\mathbb{A}''_l = \{B, V''_l\}$ afinního prostoru \mathbb{A}_n .

DEFINICE 1.3.1.

Dva podprostory afinního prostoru nazýváme **incidentní**, jestliže je jeden z nich podmnožinou druhého.

Evidentně $\mathbb{A}'_k \subset \mathbb{A}''_l$, právě když $A \in \mathbb{A}''_l$ a $V'_k \subset V''_l$. Je-li první podprostor podmnožinou druhého a současně i druhý podmnožinou prvního, potom jsou tyto podprostory **splývající**.

DEFINICE 1.3.2.

Dva podprostory \mathbb{A}'_k a \mathbb{A}''_l afinního prostoru \mathbb{A}_n nazveme **rovnoběžné**, jestliže vektorové zaměření jednoho z nich je vektorovým podprostorem druhého.

Z definic přímo plyne, že jsou-li dva podprostory incidentní, pak jsou rovnoběžné! Naopak neincidentní rovnoběžné podprostory nemají *žádný společný bod*, tj. jsou *disjunktní*. Z věty 1.3.1 ihned plyne:

Věta 1.3.2. Nechť jsou dány dva rovnoběžné podprostory $\mathbb{A}'_k = \{A, V'_k\}$, $\mathbb{A}''_l = \{B, V''_l\}$ afinního prostoru \mathbb{A}_n takové, že $V''_l \subseteq V'_k$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) podprostory \mathbb{A}'_k a \mathbb{A}''_l jsou incidentní;

(ii) $A - B \in V'_k$. \square

Příklad 1.3.1.

Určete obecnou rovnici roviny α , která je incidentní s přímkou $p = AB$ a rovnoběžná s přímkou $q = \{C, \vec{u}\}$, kde $A = [1, 2, 3]$, $B = [2, 2, 4]$, $C = [-2, 4, 1]$, $\vec{u} = (1, 1, 0)$.

Řešení: Parametrické vyjádření roviny α je $X = A + V_2^\alpha$, kde zaměření V_2^α je generováno vektory $B - A = (1, 0, 1)$ a $\vec{u} = (1, 1, 0)$ ($A \in \alpha$ a $(B - A) \in V_2^\alpha$ garantuje $p \subset \alpha$; $\vec{u} \in V_2^\alpha$ zaručuje $p \parallel \alpha$). Obecná rovnice roviny α je podle (1.17)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozvinutím determinantu podle prvního řádku a po úpravě dostáváme $x - y - z + 4 = 0$. \diamond

Různoběžné a mimoběžné podprostory. Lze dokázat, že je-li průnik dvou afinních podprostorů $\mathbb{A}'_k, \mathbb{A}''_l \subset \mathbb{A}_n$ neprázdný, potom se opět jedná o afinní podprostor prostoru \mathbb{A}_n , přičemž jeho zaměření je $V'_k \cap V''_l$.

DEFINICE 1.3.3.

Dva *nerovnoběžné* podprostory \mathbb{A}'_k a \mathbb{A}''_l afinního prostoru \mathbb{A}_n , nazveme **různoběžné**, jestliže je jejich průnik neprázdný; v opačném případě je nazýváme **mimoběžné**.

Z definice různoběžných podprostorů a věty 1.3.1 ihned plyne:

Věta 1.3.3. *Nechť jsou dány dva nerovnoběžné podprostory $\mathbb{A}'_k = \{A, V'_k\}$, $\mathbb{A}''_l = \{B, V''_l\}$ afinního prostoru \mathbb{A}_n . Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) podprostory \mathbb{A}'_k a \mathbb{A}''_l jsou různoběžné;
- (ii) $A - B \in V'_k \vee V''_l$, kde $V'_k \vee V''_l$ je spojení zaměření V'_k a V''_l . \square

Připomeňme, že **spojením** $W \vee W'$ **vektorových podprostorů** W a W' rozumíme nejmenší podprostor obsahující jak W , tak W' , tj. lineární obal sjednocení $W \cup W'$. Tedy $W \vee W' = \langle W \cup W' \rangle$. V lineární algebře se dále dokazuje tzv. *Věta o dimenzi spojení a průniku* dvou podprostorů vektorového prostoru V_n , podle níž platí

$$\dim(W \vee W') + \dim(W \cap W') = \dim(W) + \dim(W'). \quad (1.21)$$

Příklad 1.3.2. Vzájemná poloha dvou přímek

Buďte $p = \{A, \vec{u}\}$, $q = \{B, \vec{v}\}$ dvě přímky v afinním prostoru \mathbb{A}_n , $n \geq 2$. Potom s využitím vět 1.3.2 a 1.3.3 dostáváme:

$\langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{v} \rangle$ \Downarrow $\vec{u}, \vec{v} \dots$ LZ	$A - B \in \langle \vec{u} \rangle$ $\Leftrightarrow A - B, \vec{u} \dots$ LZ	přímky p, q jsou splyňující
	$A - B \notin \langle \vec{u} \rangle$ $\Leftrightarrow A - B, \vec{u} \dots$ LN	přímky p, q jsou rovnoběžné disjunktní
$\langle \vec{u} \rangle \neq \langle \vec{v} \rangle$ \Downarrow $\vec{u}, \vec{v} \dots$ LN	$A - B \in \langle \vec{u} \rangle \vee \langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ $\Leftrightarrow A - B, \vec{u}, \vec{v} \dots$ LZ	přímky p, q jsou různoběžné
	$A - B \notin \langle \vec{u} \rangle \vee \langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ $\Leftrightarrow A - B, \vec{u}, \vec{v} \dots$ LN <i>(nemůže nastat ve V_2)</i>	přímky p, q jsou mimoběžné <i>(nemůže nastat v \mathbb{A}_2)</i>

V případě různoběžnosti přímek p, q pro jejich společný bod P (tzv. **průsečík**) platí $P = A + t_0\vec{u} = B + r_0\vec{v}$, kde t_0, r_0 najdeme jakožto řešení soustavy rovnic $t\mathbf{u} - r\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ (po rozepsání do souřadnic v \mathbb{A}_n soustava n rovnic o dvou neznámých).

Příklad 1.3.3. Vzájemná poloha přímky a roviny

Buďte $p = \{A, \vec{u}\}$, $\rho = \{B, \vec{v}, \vec{w}\}$ přímka a rovina v afinním prostoru \mathbb{A}_n , $n \geq 3$. Potom s využitím vět 1.3.2 a 1.3.3 dostáváme:

$\langle \vec{u} \rangle \subset \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ \Downarrow $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$ LZ	$A - B \in \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ $\Leftrightarrow A - B, \vec{v}, \vec{w} \dots$ LZ	přímka p a rovina ρ jsou incidentní
	$A - B \notin \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ $\Leftrightarrow A - B, \vec{v}, \vec{w} \dots$ LN	přímka p a rovina ρ jsou rovnoběžné disjunktní
$\langle \vec{u} \rangle \not\subset \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ \Downarrow $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$ LN	$A - B \in \langle \vec{u} \rangle \vee \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ $\Leftrightarrow A - B, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$ LZ	přímka p a rovina ρ jsou různoběžné
	$A - B \notin \langle \vec{u} \rangle \vee \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ $\Leftrightarrow A - B, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$ LN <i>(nemůže nastat ve V_3)</i>	přímka p a rovina ρ jsou mimoběžné <i>(nemůže nastat v \mathbb{A}_3)</i>

V případě různoběžnosti přímky p a roviny ρ pro jejich společný bod P (**průsečík**) platí $P = A + t_0\vec{u} = B + r_0\vec{v} + s_0\vec{w}$, kde t_0, r_0, s_0 najdeme jakožto řešení soustavy rovnic $t\mathbf{u} - r\mathbf{v} - s\mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Příklad 1.3.4. Vzájemná poloha dvou rovin

Buďte $\rho = \{A, \vec{u}, \vec{v}\}$, $\sigma = \{B, \vec{w}, \vec{z}\}$ dvě roviny v afinním prostoru \mathbb{A}_n , $n \geq 3$. Potom s využitím vět 1.3.2 a 1.3.3 dostáváme:

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle$ \Updownarrow $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$ LZ \wedge $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z} \dots$ LZ	$A - B \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ $\Leftrightarrow A - B, \vec{u}, \vec{v} \dots$ LZ $A - B \notin \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ $\Leftrightarrow A - B, \vec{u}, \vec{v} \dots$ LN	roviny ρ a σ jsou splývající roviny ρ a σ jsou rovnoběžné disjunktní
$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \neq \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle$ \Updownarrow $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$ LN \vee $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z} \dots$ LN	$A - B \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vee \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle$ $A - B \notin \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vee \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle$ <i>(nemůže nastat ve V_3)</i>	roviny ρ a σ jsou různoběžné roviny ρ a σ jsou mimoběžné <i>(nemůže nastat v \mathbb{A}_3)</i>

V \mathbb{A}_3 se dvě různoběžné roviny ρ, σ protínají v přímce p , která se nazývá jejich **průsečnice**. Průsečnice je uvedenými dvěma rovinami jednoznačně určena a pro nalezení její parametrické rovnice můžeme použít např. algoritmus pro hledání průsečíku roviny σ s přímkou $p \subset \rho$ o rovnici $X = A + t\vec{u}$ ($p \cap \sigma = \{P\}$) a roviny σ s přímkou $q \subset \rho$ o rovnici $X = A + r\vec{v}$ ($q \cap \sigma = \{Q\}$). Potom dostáváme $\rho \cap \sigma = p \Leftrightarrow PQ$.

Oproti tomu v $\mathbb{A}_n, n \geq 4$ mohou mít dvě různoběžné roviny ρ, σ buďto společnou přímku, nebo společný jediný bod. S využitím vztahu (1.21) totiž můžeme psát

$$\dim(V_2' \vee V_2'') + \dim(V_2' \cap V_2'') = \dim(V_2') + \dim(V_2'') = 4,$$

tedy je-li $\dim(V_2' \vee V_2'') = 3$ (resp. $= 4$), je $\dim(V_2' \cap V_2'') = 1$ (resp. $= 0$) a průnikem je přímka (resp. bod).

Příklad 1.3.5. Vzájemná poloha přímky a nadroviny

Buďte $p = \{B, \vec{u}\}, \eta : \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0$ přímka a nadrovina v afinním prostoru $\mathbb{A}_n, n \geq 2$ (tj. pro $n = 2$ přímka, pro $n = 3$ rovina atd.) Potom s využitím vět 1.3.2 a 1.3.3 dostáváme:

$\langle \vec{u} \rangle \subset V_{n-1}^\eta$ \Updownarrow $\sum_{i=1}^n a_i u_i = 0$	$B \in \eta$ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i + a_0 = 0$ $B \notin \eta$ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i + a_0 \neq 0$	přímka p a nadrovina η jsou incidentní přímka p a nadrovina η jsou rovnoběžné disjunktní
$\langle \vec{u} \rangle \not\subset V_{n-1}^\eta$ \Updownarrow $\sum_{i=1}^n a_i u_i \neq 0$	$V_{n-1}^\eta \vee \langle \vec{u} \rangle = V_n$, kde V_n je zaměření prostoru \mathbb{A}_n	přímka p a nadrovina η jsou různoběžné

Vzhledem k tomu, že v případě $\langle \vec{u} \rangle \not\subset V_{n-1}^\eta$ je spojením $V_{n-1}^\eta \vee \langle \vec{u} \rangle$ celkové zaměření afinního prostoru \mathbb{A}_n , je tedy vždy splněna podmínka (ii) věty 1.3.3, a proto nemůže nastat *mimoběžnost* přímky a nadroviny.

Průsečík $P = B + t_0 \vec{u}$ přímky p a nadroviny η najdeme řešením soustavy $\mathbf{x} = \mathbf{b} + t_0 \mathbf{u}$, $\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0$, čímž dostaneme

$$t_0 = - \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i + a_0}{\sum_{i=1}^n a_i u_i}.$$

Příklad 1.3.6. Vzájemná poloha roviny a nadroviny

Buďte $\varrho = \{B, \vec{u}, \vec{v}\}$, $\eta : \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0$ rovina a nadrovina v afinním prostoru \mathbb{A}_n , $n \geq 3$ (tj. pro $n = 3$ rovina atd.) Potom s využitím vět 1.3.2 a 1.3.3 dostáváme:

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \subset V_{n-1}^\eta$ \Downarrow $\sum_{i=1}^n a_i u_i = 0$ \wedge $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$	$B \in \eta$ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i + a_0 = 0$	rovina ϱ a nadrovina η jsou incidentní
$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \not\subset V_{n-1}^\eta$ \Downarrow $\sum_{i=1}^n a_i u_i \neq 0$ \vee $\sum_{i=1}^n a_i v_i \neq 0$	$B \notin \eta$ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i + a_0 \neq 0$	rovina ϱ a nadrovina η jsou rovnoběžné disjunktní
$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \not\subset V_{n-1}^\eta$ \Downarrow $\sum_{i=1}^n a_i u_i \neq 0$ \vee $\sum_{i=1}^n a_i v_i \neq 0$	$V_{n-1}^\eta \vee \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = V_n$, kde V_n je zaměření prostoru \mathbb{A}_n	rovina ϱ a nadrovina η jsou různoběžné

Vzhledem k tomu, že v případě $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \not\subset V_{n-1}^\eta$ je spojením $V_{n-1}^\eta \vee \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ celkové zaměření afinního prostoru \mathbb{A}_n , je tedy vždy splněna podmínka (ii) věty 1.3.3, a proto nemůže nastat *mimoběžnost* roviny a nadroviny.

Navíc s využitím vztahu (1.21) můžeme psát

$$\dim(V'_2 \vee V_{n-1}^\eta) + \dim(V'_2 \cap V_{n-1}^\eta) = \dim(V'_2) + \dim(V_{n-1}^\eta) = n + 1,$$

tedy neboť $\dim(V'_2 \vee V_{n-1}^\eta) = n$, potom musí být $\dim(V'_2 \cap V_{n-1}^\eta) = 1$ a rovina ϱ nadrovina η mají společnou přímku (průsečnici).

Příklad 1.3.7. Vzájemná poloha dvou nadrovin

Buďte $\eta : \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0$, $\varepsilon : \sum_{i=1}^n b_i x_i + b_0 = 0$ dvě nadroviny v afinním prostoru \mathbb{A}_n , $n \geq 2$ (tj. pro $n = 2$ dvě přímky, pro $n = 3$ dvě roviny atd.) Potom s využitím vět 1.3.2 a 1.3.3 dostáváme:

$(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ jsou LZ \Downarrow $V_{n-1}^\eta = V_{n-1}^\varepsilon$	(a_0, a_1, \dots, a_n) a (b_0, b_1, \dots, b_n) jsou LZ	nadroviny η a ε jsou splývající
	(a_0, a_1, \dots, a_n) a (b_0, b_1, \dots, b_n) jsou LN	nadroviny η a ε jsou rovnoběžné různé
$(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ jsou LN \Downarrow $V_{n-1}^\eta \neq V_{n-1}^\varepsilon$	$V_{n-1}^\eta \vee V_{n-1}^\varepsilon = V_n$, kde V_n je zaměření prostoru \mathbb{A}_n	nadroviny η a ε jsou různoběžné

Vzhledem k tomu, že v případě $V_{n-1}^\eta \neq V_{n-1}^\varepsilon$ je spojením $V_{n-1}^\eta \vee V_{n-1}^\varepsilon$ celkové zaměření afinního prostoru \mathbb{A}_n , je tedy vždy splněna podmínka (ii) věty 1.3.3, a proto nemůže nastat *mimoběžnost* dvou nadrovin.

V předcházejících třech případech jsme při vyšetřování vzájemné polohy nadroviny η a jistého dalšího podprostoru (přímka, rovina, další nadrovina) zjistili, že pro tyto dvojice podprostorů *nikdy* nenastává mimoběžnost. Uvedený závěr se dá zobecnit do následující věty:

Věta 1.3.4. *Nechť jsou v prostoru \mathbb{A}_n dány nadrovina \mathbb{A}'_{n-1} a další podprostor \mathbb{A}''_k . Potom jsou tyto podprostory buďto rovnoběžné, anebo různoběžné, přičemž jejich průnik má dimenzi $k - 1$.* \square

Důkaz: Uvažujme nadrovinu $\mathbb{A}'_{n-1} = \{A; V'_{n-1}\}$ a podprostor $\mathbb{A}''_k = \{B; V''_k\}$. Potom zřejmě nastává právě jedna z těchto možností:

- (i) $V''_k \subseteq V'_{n-1} \Rightarrow \mathbb{A}''_k \parallel \mathbb{A}'_{n-1}$;
- (ii) $V''_k \not\subseteq V'_{n-1} \Rightarrow V'_{n-1} \vee V''_k = V_n$. Odtud ihned dostáváme $A - B \in (V'_{n-1} \vee V''_k)$ a podle věty 1.3.3 jsou tedy podprostory $\mathbb{A}'_{n-1}, \mathbb{A}''_k$ různoběžné. Navíc podle vztahu (1.21) můžeme psát

$$\begin{aligned} \dim(V''_k \vee V'_{n-1}) + \dim(V'_k \cap V''_{n-1}) &= \dim(V'_k) + \dim(V''_{n-1}) \\ n + \dim(V'_k \cap V''_{n-1}) &= k + (n - 1), \end{aligned}$$

odkud již snadno nahlédneme, že průnik podprostorů $\mathbb{A}'_{n-1}, \mathbb{A}''_k$ má dimenzi $k - 1$. \square

Příklad 1.3.8.

Určete vzájemnou polohu přímky $p : X = [1, 3, -1, 5] + t(3, 2, 2, -1)$ a roviny $\varrho : X = [0, 0, 1, 3] + r(1, 2, 0, 1) + s(1, 0, 1, -1)$.

Řešení:

(i) Nejprve rozhodneme, zdali jsou dané podprostory rovnoběžné ($\Leftrightarrow V_1^p \subset V_2^q$). Ověříme tedy lineární závislost vektorů $\vec{u} = (3, 2, 2, -1)$, $\vec{v} = (1, 2, 0, 1)$, $\vec{w} = (1, 0, 1, -1)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Druhý řádek je (-2) -násobkem třetího, a proto jsou vektory lineárně závislé. Příмка a rovina jsou tedy rovnoběžné.

(ii) Zjistíme ještě, zdali jde o rovnoběžné disjunktní, nebo incidentní podprostory. Podle věty V.1.3.2 tedy musíme ověřit lineární závislost vektorů $B - A$, \vec{v} , \vec{w} ($A = [0, 0, 1, 3]$, $B = [1, 3, -1, 5]$, tj. $B - A = (1, 3, -2, 2)$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je vidět, že vektory jsou lineárně nezávislé, proto příмка p a rovina q nemají žádný společný bod a jsou tedy rovnoběžné disjunktní. \square

Příklad 1.3.9.

Určete vzájemnou polohu dvou rovin $\varrho = \{A, \vec{u}, \vec{v}\}$ a $\sigma = \{B, \vec{w}, \vec{x}\}$, kde $A = [4, 2, 2, 2]$, $\vec{u} = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, 0, 3, 2)$ a $B = [-2, -2, 2, 0]$, $\vec{w} = (-1, 0, 5, 0)$, $\vec{x} = (2, 2, 1, 0)$.

Řešení:

(i) Nejprve rozhodneme, zdali jsou dané roviny rovnoběžné ($\Leftrightarrow V_2^q = V_2^\sigma$). Ověříme tedy lineární závislost trojice vektorů $\vec{u} = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, 0, 3, 2)$, $\vec{w} = (-1, 0, 5, 0)$ a trojice vektorů $\vec{u} = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, 0, 3, 2)$, $\vec{x} = (2, 2, 1, 0)$. Snadno bychom ukázali, že jak první, tak druhá trojice jsou skupinami lineárně nezávislých vektorů, a proto roviny ϱ , σ nejsou rovnoběžné.

(ii) V předcházející části jsme ukázali, že vektory \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} jsou lineárně nezávislé a rovněž vektory \vec{u} , \vec{v} , \vec{x} jsou lineárně nezávislé. Z toho plyne, že spojením zaměření $V_2^q \vee V_2^\sigma$ je generováno 4 vektory $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \rangle$, tj. jedná se o zaměření celého afinního prostoru \mathbb{A}_4 . Podle věty V.1.3.3 musíme dále ověřit, zdali vektor $B - A$ náleží spojení $V_2^q \vee V_2^\sigma = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \rangle$, což samozřejmě vzhledem k tomu, že jde o zaměření \mathbb{A}_4 , nastává. Roviny ϱ a σ mají proto společný neprázdný průnik a jsou tedy různoběžné.

Závěrem hledáme průnik obou rovin, přičemž nejprve zjistíme jeho dimenzi. Podle vztahu (1.21) je $\dim(V_2^q \cap V_2^\sigma) = 2 + 2 - 4 = 0$, tj. obě roviny mají

společný průsečík. Ten určíme řešením soustavy 4 rovnic o 4 neznámých

$$[4, 2, 2, 2] + t(1, 0, 0, -1) + r(1, 0, 3, 2) = [-2, -2, 2, 0] + k(-1, 0, 5, 0) + l(2, 2, 1, 0).$$

Vypočteme $t = 0$, $r = -1$, $k = -1$, $l = 2$ a po dosazení do parametrické rovnice roviny ϱ , resp. σ obdržíme souřadnice průsečíku $P = [3, 2, -1, 0]$. \diamond

Příklad 1.3.10.

Určete vzájemnou polohu rovin $\alpha : 2x + 3y - z + 4 = 0$ a $\beta = \{A, \vec{u}, \vec{v}\}$, kde $A = [2, 1, 5]$, $\vec{u} = (2, -1, -1)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$.

Řešení: S využitím věty V.1.2.4 se snadno se přesvědčíme, že $\vec{u} \notin V_2^\alpha$ a $\vec{v} \notin V_2^\alpha$, a proto $V_2^\alpha \neq V_2^\beta$. Roviny α a β tudíž nejsou rovnoběžné. Vzhledem k tomu, že v \mathbb{A}_3 jde o nadroviny, nemohou být podle V.1.3.4 mimoběžné, a proto jsou různoběžné.

Hledáme jejich průsečnici s . Přímka $p = \{A, \vec{u}\} \subset \beta$ s parametrickým vyjádřením $X = [2, 1, 5] + t(2, -1, -1)$ protíná rovinu α v průsečíku P . Jeho souřadnice snadno zjistíme řešením rovnice, kterou obdržíme dosazením z parametrického vyjádření přímky p do obecné rovnice roviny α

$$2(2 + 2t) + 3(1 - t) - (5 - t) + 4 = 0.$$

Výpočtem zjistíme $t = -3$ a po dosazení do parametrického vyjádření přímky p dostaneme $P = [-4, 4, 8]$. Obdobně přímka $q = \{A, \vec{v}\} \subset \beta$ s parametrickým vyjádřením $X = [2, 1, 5] + r(1, 1, -1)$ protne rovinu α v průsečíku Q , jehož souřadnice určíme řešením rovnice

$$2(2 + r) + 3(1 + r) - (5 - r) + 4 = 0.$$

Výpočtem zjistíme $r = -1$ a po dosazení do parametrického vyjádření přímky q dostaneme $Q = [1, 0, 6]$. Parametrické vyjádření průsečnice $s = PQ$ je $X = P + \lambda(Q - P)$, tj. $X = [-4, 4, 8] + \lambda(5, -4, -2)$. \diamond

Příčka mimoběžných podprostorů. Přímku různoběžnou s dvěma mimoběžnými podprostory $\mathbb{A}'_k, \mathbb{A}''_l$ prostoru \mathbb{A}_n nazýváme jejich **příčkou**.

Příklad 1.3.11. Příčka daného směru. Buďte dány v prostoru \mathbb{A}_3 dvě mimoběžky $p : X = A + t\vec{u}$, $q : X = B + r\vec{v}$. Úkolem je vést příčku rovnoběžnou s danou příčkou o směrovém vektoru \vec{w} — tj. příčku daného směru $\langle \vec{w} \rangle$, přičemž předpokládáme $\vec{w} \notin \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Průsečíky příčky r s mimoběžkami p, q označme po řadě P, Q . Ze zadání je zřejmé, že vektor $Q - P$ musí být lineární kombinací vektoru \vec{w} . Každé čtyři

vektory v \mathbb{A}_3 jsou lineárně závislé, tj. i vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, B - A$, a proto lze jeden z nich (např. $B - A$) vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících

$$B - A = k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w}.$$

Řešením soustavy tří rovnic o třech neznámých $\mathbf{b} - \mathbf{a} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v} + k_3\mathbf{w}$ získáme k_1, k_2, k_3 a pouhým přeuspořádáním dostaneme vztahy pro body P, Q

$$\underbrace{(B - k_2\vec{v})}_{= Q} - \underbrace{(A + k_1\vec{u})}_{= P} = k_3\vec{w}. \quad (1.22)$$

Podmínka $\vec{w} \notin \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ garantuje, že úloha má právě jedno řešení. \square

Příklad 1.3.12. Příčka procházející daným bodem M . Uvažujme opět v prostoru \mathbb{A}_3 dvě mimoběžky p, q . Úkolem je tentokrát vést příčku procházející daným bodem M , přičemž předpokládáme $M - A, M - B \notin \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Průsečíky příčky r s mimoběžkami p, q označíme opět P, Q . Hledáme konkrétní hodnoty parametrů t_0, r_0 takové, že

$$P = A + t_0\vec{u} \quad \text{a} \quad Q = B + r_0\vec{v}$$

Z kolinearity bodů P, Q, M plyne lineární závislost vektorů $M - P$ a $M - Q$. Úloha vede na řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\mathbf{m} - \mathbf{a} - t\mathbf{u} = k \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{b} - r\mathbf{v}). \quad (1.23)$$

Podmínka $M - A, M - B \notin \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ garantuje, že úloha má právě jedno řešení. \square

Příklad 1.3.13.

V prostoru \mathbb{A}_3 jsou dány dvě mimoběžky $a = \{A, \vec{u}\}, b = \{B, \vec{v}\}$, kde $A = [1, -2, 0], \vec{u} = (1, 2, 3)$ a $B = [3, 0, 4], \vec{v} = (2, -1, -1)$. Určete jejich příčku c rovnoběžnou s přímkou o směrovém vektoru $\vec{w} = (-1, 1, 1)$;

Řešení:

Označme hledané průsečíky příčky c s oběma mimoběžkami a, b po řadě P a Q . V souladu s postupem z příkladu 1.3.11 platí pro tyto body vztah

$$Q - P = (B + r\vec{v}) - (A + t\vec{u}) = k\vec{w},$$

což rozepsáno do souřadnic poskytuje soustavu rovnic

$$\begin{aligned} t - 2r - k &= 2 \\ 2t + r + k &= 2 \\ 3t + r + k &= 4 \end{aligned}$$

Řešením získáme $t = 2, r = 2, k = -4$ a odtud $P = [3, 2, 6]$ a $Q = [7, -2, 2]$. \diamond

O tom, že výše uvedenými algoritmy lze určit příčku libovolných dvou mimoběžných podprostorů v libovolném afinním prostoru (pokud příčka požadovaných vlastností existuje) se můžeme přesvědčit v následujícím příkladu:

Příklad 1.3.14.

V \mathbb{A}_4 určete příčku q mimoběžných podprostorů, kterými jsou přímka $p = \{A, \vec{u}\}$ a rovina $\rho = \{B, \vec{v}, \vec{w}\}$, kde $A = [0, 0, -6, -7]$, $\vec{u} = (1, 1, 2, 1)$ a $B = [2, 1, 1, 1]$, $\vec{v} = (1, 2, -1, 1)$, $\vec{w} = (-1, 2, 1, 2)$, víte-li, že příčka prochází bodem $M = [7, -2, -1, 0]$.

Řešení: Průsečíky příčky q s přímkou p a rovinou ρ označíme po řadě P, R . V souladu s postupem z příkladu 1.3.12 platí

$$M - R = \lambda(M - P), \quad \text{resp.} \quad M - B - r\vec{v} - s\vec{w} = \lambda(M - A - t\vec{u}),$$

tj. po rozepsání do souřadnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 7\lambda + r - s - \lambda t &= 5 \\ -2\lambda + 2r + 2s - \lambda t &= -3 \\ 5\lambda - r + s - 2\lambda t &= -2 \\ 7\lambda + 2r + 2s - \lambda t &= -1 \end{aligned}$$

Řešením obdržíme $t = 1, r = 1, s = -2, \lambda = \frac{1}{3}$ a odtud $P = [1, 1, -4, -6]$, $R = [5, -1, -2, -2]$. \diamond

1.4 Svazky a trsy nadrovin

Svazky nadrovin. Podle věty V.1.3.4 mohou být dvě nadroviny v \mathbb{A}_n buďto různoběžné (průnikem je podprostor dimenze $n - 2$), popř. rovnoběžné (mají společné zaměření dimenze $n - 1$). Uvedená věta nás tedy opravňuje vyslovit následující definici:

DEFINICE 1.4.1.

Množinu všech nadrovin v prostoru \mathbb{A}_n , které mají neprázdný průnik dimenze $n - 2$, nazýváme **svazek nadrovin prvního druhu** (budeme značit Σ^1).

Množinu všech navzájem rovnoběžných nadrovin v prostoru \mathbb{A}_n (tj. množinu všech nadrovin se společným vektorovým zaměřením dimenze $n - 1$) nazýváme **svazek nadrovin druhého druhu**, popř. **osnova nadrovin** (budeme značit Σ^2).

Pohybujeme-li se v afinní rovině, potom je nadrovinou přímka a společný průnik má dimenzi 0. **Svazkem přímek 1. druhu** v \mathbb{A}_2 rozumíme tedy množinu všech přímek, které procházejí jedním bodem (tzv. **středem svazku**). Obdobně v \mathbb{A}_3 hovoříme o **svazku rovin I. druhu** jakožto množině všech rovin, které procházejí jednou přímkou (tzv. osou svazku).

Svazek nadrovin je určen, jsou-li známy dvě jeho různé nadroviny. Tyto určující nadroviny nazýváme **základní nadroviny svazku**. Necht' rovnice obou základních nadrovin jsou

$$f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0 \quad \text{a} \quad f_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n b_i x_i + b_0 = 0$$

Věta 1.4.1. *Jsou-li $f_1(\mathbf{x}) = 0$, $f_2(\mathbf{x}) = 0$ rovnice dvou základních nadrovin, potom rovnice libovolné nadroviny svazku Σ^1 lze zapsat ve tvaru*

$$\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.24)$$

kde λ_1, λ_2 jsou reálná čísla, z nichž alespoň jedno je nenulové. Naopak platí, že každá rovnice tvaru (1.24), kde λ_1, λ_2 jsou reálná čísla, z nichž alespoň jedno je nenulové, je rovnicí nějaké nadroviny daného svazku. \square

Důkaz: Uvažujme základní nadroviny svazku

$$\varrho_1 : f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0, \quad \text{a} \quad \varrho_2 : f_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n b_i x_i + b_0,$$

jež jsou v případě Σ^1 různoběžné, a proto

$$\text{hod} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \text{hod} \left(\begin{array}{cccc|c} a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_0 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_0 \end{array} \right) = 2. \quad (1.25)$$

Zodpovězme ještě otázku, proč je nutné předpokládat $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. Upravíme-li vztah (1.24), potom dostaneme

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i) x_i + (a_0 + b_0) = 0.$$

Tato rovnice je rovnicí nadroviny, právě když *nenastává*(!)

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 = 0, \quad \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n = 0. \quad (1.26)$$

Homogenní soustava (1.26) má vzhledem k (1.25) jediné, a to triviální řešení $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. V každém jiném případě popisuje $\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{x}) = 0$ nadrovinu.

Vlastní důkaz provedeme ve dvou krocích.

(a) Nejprve ukážeme, že nadrovina η daná rovnicí $f(\mathbf{x}) = \lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{x}) = 0$ je nadrovinou svazku. Zvolme libovolný bod $M \in \varrho_1 \cap \varrho_2$, tj. platí

$$M \in \varrho_1 \Rightarrow f_1(\mathbf{m}) = 0 \quad \text{a} \quad M \in \varrho_2 \Rightarrow f_2(\mathbf{m}) = 0.$$

Nyní už snadno nahlédneme, že platí

$$f(\mathbf{m}) = \lambda_1 f_1(\mathbf{m}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{m}) = 0 \Rightarrow M \in \eta.$$

Každý bod průniku nadrovin ϱ_1, ϱ_2 tedy leží v nadrovině η , a proto se jedná o nadrovinu svazku určeného uvedenými nadrovinami.

(b) Nyní ukážeme, že každou nadrovinu svazku lze vyjádřit rovnicí (1.24). Pro základní roviny tvrzení evidentně platí. Libovolnou nadrovinu svazku η různou od základních nadrovin ϱ_1, ϱ_2 jednoznačně určíme jejich průnikem a dalším bodem N mimo obě nadroviny, tj. platí $f_1(\mathbf{n}) \neq 0 \wedge f_2(\mathbf{n}) \neq 0$. Dále

$$N \in \eta \Rightarrow f(\mathbf{n}) = \lambda_1 f_1(\mathbf{n}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{n}) = 0,$$

a proto volbou $\lambda_1 = f_2(\mathbf{n}), \lambda_2 = -f_1(\mathbf{n})$ dostaneme rovnici nadroviny ve tvaru (1.24), jež prochází bodem N a průnikem $\varrho_1 \cap \varrho_2$, tj. rovnici nadroviny η . \square

Pro svazek 2. druhu platí obdobná věta jako v případě svazku 1. druhu. Jedinou změnou je podmínka, kterou musejí splňovat reálná čísla λ_1, λ_2 . Jelikož základní nadroviny

$$\varrho_1 : f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0, \quad \text{a} \quad \varrho_2 : f_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n b_i x_i + b_0 = 0$$

jsou tentokrát rovnoběžné, tj.

$$\text{hod} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} = 1,$$

musíme předpokládat, že λ_1, λ_2 nejsou řešením homogenní soustavy (1.26).

Věta 1.4.2. *Jsou-li $f_1(\mathbf{x}) = 0, f_2(\mathbf{x}) = 0$ rovnice dvou základních nadrovin, potom rovnice libovolné nadroviny svazku Σ^2 lze zapsat ve tvaru*

$$\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{x}) = 0, \tag{1.27}$$

kde λ_1, λ_2 jsou reálná čísla, která nejsou řešením homogenní soustavy (1.26). Naopak platí, že každá rovnice tvaru (1.27), kde λ_1, λ_2 jsou reálná čísla,

jež nejsou řešením homogenní soustavy (1.26), je rovnicí nějaké nadroviny daného svazku. \square

Důkaz je analogický důkazu předcházející věty.

Příklad 1.4.1. Najděte rovinu $\varrho \subset \mathbb{A}_3$, jež prochází bodem $M = [1, 2, 3]$ a průsečnicí rovin $\alpha : 3x + y - z = 0$ a $\beta : 2x + y + z - 1 = 0$.

Řešení: Hledaná rovina prochází průsečnicí rovin α, β (tj. náleží svazku rovin Σ určenému základními rovinami α a β), a proto má podle věty V.1.4.1. rovnici

$$\varrho : \lambda_1(3x + y - z) + \lambda_2(2x + y + z - 1) = 0.$$

Bod M leží v rovině ϱ , a proto jeho souřadnice můžeme dosadit do rovnice této roviny

$$\lambda_1(3 + 2 - 3) + \lambda_2(2 + 2 + 3 - 1) = 2, \quad \text{tj.}$$

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0.$$

Můžeme zvolit např. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ a po dosazení do výše uvedené rovnice dostáváme $\varrho : 7x + 2y - 4z + 1 = 0$. \diamond

Věta 1.4.3. Nadroviny $\varrho_1 : \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0, \varrho_2 : \sum_{i=1}^n b_i x_i + b_0 = 0$ a $\varrho_3 : \sum_{i=1}^n c_i x_i + c_0 = 0$ náležejí témuž svazku, právě když

$$\text{hod} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_0 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_0 \end{pmatrix} = 2. \quad \square \quad (1.28)$$

Důkaz: (\Rightarrow) Nadroviny $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ náležejí témuž svazku \Rightarrow jedna rovnice je lineární kombinací zbývajících, tj. jeden řádek matice lze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících dvou \Rightarrow hod = 2.

(\Leftarrow) Naopak nechť hod = 2 \Rightarrow jeden řádek lze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících dvou \Rightarrow nadroviny $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ náležejí témuž svazku. \square

Poznámka 1.4.1. Poznamenejme ještě, že platí-li jednak (1.28) a současně

$$\text{hod} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \Rightarrow \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \in \Sigma^1, \\ 1 & \Rightarrow \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \in \Sigma^2. \end{cases}$$

Příklad 1.4.2. Rozhodněte, zda tři nadroviny afinního prostoru \mathbb{A}_4 $\eta_1 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5 = 0, \eta_2 : x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 1 = 0$ a $\eta_3 : 3x_1 + 3x_2 + x_4 - 9 = 0$ náležejí témuž svazku. Jestliže ano, rozhodněte o jeho druhu.

Řešení: Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\text{hod} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right) = \text{hod} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right) = 2,$$

a proto podle věty V.1.4.3 a poznámky uvedené za touto větou zadané nadroviny náležejí témuž svazku prvního druhu. \diamond

Trsy nadrovin. Věta V.1.4.3 hovoří o situaci, kdy tři nadroviny náležejí témuž svazku. Následující věta pak popisuje vzájemnou polohu tří nadrovin, jež témuž svazku nenáležejí.

Věta 1.4.4. *Tři nadroviny α, β, γ afinního prostoru \mathbb{A}_n , jež nenáležejí témuž svazku nadrovin, mají právě jednu z následujících vzájemných poloh:*

- (i) *průnikem je afinní podprostor dimenze $n - 3$;*
- (ii) *průnik nadrovin je prázdný, přičemž všechna vektorová zaměření obsahují tentýž vektorový podprostor dimenze $n - 2$.* \square

Důkaz: Pokud tři nadroviny nenáležejí témuž svazku, pak jsou určité aspoň dvě z nich různoběžné a jejich průnik má dimenzi $n - 2$; bez újmy na obecnosti uvažujme např. $\alpha \cap \beta = \mathbb{A}'_{n-2}$. Podle věty V.1.3.4 pak mohou nastat tyto dvě možnosti pro vzájemnou polohu nadroviny γ a podprostoru \mathbb{A}'_{n-2} :

- (i) $\mathbb{A}'_{n-2} \cap \gamma = \mathbb{A}''_{n-3}$;
- (ii) $\mathbb{A}'_{n-2} \parallel \gamma$ (tj. zaměření γ obsahuje zaměření podprostoru \mathbb{A}'_{n-2}).

Odtud již přímo plyne dokazované tvrzení. \square

DEFINICE 1.4.2.

Množinu všech nadrovin v prostoru \mathbb{A}_n , $n \geq 3$, které mají neprázdný průnik dimenze $n - 3$, nazýváme **trs nadrovin prvního druhu** (budeme značit τ^1).

Množinu všech nadrovin v prostoru \mathbb{A}_n , $n \geq 3$, jejichž vektorová zaměření obsahují společný vektorový podprostor dimenze $n - 2$, nazýváme **trs nadrovin druhého druhu** (budeme značit τ^2).

Pohybujeme-li se v prostoru \mathbb{A}_3 , potom je nadrovinou rovina a společný průnik má dimenzi 0. **Trsem rovin 1. druhu** tedy rozumíme množinu všech rovin, které procházejí jedním bodem (tzv. **vrcholem trsu**). **Trsem rovin 2. druhu** pak rozumíme množinu všech rovin, jež jsou rovnoběžné s danou přímkou (tj. obsahují týž vektorový podprostor dimenze 1 neboli směr).

Trs nadrovin je určen, jsou-li známy tři jeho různé nadroviny. Tyto určující nadroviny nazýváme **základní nadroviny trsu**. Nechť rovnice těchto

základních nadrovin jsou

$$f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0, \quad f_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n b_i x_i + b_0 = 0$$

$$\text{a } f_3(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i + c_0 = 0.$$

Věta 1.4.5. Jsou-li $f_1(\mathbf{x}) = 0$, $f_2(\mathbf{x}) = 0$, $f_3(\mathbf{x}) = 0$ rovnice tří základních nadrovin, potom rovnice libovolné nadroviny trsu τ^1 lze zapsat ve tvaru

$$\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{x}) + \lambda_3 f_3(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.29)$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou reálná čísla, z nichž alespoň jedno je nenulové. Naopak platí, že každá rovnice tvaru (1.29), kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou reálná čísla, z nichž alespoň jedno je nenulové, je rovnicí nějaké nadroviny daného trsu. \square

Důkaz se skládá stejně jako v případě obdobné věty u svazků 1. druhu ze tří částí. Rovněž zdůvodnění podmínky $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ je analogické.

A stejně jako v případě svazků nadrovin i pro trs nadrovin 2. druhu platí obdobná věta jako pro trs nadrovin 1. druhu; je však nutné opět předpokládat, že $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nejsou řešením homogenní soustavy

$$\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \lambda_3 c_i = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.30)$$

Věta 1.4.6. Jsou-li $f_1(\mathbf{x}) = 0$, $f_2(\mathbf{x}) = 0$, $f_3(\mathbf{x}) = 0$ rovnice tří základních nadrovin, potom rovnice libovolné nadroviny trsu τ^2 lze zapsat ve tvaru

$$\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{x}) + \lambda_3 f_3(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.31)$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou reálná čísla, která nejsou řešením homogenní soustavy (1.30). Naopak platí, že každá rovnice tvaru (1.31), kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou reálná čísla, jež nejsou řešením homogenní soustavy (1.30), je rovnicí nějaké nadroviny daného trsu. \square

Obdobně jako v případě věty 1.4.3 bychom mohli dokázat:

Věta 1.4.7. Uvažujme nadroviny $\varrho_1 : \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0$, $\varrho_2 : \sum_{i=1}^n b_i x_i + b_0 = 0$, $\varrho_3 : \sum_{i=1}^n c_i x_i + c_0 = 0$ a $\varrho_4 : \sum_{i=1}^n d_i x_i + d_0 = 0$. Tyto nadroviny náležejí témuž trsu, právě když

$$\text{hod} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_0 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_0 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n & d_0 \end{pmatrix} = 3. \quad \square \quad (1.32)$$

Poznámka 1.4.2. Platí-li jednak (1.32) a současně

$$\text{hod} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & \Rightarrow \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4 \in \tau^1, \\ 2 & \Rightarrow \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4 \in \tau^2. \end{cases}$$

Průniky nadrovin a vyjádření podprostorů rovnicemi. Ukázali jsme, že podprostor dimenze $n - 2$ lze popsat jakožto průnikový podprostor jisté množiny nadrovin — tzv. svazku nadrovin prvního druhu, přičemž pro určení svazku je zapotřebí dvou základních nadrovin. Obdobně jsme ukázali, že podprostor dimenze $n - 3$ lze popsat jakožto průnikový podprostor další množiny nadrovin — tzv. trsu nadrovin prvního druhu, přičemž pro určení je zapotřebí tří základních nadrovin.

Uvedené úvahy nás vedou k myšlence, zdali každý afinní podprostor dimenze k je možné určit jakožto průnik jistého počtu nadrovin.

Věta 1.4.8. *Nechť je v afinním prostoru \mathbb{A}_n dáno h ($1 \leq h \leq n$) nadrovin $\eta_i : \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j + a_{i,0} = 0$ takových, že matice (a_{ij}) ($i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, n$) vytvořená z koeficientů obecných rovnic nadrovin (mimo absolutních členů) má hodnotu h . Potom průnikem systému uvedených nadrovin je afinní podprostor dimenze $n - h$.*

Důkaz: Řešíme soustavu h rovnic o n neznámých takovou, že hodnota matice soustavy má hodnotu h (tj. existuje řešení). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je možné položit $x_1 = t_1, x_2 = t_2, \dots, x_{n-h} = t_{n-h}$ (jinak bychom provedli přeuspořádání). Dále určíme zbývající x_j v závislosti na zvolených $(n - h)$ parametrech. Získáme parametrické řešení soustavy, které lze interpretovat jako parametrické vyjádření podprostoru, jenž je dán jedním bodem a $n - h$ lineárně nezávislými vektory, tj. má dimenzi $n - h$. \square

Platí i věta obrácená:

Věta 1.4.9. *Každý podprostor \mathbb{A}'_k afinního prostoru \mathbb{A}_n lze vyjádřit jako průnik $n - k$ nadrovin z \mathbb{A}_n . \square*

Důkaz: Uvažujme podprostor $\mathbb{A}'_k = \{A, V'_k\}$, kde $V'_k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Vektory v_1, \dots, v_k lze samozřejmě doplnit na bázi $\langle v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ vektorového prostoru V_n (tj. celkového zaměření prostoru \mathbb{A}_n). Potom pro každý bod $X \in \mathbb{A}_n$ můžeme určit jeho souřadnice \mathbf{x} vzhledem k repéru $\langle A; v_1, \dots, v_n \rangle$. Zřejmě $X \in \mathbb{A}'_k \Leftrightarrow x_{k+1} = \dots = x_n = 0$. Lineárně nezávislé

rovnice $f_1(\mathbf{x}) = x_{k+1} = 0, \dots, f_{n-k}(\mathbf{x}) = x_n = 0$ podle předchozí věty popisují podprostor s dimenzí k (neboť $n - (n - k) = k$), v němž leží všechny body podprostoru \mathbb{A}'_k . Bod X tedy leží v \mathbb{A}'_k , právě když leží současně ve všech nadrovinách popsaných uvedenými $n - k$ rovnicemi $f_i(\mathbf{x}) = 0$. \square

Každý podprostor \mathbb{A}'_k afinního prostoru \mathbb{A}_n lze tedy popsat pomocí systému $n - k$ obecných rovnic nadrovin, jichž je tento podprostor průnikem. Množinu obecných rovnic uvedených nadrovin pak nazýváme **rovniciemi podprostoru** \mathbb{A}'_k . Je zřejmé, že rovnice nadrovin nejsou daným podprostorem určeny jednoznačně!

Příklad 1.4.3. V afinním prostoru \mathbb{A}_3 je parametricky dána přímka $p : X = [1, 2, -1] + t(-2, 0, 1)$. Určete rovnice tohoto podprostoru.

Řešení: Přímka jakožto podprostor dimenze 1 je v 3-rozměrném prostoru popsána $3 - 1 = 2$ obecnými rovnicemi jistých (ne jednoznačně určených) nadrovin. Takovými rovinami jsou např.

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x - 2z - 1 = 0,$$

$$\beta : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2y - 4 = 0,$$

tj. $p : x + 2z + 1 = 2y - 4 = 0$. \diamond

1.5 Podmnožiny afinních podprostorů

Lineární kombinace bodů. Již dříve jsme se zmínili o tom, že zatímco výraz $X + Y$ smysl nemá (není definován), přejdeme-li k souřadnicím a pracujeme následně s (aritmetickými) vektory, odpovídající výraz $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ již smysluplný je! Přesto existují situace, kdy i jisté *lineární kombinace bodů* nabývají konkrétního geometrického významu.

Uvažujme body $P_1, P_2, \dots, P_k \in \mathbb{A}_n$ a čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Zvolíme bod $O \in \mathbb{A}_n$ a sestrojíme bod X a vektor \vec{u} definované rovností

$$X = O + \underbrace{\lambda_1(P_1 - O) + \lambda_2(P_2 - O) + \dots + \lambda_k(P_k - O)}_{\vec{u}}. \quad (1.33)$$

Naším cílem je najít takovou podmínku, aby bod X , resp. vektor \vec{u} nezávisely na volbě bodu O , ale jen na bodech P_i a číslech λ_i . Zvolme tudíž ještě bod

$M \in \mathbb{A}_n$ a pro odlišení, vůči kterému zvolenému bodu (O nebo M) je sestrojený bod a vektor ze vztahu (1.33) vztažen, je označíme indexy — tj. X_O , \vec{u}_O a X_M , \vec{u}_M .

Platí $X_O = X_M \Leftrightarrow \vec{u}_O - \vec{u}_M = M - O$ a $\vec{u}_O = \vec{u}_M \Leftrightarrow \vec{u}_O - \vec{u}_M = \vec{o}$. Po jednoduché úpravě dostaneme

$$\vec{u}_O - \vec{u}_M = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)(M - O).$$

Je patrné, že pro $\forall O, M \in \mathbb{A}_n$ platí $X_O = X_M$, právě když $\sum \lambda_i = 1$, a $\vec{u}_O = \vec{u}_M$, právě když $\sum \lambda_i = 0$. Pro tyto případy má tedy smysl definovat lineární kombinaci bodů.

DEFINICE 1.5.1.

Nechť jsou dány body $O, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{A}_n$ a čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Je-li $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, resp. $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$, nazýváme *bod*

$$O + \lambda_1(P_1 - O) + \lambda_2(P_2 - O) + \dots + \lambda_k(P_k - O),$$

resp. *vektor*

$$\lambda_1(P_1 - O) + \lambda_2(P_2 - O) + \dots + \lambda_k(P_k - O),$$

lineární kombinací bodů P_1, \dots, P_k s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; zapisujeme

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k. \tag{1.34}$$

Přímo z definice plyne, že pro každý bod P je $1P = P$ a $0P = \vec{o}$.

Mohli bychom vyslovit (a dokázat) větu, která stejně jako v případě vektorů dává do souvislosti pojem lineární kombinace a lineární (ne)závislosti bodů.

Věta 1.5.1. *Body $P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{A}_n$ jsou lineárně závislé, právě když existuje netriviální ($\exists i \ c_i \neq 0$) lineární kombinace, že $\sum_{i=0}^k c_i P_i = \vec{o}$. \square*

Věta 1.5.2. *Bud' \mathbb{A}'_k podprostor určený lineárně nezávislými body $P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{A}_n$. Potom $X \in \mathbb{A}'_k$ právě tehdy, když existují taková čísla x_0, x_1, \dots, x_k , že $x_0 + x_1 + \dots + x_k = 1$ a $X = x_0 P_0 + x_1 P_1 + \dots + x_k P_k$. \square*

Důkaz: Při důkazu stačí pouze položit $A = P_0$, $x_0 = 1 - x_1 - \dots - x_n$ a použít parametrické vyjádření (1.12). \square

Dělicí poměr. Uvažujme tři kolineární body A, B, X . Je zřejmé, že vektory $B - X$ a $A - X$ jsou lineárně závislé, a definujeme:

DEFINICE 1.5.2.

Buďte dány $A, B, X \in p$ ($A \neq B, X \neq B$). Reálné číslo λ , pro něž platí

$$A - X = \lambda(B - X), \text{ resp. } X = \frac{A - \lambda B}{1 - \lambda},$$

nazýváme **dělicí poměr** bodu X vzhledem k bodům A, B (v tomto pořadí!).

Značíme: $\lambda = (A, B, X)$.

Všimněme si podrobněji druhého tvaru $X = \frac{A - \lambda B}{1 - \lambda}$. Ptáme se, zdali jde pouze o formální přepis, anebo zdali má i toto vyjádření geometrický význam. Jelikož jde o lineární kombinaci bodů A, B s koeficienty $\frac{1}{1 - \lambda}$ a $\frac{-\lambda}{1 - \lambda}$, jejichž součtem je 1, je v souladu s definicí D.1.5.1 výsledkem bod a uvedená lineární kombinace opravdu význam má.

Označíme-li x souřadnici bodu X vzhledem k lokální soustavě souřadnic $S(A; B - A)$ na přímce p , potom vztah mezi x a λ lze jednoduše popsat

$$x = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \text{ resp. } \lambda = \frac{x}{x - 1}.$$

Platí:

- $(ABX) = 0 \Leftrightarrow X = A$; pro $X = B$ není dělicí poměr definován.
- Střed S dvojice bodů A, B má dělicí poměr $(A, B, S) = -1$.
- Na přímce neexistuje bod, který by měl dělicí poměr $\lambda = 1$.

Věta 1.5.3. *Nechť $(ABC) = \lambda$, potom platí $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$, $(ACB) = 1 - \lambda$, $(CAB) = \frac{1}{1 - \lambda}$, $(BCA) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$, $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.* \square

Úsečka. Nejprve definujeme relaci *mezi* — říkáme, že **bod C leží mezi body A, B** , píšeme $C\mu(A, B)$, právě když $(ABC) < 0$. Samozřejmě platí $C\mu(A, B) \Leftrightarrow C\mu(B, A)$.

DEFINICE 1.5.3.

Úsečkou AB s koncovými body A, B nazýváme množinu všech bodů X přímky AB , které leží mezi body A, B , sjednocenou s dvouprvkovou množinou $\{A, B\}$, tj.

$$\vdash AB = \{X \in \mathbb{A}_n; X\mu(A, B)\} \cup \{A, B\}$$

Příklad 1.5.1. Snadno se přesvědčíme, že rovnice

$$X = A + t(B - A), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.35)$$

popisuje úsečku s krajními body A, B . \square

Poloprostor. Bud' \mathbb{A}'_{n-1} nadrovina v prostoru \mathbb{A}_n . Uvažujeme relaci \sim definovanou na množině $\mathcal{M} = \mathbb{A}_n \setminus \mathbb{A}'_{n-1}$ předpisem

$$(\forall X, Y \in \mathcal{M}) \quad X \sim Y \Leftrightarrow \vdash XY \cap \mathbb{A}'_{n-1} = \emptyset. \quad (1.36)$$

Relace \sim je *reflexivní, symetrická a tranzitivní* a jedná se tudíž o *relaci ekvivalence* — množina \mathcal{M} se proto rozpadá na třídy $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$.

DEFINICE 1.5.4.

Bud' \mathbb{A}'_{n-1} nadrovina v prostoru \mathbb{A}_n . Třídy $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ vytvořené na množině $\mathcal{M} = \mathbb{A}_n \setminus \mathbb{A}'_{n-1}$ relací \sim nazýváme **otevřené poloprostory s hraniční nadrovinou** \mathbb{A}'_{n-1} . Množiny $\mathbb{A}'_{n-1} \cup \mathcal{M}_1$ a $\mathbb{A}'_{n-1} \cup \mathcal{M}_2$ nazýváme **uzavřené poloprostory s hraniční nadrovinou** \mathbb{A}'_{n-1} . Otevřený, resp. uzavřený poloprostor na přímlce nazýváme **otevřená**, resp. **uzavřená polopřímka**. Otevřený, resp. uzavřený poloprostor v rovině nazýváme **otevřená**, resp. **uzavřená polorovina**.

Uzavřený poloprostor s hraniční nadrovinou \mathbb{A}'_{n-1} (jež je určena lineárně nezávislými body A_1, A_2, \dots, A_n) a obsahující bod B budeme značit $\mapsto \mathbb{A}'_{n-1}B$, resp. $\mapsto A_1A_2 \dots A_nB$.

Nechť je v afinním prostoru \mathbb{A}_n dán poloprostor $\mapsto \mathbb{A}'_{n-1}B$ a nechť $B' \notin \mapsto \mathbb{A}'_{n-1}B$. Potom poloprostor $\mapsto \mathbb{A}'_{n-1}B'$ nazýváme **opačný poloprostor** k poloprostoru $\mapsto \mathbb{A}'_{n-1}B$; značíme rovněž $\leftarrow \mathbb{A}'_{n-1}B$.

Příklad 1.5.2. Ptáme se, kdy dva různé body X, Y z afinního prostoru \mathbb{A}_n neležící v hraniční nadrovině \mathbb{A}'_{n-1} náležejí témuž otevřenému poloprostoru, resp. opačným poloprostorům. Podle definice relace \sim náležejí body X, Y opačným otevřeným poloprostorům, právě když existuje bod $Z \in \mathbb{A}'_{n-1}$, který leží *mezi* body X, Y ; tj. platí $\lambda = (XYZ) < 0$ neboli pro příslušné souřadné vektory můžeme psát

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}}{1 - \lambda}, \quad \text{kde } \lambda < 0.$$

Má-li hraniční nadrovina \mathbb{A}'_{n-1} rovnici $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0$ a jelikož $Z \in \mathbb{A}'_{n-1}$, potom platí $f(\mathbf{z}) = 0$.

Upravujeme

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n a_i z_i + a_0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{x_i - \lambda y_i}{1 - \lambda} + a_0 = 0$$

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0}{\sum_{i=1}^n a_i y_i + a_0} = \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{y})} < 0$$

Body X, Y náležejí témuž otevřenému poloprostoru, resp. opačným otevřeným poloprostorům s hraniční nadrovinou \mathbb{A}'_{n-1} , právě když funkční hodnoty $f(\mathbf{x})$ a $f(\mathbf{y})$ mají stejná, resp. opačná znaménka. \diamond

Poznamenejme ještě, že vhodnou volbou soustavy souřadnic lze zajistit, že hraniční nadrovina \mathbb{A}'_{n-1} má rovnici $x_n = 0$. Potom je patrné, že uzavřené poloprostory s hraniční nadrovinou \mathbb{A}'_{n-1} jsou množiny

$$\{X \in \mathbb{A}_n; x_n \geq 0\} \quad \text{a} \quad \{X \in \mathbb{A}_n; x_n \leq 0\}.$$

Věta 1.5.4. *Uvažujme v \mathbb{A}_n poloprostor $\mapsto A_1 A_2 \dots A_n B$. Potom $Y \in \mapsto A_1 A_2 \dots A_n B$, právě když existují čísla $y_1, \dots, y_n, y_{n+1} \in \mathbb{R}$ taková, že $y_{n+1} \geq 0$, $y_1 + \dots + y_{n+1} = 1$ a*

$$Y = y_1 A_1 + \dots + y_n A_n + y_{n+1} B. \quad (1.37)$$

Důkaz: Zvolme repér $\langle A_1; A_2 - A_1, \dots, A_n - A_1, B - A_1 \rangle$. Ze vztahu (1.37) plyne, že bod Y má v soustavě souřadnic dané takto zvoleným repérem souřadnice $[y_2, \dots, y_{n+1}]$. Obráceně každou n -tici $[y_2, \dots, y_{n+1}]$ lze jednoznačně doplnit na $(n+1)$ -tici $[y_1, y_2, \dots, y_{n+1}]$, pro níž je $y_1 + \dots + y_{n+1} = 1$. Vzhledem k tomu, že hraniční nadrovina \mathbb{A}'_{n-1} je ve zvolené soustavě souřadnic popsána rovnicí $x_n = 0$ a bod B má souřadnice $[0, \dots, 0, 1]$, již snadno nahlédneme podmínku $y_{n+1} \geq 0$. \square

Příklad 1.5.3. Polopřímka. Podle věty 1.5.4 je $\mapsto AB$ množina všech bodů X , pro něž platí $X = x_1 A + x_2 B$, kde $x_1 + x_2 = 1$ a $x_2 \geq 0$. Po dosazení $x_1 = 1 - x_2$ dostáváme $X = A(1 - x_2) + x_2 B = A + x_2(B - A)$, tj. rovnice $X = A + t(B - A)$ vyjadřuje pro

$$\begin{aligned} t \geq 0 & \quad \text{polopřímku } AB, \\ t \leq 0 & \quad \text{polopřímku opačnou k polopřímce } AB. \quad \square \end{aligned}$$

Příklad 1.5.4. Polorovina. Z věty (1.5.4) ihned plyne, že rovnice $X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A)$ vyjadřuje pro

$$\begin{aligned} t_2 \geq 0 & \quad \text{polorovinu } ABC, \\ t_2 \leq 0 & \quad \text{polorovinu opačnou k polorovině } ABC. \quad \square \end{aligned}$$

Vrstva, klín. Nejprve budeme diskutovat průnik dvou různých uzavřených poloprostorů \mathcal{M}' a \mathcal{M}'' s hraničními nadrovinami \mathbb{A}'_{n-1} a \mathbb{A}''_{n-1} . Mohou nastat dvě možnosti — hraniční nadroviny jsou buďto *rovnoběžné*, anebo *různoběžné*. Důkladněji prozkoumáme první možnost. Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit takovou soustavu souřadnic, že hraniční nadroviny mají rovnice $\mathbb{A}'_{n-1} : x_n = 0$ a $\mathbb{A}''_{n-1} : x_n = c$. Zvolíme dále $\mathcal{M}' = \{X \in \mathbb{A}_n; x_n \geq 0\}$ a vzhledem k předpokládané rovnoběžnosti hraničních nadrovin je potom buďto

- (i) $\mathcal{M}'' = \{X \in \mathbb{A}_n; x_n \geq c\}$, anebo
- (ii) $\mathcal{M}'' = \{X \in \mathbb{A}_n; x_n \leq c\}$.

V případě (i) pro $c \leq 0$ je $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}'' = \mathcal{M}'$, pro $c \geq 0$ je $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}'' = \mathcal{M}''$.

V případě (ii) pro $c < 0$ je $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}'' = \emptyset$, pro $c = 0$ je $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}'' = \mathbb{A}'_{n-1} = \mathbb{A}''_{n-1}$ a pro $c > 0$ je $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}'' = \{X \in \mathbb{A}_n; 0 \leq x_n \leq c\}$ — zde nás bude nejvíce zajímat třetí možnost (ii-3), tj. případ, kdy je $c > 0$.

DEFINICE 1.5.5.

Nechť jsou dány uzavřené poloprostory \mathcal{M}' , \mathcal{M}'' . Jsou-li jejich hraniční nadroviny rovnoběžné a nastává možnost (ii-3) — viz výše, pak množinu $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}''$ nazýváme **vrstva**. Jsou-li hraniční nadroviny různoběžné, pak množinu $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}''$ nazýváme **klín**. Pro $n = 2$ se vrstva nazývá **pás** a klín **dutý úhel**.

Věta 1.5.5. *Mějme dán v \mathbb{A}_2 dutý úhel $\angle AVB \Rightarrow AVB \cap \Rightarrow BVA$. Potom je*

$$\angle AVB = \{X = x_1V + x_2A + x_3B; x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}.$$

Důkaz plyne přímo z dvojnásobného použití věty (1.5.4). □

Příklad 1.5.5. Úhel. Z předcházející věty plyne, že rovnice $X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A)$ vyjadřuje pro $t_1, t_2 \geq 0$ úhel s **vrcholem** A a **rameny** $\mapsto AB, \mapsto AC$. □

Konvexní množiny. V následující části se budeme zabývat množinami, které s každými dvěma body obsahují i všechny body úsečky, která je spojuje.

DEFINICE 1.5.6.

Množinu \mathcal{M} bodů prostoru \mathbb{A}_n nazýváme **konvexní množina**, právě když platí:

$$X, Y \in \mathcal{M} \Rightarrow \mapsto XY \subset \mathcal{M}.$$

Z definice ihned plyne, že *prázdná množina*, každá *jednobodová množina* i *množina všech bodů* prostoru \mathbb{A}_n jsou konvexní. Snadno bychom dokázali, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní množina.

Věta 1.5.6. *Nechť \mathcal{M} je konvexní množina v prostoru \mathbb{A}_n . Uvažujme body $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{M}$ a nezáporná reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, pro něž je $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. Potom $\lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_k B_k \in \mathcal{M}$. \square*

Důkaz: [Se1]

DEFINICE 1.5.7.

Uvažujme libovolnou množinu $\mathcal{M} \subset \mathbb{A}_n$. Průnik všech konvexních množin obsahujících množinu \mathcal{M} nazýváme **konvexní obal množiny \mathcal{M}** ; značíme $K(\mathcal{M})$.

Věta 1.5.7. *Nechť je dána libovolná množina \mathcal{M} v prostoru \mathbb{A}_n . Potom $X \in K(\mathcal{M})$ právě tehdy, když existují body $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{M}$ a reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ taková, že $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ a $\lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_k B_k \in \mathcal{M}$. \square*

Důkaz: [Se1]

DEFINICE 1.5.8.

Konvexní množinu $\mathcal{M}' \subset \mathbb{A}_n$ nazveme **konvexní mnohostěn** v prostoru \mathbb{A}_n , jestliže existuje *konečná* množina $\mathcal{M} \subset \mathbb{A}_n$ taková, že $\mathcal{M}' = K(\mathcal{M})$. Konvexní obal $n + 1$ lineárně nezávislých bodů v \mathbb{A}_n se nazývá **simplex**. Pro $n = 2$ se konvexní mnohostěn nazývá **konvexní mnohoúhelník** a simplex **trojúhelník**, pro $n = 3$ se simplex nazývá **čtyřstěn**.

Lze dokázat, že průnik konvexního mnohostěnu v \mathbb{A}_n s libovolným podprostorem prostoru \mathbb{A}_n je buďto prázdná množina, anebo opět konvexní mnohostěn.

Příklad 1.5.6. Trojúhelník. Z věty (1.5.7) plyne, že rovnice $X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A)$ vyjadřuje pro $t_1, t_2 \geq 0$ a $t_1 + t_2 \leq 1$ trojúhelník ABC . \square

Příklad 1.5.7. Čtyřstěn. Z věty (1.5.7) plyne, že rovnice $X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A) + t_3(D - A)$ vyjadřuje pro $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ a $t_1 + t_2 + t_3 \leq 1$ čtyřstěn $ABCD$. \square

Kapitola 2

Základní vlastnosti eukleidovského prostoru

2.1 Eukleidovský prostor

Eukleidovský prostor a jeho podprostory. Metrické vlastnosti, jako např. kolmost, odchylka, vzdálenost, obsah, objem apod. jsou předmětem studia tzv. **eukleidovské geometrie** odehrávající se v eukleidovském prostoru. Studium metrických vlastností je umožněno přítomností skalárního součinu na unitárním prostoru.

DEFINICE 2.1.1.

Eukleidovským prostorem \mathbb{E}_n rozumíme n -rozměrný afinní prostor, v jehož vektorovém zaměření V_n je definován *skalární součin*.

Připomeňme definici a některé základní vlastnosti **skalárního součinu**, jakožto zobrazení $V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$ ($[\vec{x}, \vec{y}] \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y}$):

- (S-1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (*komutativnost*),
- (S-2) $(k\vec{x}) \cdot \vec{y} = k(\vec{x} \cdot \vec{y})$ (*asociativnost skalárního a vnějšího násobení*),
- (S-3) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (*distributivnost*),
- (S-4) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$, přičemž $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{o}$,

kde $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_n$, $k \in \mathbb{R}$.

Je-li $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ a $\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i$, kde $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ je báze vektorového prostoru V_n (tj. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$) jsou příslušné souřadné

vektory), potom podle (S-2) a (S-3) platí

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j.$$

Odtud je vidět, že k výpočtu skalárního součinu dvou libovolných vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$, stačí znát skalární součiny každých dvou bázových vektorů \vec{e}_i a \vec{e}_j ; $i, j = 1, \dots, n$. Uvedené součiny lze zadat pomocí symetrické pozitivně definitní matice \mathbf{G} dané předpisem

$$\mathbf{G} = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1, & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2, & \dots & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1, & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2, & \dots & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n \cdot \vec{e}_1, & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_2, & \dots & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_n \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Skalární součin vektorů \vec{x}, \vec{y} , jejichž souřadnice jsou vztaženy k bázi $\langle \vec{e}_i \rangle$, se tedy vypočítá

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y},$$

kde \mathbf{x}, \mathbf{y} chápeme jako sloupcové vektory.

Velikost (norma) vektoru \vec{x} je definována vztahem

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{(\vec{x})^2}.$$

Vektory \vec{x} , pro něž platí $|\vec{x}| = 1$, se nazývají **jednotkové**.

Dva *nenulové* vektory \vec{x} a \vec{y} označujeme jako **kolmé (ortogonální)**, právě když platí $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, tj.

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Pravoúhlým (ortogonálním) průmětem vektoru \vec{x} do vektoru \vec{v} rozumíme vektor \vec{x}_0 takový, že

- (i) \vec{x}_0, \vec{v} jsou lineárně závislé;
- (ii) $(\vec{x} - \vec{x}_0) \perp \vec{v}$.

Z podmínky $\vec{x}_0 = \lambda \vec{v}$ a $(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{v} = 0$ vypočteme $\lambda = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$, a proto

$$\vec{x}_0 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}.$$

Pomocí *Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti* $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$ snadno určíme

$$-1 \leq \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \leq 1.$$

Jelikož se hodnota prostředního výrazu pohybuje v intervalu $\langle -1; 1 \rangle$ a vzhledem k obvyklé korespondenci *kolmost—odchylka* $\frac{\pi}{2}$, lze výše uvedený zlomek ztotožnit s funkcí kosinus, tj.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}.$$

Odchylku (úhel) nenulových vektorů \vec{x} a \vec{y} určíme pomocí vztahu

$$\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}, \text{ resp. } \varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}, \text{ kde } 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Příklad 2.1.1. Ve vektorovém prostoru V_3 je skalární součin zadán maticí

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Najděte kosinus úhlu $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ bázových vektorů \vec{e}_1, \vec{e}_2 .
 b) Určete velikost vektoru $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$.

Řešení: Snadno se přesvědčíme, že symetrická matice (g_{ij}) je pozitivně definitní, a proto je pomocí ní možné definovat skalární součin.

- a) Podle vzorce pro výpočet odchylky dvou úhlů můžeme psát

$$\cos \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\vec{e}_1 \vec{e}_2}{\sqrt{\vec{e}_1 \vec{e}_1} \cdot \sqrt{\vec{e}_2 \vec{e}_2}} = \frac{-1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

- b) Podle vzorce pro výpočet velikosti vektoru můžeme psát

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2)^2} = \sqrt{4\vec{e}_1 \vec{e}_1 - 12\vec{e}_1 \vec{e}_2 + 9\vec{e}_2 \vec{e}_2} = \sqrt{42}. \quad \diamond$$

Báze $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle \subset V_n$ se nazývá **ortonormální**, jestliže její vektory jsou jednotkové a po dvou na sebe kolmé. Platí tedy

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij},$$

kde δ_{ij} je tzv. **Kroneckerovo delta** (pro $i = j$ je $\delta_{ij} = 1$, pro $i \neq j$ je $\delta_{ij} = 0$). Jsou-li souřadnice vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ vztaženy k ortonormální bázi, matice (2.1) je jednotková a pro skalární součin dostáváme

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}. \quad (2.2)$$

Pro velikost vektoru, resp. pro kolmost vektorů, resp. pro odchylku vektorů potom platí vztahy

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i = 0, \text{ kde } \mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o},$$

$$\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_iy_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}, \quad \text{kde } \mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}. \quad (2.3)$$

Hledejme úhly α_i , které svírá nenulový vektor \vec{x} se souřadným vektorem \mathbf{e}_i . S využitím vztahu (2.3) dostáváme

$$\cos \alpha_i = \frac{x_i}{|\vec{x}|}.$$

$\cos \alpha_i$ se nazývá i -tý **směrový kosinus** vektoru \mathbf{x} . Pro směrové kosiny platí vztah

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \dots + \cos^2 \alpha_n = 1.$$

Kartézská soustava souřadnic. V kapitole 1.1 jsme zavedli zobrazení \mathcal{S} dané repérem $\langle O; \vec{e}_i \rangle$, které každému bodu X přiřazuje uspořádanou n -tici reálných čísel $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, a toto zobrazení jsme nazvali *soustava souřadnic*. Na repér $\langle O; \vec{e}_i \rangle$ jsme přitom nekladli žádné doplňující požadavky.

DEFINICE 2.1.2.

Soustava souřadnic $\mathcal{S}\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ eukleidovského prostoru \mathbb{E}_n , kde $\langle \vec{e}_i \rangle$ je ortonormální báze, se nazývá **kartézská soustava souřadnic**.

Uvažujme nyní repér $\langle O; \vec{e}_i \rangle$, jenž určuje v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_n *kartézskou* soustavu souřadnic \mathcal{S} a repér $\langle P; \vec{d}_j \rangle$, jenž ve stejném eukleidovském prostoru definuje *kartézskou* soustavu souřadnic \mathcal{S}' . Transformační vztahy pro přechod od souřadnic \mathbf{x} bodu X v kartézské soustavě souřadnic \mathcal{S} k souřadnicím \mathbf{x}' téhož bodu X v kartézské soustavě souřadnic \mathcal{S}' jsou (1.10)

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{b},$$

kde \mathbf{A} je tzv. *matice přechodu* od báze $\langle \vec{e}_i \rangle$ k bázi $\langle \vec{d}_j \rangle$ (její sloupce tvoří souřadnice nových bázevých vektorů \vec{d}_j vzhledem k původní bázi $\langle \vec{e}_i \rangle$) a \mathbf{b} je vektor souřadnic nového počátku v původní soustavě souřadnic.

Pokud zaměníme roli obou bází, dostaneme obdobně matici přechodu \mathbf{B} od báze $\langle \vec{d}_j \rangle$ k bázi $\langle \vec{e}_i \rangle$, přičemž podle vztahu (1.8) platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Obě soustavy souřadnic \mathcal{S} , \mathcal{S}' jsou nyní kartézské, tj. obě báze $\langle \vec{e}_i \rangle$, $\langle \vec{d}_j \rangle$ jsou navíc *ortonormální*, a proto je splněno

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}, \quad \vec{d}_j \cdot \vec{d}_l = \delta_{jl}.$$

Vektory jedné báze můžeme vyjádřit pomocí báze zbývající, tj.

$$\vec{d}_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} \vec{e}_k \quad (j = 1, \dots, n); \quad \vec{e}_i = \sum_{l=1}^n b_{li} \vec{d}_l \quad (i = 1, \dots, n).$$

Po vynásobení dostáváme

$$\vec{e}_i \vec{d}_j = \vec{e}_i \sum_{k=1}^n a_{kj} \vec{e}_k = a_{ij}, \quad \text{resp.} \quad \vec{d}_j \vec{e}_i = \vec{d}_j \sum_{l=1}^n b_{li} \vec{d}_l = b_{ji},$$

a proto vzhledem ke komutativnosti skalárního součinu platí

$$a_{ij} = b_{ji} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Odtud již pro matice \mathbf{A} a \mathbf{B} přímo plyne

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T. \tag{2.4}$$

Spojením vztahů $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ a $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ dostáváme *podmínku pro matici přechodu od ortonormální báze $\langle \vec{e}_i \rangle$ k ortonormální bázi $\langle \vec{d}_j \rangle$* a tím i od kartézské soustavy souřadnic \mathcal{S} ke kartézské soustavě souřadnic \mathcal{S}'

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}. \tag{2.5}$$

Čtvercová matice splňující (2.5) (tj. pro níž platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$) se nazývá **ortonormální**.

Příklad 2.1.2. *Posunutí soustavy souřadnic v \mathbb{E}_2 a \mathbb{E}_3 .* Jestliže \mathcal{KSS}' vznikla z \mathcal{KSS} posunutím o vektor \vec{b} , potom má transformační rovnice tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{b}. \tag{2.6}$$

Po rozepsání a obvyklém přeznačení $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ dostáváme v \mathbb{E}_3

$$x = x' + b_1, \quad y = y' + b_2, \quad z = z' + b_3$$

a v \mathbb{E}_2

$$x = x' + b_1, \quad y = y' + b_2. \quad \square$$

Příklad 2.1.3. *Otočení soustavy souřadnic kolem osy, resp. kolem počátku.* Jestliže \mathcal{KSS}' vznikla z \mathcal{KSS} otočením kolem souřadné osy z o orientovaný úhel φ , potom nabývá transformační vztah tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}'. \quad (2.7)$$

Po roznásobení a obvyklém přeznačení $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ dostáváme

$$x = x' \cdot \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cos \varphi, \quad z = z'.$$

Obdobně v eukleidovské rovině získáme vztahy pro otočení \mathcal{KSS} kolem počátku

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}' \quad (2.8)$$

neboli po roznásobení a přeznačení $x_1 = x$, $x_2 = y$, dostaneme

$$x = x' \cdot \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cos \varphi. \quad \square$$

Příklad 2.1.4. V kartézské soustavě souřadnic \mathcal{KSS} je dána přímka a rovnicí $x + 2y - 1 = 0$. Určete rovnici této přímky v soustavě souřadnic \mathcal{KSS}' , jež vznikla z původní soustavy otočením kolem počátku o orientovaný úhel $\varphi = +\frac{\pi}{3}$.

Řešení: Ve vztahu (2.8) položíme $\varphi = \frac{\pi}{3}$, čímž dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} x &= x' \cdot \frac{1}{2} - y' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= x' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + y' \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Získané transformační vztahy dosadíme do rovnice přímky a a po úpravě obdržíme $(1 + 2\sqrt{3})x' + (2 - \sqrt{3})y' - 2 = 0$. \diamond

Vektorový součin. V eukleidovském prostoru \mathbb{E}_3 , v němž je dána kartézská soustava souřadnic $\mathcal{S} = \langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, definujeme vedle skalárního součinu ještě tzv. **vektorový součin** dvou vektorů, jakožto zobrazení $V_3 \times V_3 \rightarrow V_3$ ($[\vec{x}, \vec{y}] \mapsto \vec{x} \times \vec{y}$) splňující tyto vlastnosti:

(V-1) Jsou-li vektory \vec{x}, \vec{y} lineárně závislé, potom $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$,

(V-2) Jsou-li vektory \vec{x}, \vec{y} lineárně nezávislé, potom

a) $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}$ a $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}$;

b) $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin \varphi$, kde $\varphi = \angle(\vec{x}, \vec{y})$;

c) uspořádaná trojice vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$ je stejně orientovaná jako uspořádaná trojice souřadnicových vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (tj. determinant matice přechodu od $\langle \vec{e}_i \rangle$ k $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle$ je kladný).

V definici **vektorového násobení** se objevuje volba kartézské soustavy souřadnic \mathcal{S} . Aby výše zavedený pojem měl vůbec nějaký praktický smysl, je nutné, aby se choval „rozumně“ při přechodu od jedné kartézské soustavy k jiné. Snadno nahlédneme, že vektorový součin se při změně kartézské soustavy souřadnic sice změnit může, ale nanejvýš tak, že změní znaménko (V-2c).

Dá se dále dokázat, že vektorový součin splňuje následující vlastnosti

- $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$ (*antikomutativnost*),
- $(k\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (k\vec{y}) = k(\vec{x} \times \vec{y})$,
- $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$ (*distributivnost*),

Podle výše uvedených vztahů můžeme snadno zjistit, že pro souřadnicové vektory (ortonormální báze!) $\langle \vec{e}_i \rangle \subset V_3$ platí: $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = -(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = -(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_2$. Jsou-li souřadnice vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V_3$ vztaheny k této ortonormální bázi, můžeme pro vektorový součin psát

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right). \quad (2.9)$$

Vztah pro vektorový součin si lze snadno zapamatovat pomocí následujícího determinantu

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3. \quad (2.10)$$

Výše uvedený zápis použijeme k rozšíření vektorového součinu i na eukleidovské prostory \mathbb{E}_n , $n \geq 2$, pro $(n - 1)$ -tici uspořádaných vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}$, jejichž souřadnice \mathbf{x}_i jsou vztaheny k jisté ortonormální bázi.

Ze vztahu (2.10) plyne, že i -tá souřadnice w_i , $i = 1, 2, 3$, vektorového součinu $\vec{w} = \vec{x} \times \vec{y}$ je rovna algebraickému doplňku i -tého prvku třetího řádku. Analogicky definujeme $\vec{w} = \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{n-1}$, a to tak, že pro souřadnice w_i platí

$$w_i = (-1)^{n+i} A_i,$$

kde A_i je subdeterminant prvku \vec{e}_i v determinantu

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \dots & x_{n-1,n} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \end{vmatrix}.$$

Snadno bychom dokázali, že pro vektor $\vec{w} = \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{n-1}$ platí:

- při změně kartézské soustavy souřadnic změní \vec{w} nejvýše znaménko;
- \vec{w} je rovno nulovému vektoru, právě když $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}$ jsou lineárně závislé vektory;
- je-li \vec{w} nenulový, pak je kolmý ke každému z vektorů \vec{x}_i — proto se také označuje jako **ortogonální doplněk** uspořádané $(n-1)$ -tice $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}$ v prostoru V_n .

Příklad 2.1.5. Ve vektorovém prostoru V_4 nalezněte vektor \vec{w} , který je kolmý na vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, jejichž souřadnice vztahované k ortonormální bázi jsou $(2, 1, 5, 3)$, $(0, 1, 3, 7)$, $(2, 4, 1, 5)$.

Řešení: Snadno se přesvědčíme, že vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou lineárně nezávislé. Víme tedy, že nenulový vektor $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ (a samozřejmě i každý jeho nenulový k -násobek) splňuje podmínky zadání úlohy. Odtud

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \end{vmatrix} = -90\vec{e}_1 + 68\vec{e}_2 + 38\vec{e}_3 - 26\vec{e}_4.$$

Hledaným vektorem \vec{w} je tedy každý vektor, jehož souřadnice v dané ortonormální bázi jsou $k \cdot (-90, 68, 38, -26)$, kde $k \neq 0$. \diamond

Smíšený a vnější součin. Pro tři vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_3$, definujeme ještě tzv. **smíšený součin** (skalárně vektorový součin)

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}).$$

Jsou-li souřadnice vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_3$ vztahovány k ortonormální bázi, pro jejich smíšený součin můžeme podle (2.2) a (2.9) psát

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Z vlastností determinantů snadno odvodíme některé vlastnosti smíšeného součinu

- $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 0 \Leftrightarrow \text{hod}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) < 3 \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jsou lineárně závislé,
- $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}] = [\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}] = -[\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}] = -[\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}]$.

Přístup ke smíšenému součinu tří vektorů v trojrozměrném prostoru můžeme opět zobecnit na případ n vektorů v n -rozměrném unitárním prostoru V_n , jejichž souřadnice jsou vztaženy k ortonormální bázi. Determinant

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

nazýváme **vnějším součinem** vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, značíme $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]$.

2.2 Kolmost podprostorů

Pojem vzájemné polohy dvou podprostorů v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_n se plně přenáší z prostoru afinního — i zde tedy můžeme hovořit o podprostorech incidentních, rovnoběžných různoběžných a mimoběžných. Nově se zavádí pojem *kolmosti* podprostorů.

Kolmost vektorových podprostorů. Nejprve připomeneme některé vlastnosti kolmých a totálně kolmých vektorových podprostorů.

Říkáme, že vektor $\vec{u} \in V_n$ je **kolmý (ortogonální) k podprostoru** $W \subset V_n$ (píšeme $\vec{u} \perp W$), právě když je kolmý na všechny vektory podprostoru W .

Nutnou a postačující podmínkou pro ortogonalitu $\vec{u} \perp (W = \langle \vec{w}_i \rangle)$ je, aby vektor \vec{u} byl kolmý na všechny vektory báze \vec{w}_i .

Uvažujme W podprostor vektorového prostoru V_n . Potom podprostor W^\perp obsahující *všechny* vektory, jež jsou kolmé na *všechny* vektory z W , tj.

$$W^\perp = \{\vec{x} \in V_n; \vec{x} \cdot \vec{y} = 0, \text{ pro } \forall \vec{y} \in W\}$$

nazýváme **ortogonální doplněk** podprostoru W v prostoru V_n . Podprostory W a W^\perp pak nazýváme **totálně kolmé**.

Poznámka 2.2.1. Poznamenejme jen, že je nutné rozlišovat mezi *ortogonálním doplněkem vektorového podprostoru* W_k (což je vektorový podprostor W_k^\perp dimenze $n - k$) a *ortogonálním doplněkem uspořádané $(n - 1)$ -tice vektorů* $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}$ (což je jednoznačně daný vektor $\vec{a}_1 \times \dots \times \vec{a}_{n-1}$).

Lze dokázat, že pro $W \subset V_n$ platí

- Je-li $\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n \rangle$ ortonormální báze prostoru V_n , přičemž $\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \rangle$ je báze podprostoru W , pak $\langle \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n \rangle$ je báze W^\perp ;

- Je-li $\dim(W) = k$, potom $\dim(W^\perp) = n - k$;
- $(W^\perp)^\perp = W$;
- $U \subset W \implies W^\perp \subset U^\perp$.

Příklad 2.2.1. Ve vektorovém prostoru V_4 je dán podprostor $W = \langle (-1, 1, 1, 3), (0, -2, 1, -1) \rangle$. Najděte ortogonální doplněk W^\perp .

Řešení: Ortogonální doplněk W^\perp obsahuje všechny vektory, jež jsou kolmé na každý vektor podprostoru W (tj. nutnou a postačující podmínkou je kolmost na oba vektory báze). Pro libovolný vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in W^\perp$ tedy musí platit

$$\begin{aligned} \vec{u} \perp (-1, 1, 1, 3) &\Leftrightarrow -u_1 + u_2 + u_3 + 3u_4 = 0 \\ \vec{u} \perp (0, -2, 1, -1) &\Leftrightarrow -2u_2 + u_3 - u_4 = 0. \end{aligned}$$

Vyřešíme výše uvedenou homogenní soustavu a získáme dvourozměrný prostor řešení $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (3t + 5r, t - r, 2t, 2r)$, kde $t, r \in \mathbb{R}$ — tj. $W^\perp = \langle (3, 1, 2, 0), (5, -1, 0, 2) \rangle$. Pro kontrolu se můžeme snadno přesvědčit, že každý z vektorů báze podprostoru W je kolmý na každý z bázevých vektorů podprostoru W^\perp . \diamond

Jelikož požadavek *totální kolmosti* je v řadě běžných geometrických situací příliš silný, zavádíme ještě tzv. *kolmost* „bez přívlastku“.

Podprostory $U, W \subset V_n$ nazveme **kolmé**, značíme $U \perp W$, jestliže v U existuje vektor kolmý k W a ve W existuje vektor kolmý k U . Samozřejmě dva *totálně kolmé* podprostory jsou současně i *kolmé* bez přívlastku — naopak neplatí.

Následující věta poskytuje nutnou a postačující podmínku pro kolmost dvou podprostorů:

Věta 2.2.1. *Nechť $\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \rangle, \langle \vec{d}_1, \dots, \vec{d}_l \rangle$ jsou báze podprostorů V'_k, V''_l . Potom $V'_k \perp V''_l$, právě když*

$$\text{hod} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{d}_1, & \vec{e}_1 \cdot \vec{d}_2, & \dots & \vec{e}_1 \cdot \vec{d}_l \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{d}_1, & \vec{e}_2 \cdot \vec{d}_2, & \dots & \vec{e}_2 \cdot \vec{d}_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_k \cdot \vec{d}_1, & \vec{e}_k \cdot \vec{d}_2, & \dots & \vec{e}_k \cdot \vec{d}_l \end{pmatrix} < \min(k, l). \quad (2.11)$$

Důkaz: Označme výše uvedenou matici \mathbf{G} a její hodnotu h . Z podmínky $h < \min(k, l)$ ihned vyplývá, že řádky i sloupce matice \mathbf{G} jsou lineárně závislé.

Z lineární závislosti řádků plyne, že existuje netriviální řešení homogenní soustavy

$$x_1(\vec{e}_i \cdot \vec{d}_1) + x_2(\vec{e}_i \cdot \vec{d}_2) + \dots + x_l(\vec{e}_i \cdot \vec{d}_l) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Na základě vlastností skalárního součinu (S-2) a (S-3) dostáváme

$$\vec{e}_i \cdot (x_1\vec{d}_1 + x_2\vec{d}_2 + \dots + x_l\vec{d}_l) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Vektor $\vec{x} = x_1\vec{d}_1 + x_2\vec{d}_2 + \dots + x_l\vec{d}_l \in V_l''$ je tudíž kolmý ke všem bázovým vektorům prostoru V_k' , a tedy $\vec{x} \perp V_k'$. Analogicky z lineární závislosti sloupců matice \mathbf{G} plyne existence nenulového vektoru $\vec{y} \in V_k'$ takového, že $\vec{y} \perp V_l''$. Tedy $V_k' \perp V_l''$.

Obráceně necht' $V_k' \perp V_l''$. Existuje tedy nenulový vektor $\vec{x} = x_1\vec{d}_1 + x_2\vec{d}_2 + \dots + x_l\vec{d}_l \in V_l''$, jenž je kolmý k V_k' . To nastává, právě když je vektor \vec{x} kolmý ke všem bázovým vektorům \vec{e}_i prostoru V_k' , tj. platí

$$\vec{e}_i \cdot (x_1\vec{d}_1 + x_2\vec{d}_2 + \dots + x_l\vec{d}_l) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Tím jsme dostali homogenní soustavu rovnic

$$x_1(\vec{e}_i \cdot \vec{d}_1) + x_2(\vec{e}_i \cdot \vec{d}_2) + \dots + x_l(\vec{e}_i \cdot \vec{d}_l) = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

s netriviálním řešením, a proto hodnost h příslušné matice soustavy je menší než k . Obdobně bychom dokázali i $h < l$. \square

Příklad 2.2.2. Určete, zda ve vektorovém prostoru V_4 jsou podprostory $V = \langle (1, 1, 1, 2), (0, -2, -3, 1), (4, 0, -2, 3) \rangle$, $W = \langle (1, -3, 2, 0), (1, 4, 3, 2) \rangle$ kolmé.

Řešení: V souladu se zněním věty V.2.2.1 sestavíme matici (2.11)

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & -15 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je rovna 1 (tj. je menší než počet řádků i počet sloupců), a proto $V \perp W$. \diamond

Kolmost eukleidovských podprostorů. Ortogonalitu libovolných dvou eukleidovských podprostorů v \mathbb{E}_n založíme na ortogonalitě jejich vektorových zaměření.

DEFINICE 2.2.1.

Dva podprostory \mathbb{E}_k' a \mathbb{E}_l'' eukleidovského prostoru \mathbb{E}_n nazveme **kolmé**, značíme $\mathbb{E}_k' \perp \mathbb{E}_l''$, resp. **totálně kolmé**, jestliže jsou kolmá, resp. totálně kolmá jejich vektorová zaměření.

Věta 2.2.2. Je dán bod A a podprostor \mathbb{F} v prostoru \mathbb{E}_n . Pak platí:

- (i) Bodem A prochází právě jeden podprostor \mathbb{F}' totálně kolmý k \mathbb{F} .
 (ii) Podprostor \mathbb{F}' obsahuje všechny přímky procházející bodem A a zároveň kolmé k podprostoru \mathbb{F} .
 (iii) Průnikem $\mathbb{F} \cap \mathbb{F}'$ je bod, který se nazývá **řada kolmice** vedené z bodu A na podprostor \mathbb{F} ; resp. **pravoúhlý průmět bodu A na podprostor \mathbb{F}** .
 \square

Důkaz přímo vychází z vlastností totálně kolmých (resp. kolmých) vektorových podprostorů a z jednoznačnosti určení eukleidovského podprostoru pomocí jednoho bodu a vektorového podprostoru (zaměření). \square

Příklad 2.2.3. V eukleidovském prostoru \mathbb{E}_4 určete řadu P kolmice spuštěné z bodu $M = [-9, 2, 1, -5]$ na rovinu $\varrho : X = [1, 2, 0, 0] + r(-1, 1, 1, 3) + s(0, -2, 1, -1)$.

Řešení: S využitím výše uvedené věty musíme nejprve najít podprostor ϱ^\perp , který prochází bodem M a je totálně kolmý na rovinu ϱ (a vzhledem k tomu, že platí $\dim(\varrho) + \dim(\varrho^\perp) = 4$, víme navíc, že $\dim(\varrho^\perp) = 2$, tj. ϱ^\perp je také rovina). Rovina ϱ^\perp je určena bodem M a zaměřením $\langle (-1, 1, 1, 3), (0, -2, 1, -1) \rangle^\perp$. Využijeme-li výsledků příkladu 2.2.1, dostáváme

$$\varrho^\perp : X = [-9, 2, 1, -5] + t(3, 1, 2, 0) + u(5, -1, 0, 2).$$

Souřadnice průsečíku $\{P\} = \varrho \cap \varrho^\perp$ najdeme řešením soustavy 4 rovnic o 4 neznámých (jsme v \mathbb{E}_4 !)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dostáváme $r = 0$, $s = 1$, $t = 0$, $u = 2$ a odtud $P = [1, 0, 1, -1]$. \diamond

DEFINICE 2.2.2.

Bud' $\eta = \{A; V'_{n-1}\}$ nadrovina euklidovského prostoru \mathbb{E}_n . Potom ortogonální doplněk podprostoru V'_{n-1} ve V_n je jednorozměrným podprostorem $\langle \vec{u} \rangle$ ve V_n . Směr $\langle \vec{u} \rangle$ nazýváme **směr normály** nadroviny η , každý nenulový vektor směru normály nazýváme **normálový vektor** nadroviny η . Každou přímkou v \mathbb{E}_n o normálovém směru $\langle \vec{u} \rangle$ nazýváme **normálou** nadroviny η .

Snadno nahlédneme (na základě věty V.1.2.4), že platí

Věta 2.2.3. *Bud' $\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0$ obecná rovnice nadroviny η v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_n vzhledem k jisté kartézské soustavě souřadnic \mathcal{S} . Potom $\vec{n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ je normálový vektor nadroviny η . \square*

Nechť nadrovina η je dána bodem P a vektorovým zaměřením $V_{n-1}^\eta = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n-1} \rangle$. Potom ortogonální doplněk vektorů \vec{u}_i je zřejmě normálovým vektorem nadroviny η . Pro libovolný bod X nadroviny η tedy platí

$$\vec{n} \perp (X - P), \quad \text{tj. } \vec{n} \cdot (X - P) = 0.$$

a dostáváme vyjádření nadroviny pomocí skalárního součinu. Jsou-li \mathbf{n} , \mathbf{p} , \mathbf{x} příslušné souřadné vektory vztahované k jisté soustavě souřadnic \mathcal{S} , potom můžeme snadno určit obecnou rovnici nadroviny η

$$\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{n}\mathbf{x} - \mathbf{n}\mathbf{p} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0. \quad (2.12)$$

Pro $|\mathbf{n}| = 1$ se (2.12) nazývá **Hessova normální rovnice** nadroviny. Pro $|\mathbf{n}| \neq 1$ získáme Hessův tvar jednoduchou úpravou

$$\frac{\mathbf{n}\mathbf{x} + a_0}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}} = 0. \quad (2.13)$$

Příklad 2.2.4. Pro kolmost přímek $p_i = \{A_i, \vec{u}_i\}$, $i = 1, 2$ a nadrovin $\eta_i : \vec{n}_i(X - P_i) = 0$, $i = 1, 2$ v \mathbb{E}_n platí:

- $p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$
- $p_1 \perp \eta_1 \Leftrightarrow \vec{u}_1 = k\vec{n}_1$, $k \neq 0$ (totální kolmost)
- $\eta_1 \perp \eta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ \square

2.3 Vzdálenosti podprostorů

Vzdálenost bodů. Vzdáleností dvou bodů A , B , resp. délkou úsečky AB rozumíme velikost vektoru $\overline{AB} = B - A$:

$$v(A, B) = |AB| = |B - A| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}.$$

Jsou-li dány body $A, B, C \in \mathbb{E}_n$, potom platí:

- $v(A, B) = v(B, A)$;
- $v(A, B) \geq 0$, přičemž $v(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;
- $v(A, B) + v(B, C) \geq v(A, C)$ tzv. **trojúhelníková nerovnost**.

DEFINICE 2.3.1.

Vzdáleností dvou geometrických útvarů $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathbb{E}_n$ ($\mathcal{F}, \mathcal{G} \neq \emptyset$) rozumíme *infimum* množiny všech čísel $v(X, Y) = |XY|$, kde $X \in \mathcal{F}$ a $Y \in \mathcal{G}$.

Neboť vždy platí $|XY| \geq 0$, množina všech vzdáleností $|XY|$ je zdola omezená a infimum tedy vždy existuje. Každé dvě neprázdné podmnožiny prostoru \mathbb{E}_n tudíž mají nějakou vzdálenost.

Dále je zřejmé, že mají-li obě množiny \mathcal{F}, \mathcal{G} *neprázdný průnik* (např. incidentní nebo různoběžné podprostory), potom je jejich vzdálenost podle předchozí definice *rovna nule*. Na druhou stranu nulová vzdálenost dvou bodových množin ještě negarantuje jejich neprázdný průnik!

Vzdálenost bodu od podprostoru.

Věta 2.3.1. *Nechť je dán bod $A \in \mathbb{E}_n$ a podprostor $\mathbb{E}_k \subset \mathbb{E}_n$. Potom vzdálenost bodu A od podprostoru \mathbb{E}_k je rovna vzdálenosti $|AP|$ bodů A a P , kde P je pata kolmice spuštěné z bodu A na podprostor \mathbb{E}_k . \square*

Důkaz: Podle věty V.2.2.2 je $\mathbb{E}_k \cap \mathbb{E}_k^\perp$ bod — označme jej P . Nyní musíme ukázat, že pro libovolný bod $X \in \mathbb{E}_k$ je $|AX| \geq |AP|$. Zřejmě

$$A - X = (A - P) + (P - X),$$

odkud plyne

$$(A - X)^2 = [(A - P) + (P - X)]^2 = (A - P)^2 + 2(A - P)(P - X) + (P - X)^2.$$

Jelikož $(X - P) \in \mathbb{E}_k$ a $(A - P) \in \mathbb{E}_k^\perp$, tj. $(P - X) \perp (A - P)$, můžeme výše uvedený vztah zjednodušit

$$(A - X)^2 = (A - P)^2 + (P - X)^2$$

a odtud již snadno nahlédneme, že platí $(A - X)^2 \geq (A - P)^2$, neboli $|A - X| \geq |A - P|$. \square

Věta 2.3.2. (Vzdálenost bodu od nadroviny)

Vzdálenost bodu $M \in \mathbb{E}_n$ od nadroviny $\eta = \mathbb{E}'_{n-1} \subset \mathbb{E}_n$, jež je popsána rovnicí $\vec{n} \cdot (X - Q) = 0$ vypočteme podle vzorce

$$|M, \eta| = \frac{|\vec{n} \cdot (M - Q)|}{|\vec{n}|}. \quad (2.14)$$

Důkaz: Podle věty V.2.3.1 je $|M, \eta| = |MP|$, kde P je pata kolmice spuštěné z bodu M na nadrovinu η . Bod P tedy určíme jako průsečík nadroviny η

a podprostoru totálně kolmého k η procházejícího bodem M , tj. *normály* $n : X = M + t\vec{n}$. Platí

$$P = M - \frac{\vec{n}(M - Q)}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n} = M - \frac{\vec{n}(M - Q)}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

a odtud již snadno dostáváme

$$|M, \eta| = |MP| = |P - M| = \left| \frac{\vec{n}(M - Q)}{|\vec{n}|^2}\vec{n} \right| = \frac{|\vec{n}(M - Q)|}{|\vec{n}|}.$$

Jsou-li navíc souřadnice vztaženy k jisté kartézské soustavě, tj. nadrovina η má obecnou rovnici

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q}) = \mathbf{n}\mathbf{x} + a_0 = \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = 0,$$

potom vzorec (2.14) nabývá tvaru

$$|M, \eta| = \frac{|a_1 m_1 + \dots + a_n m_n + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}. \quad (2.15)$$

Zdůrazněme jen, že vzorec (2.14), resp. (2.15) používáme v \mathbb{E}_2 pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky, v \mathbb{E}_3 pro výpočet vzdálenosti bodu od roviny atd. \square

Poznámka 2.3.1. (Vzdálenost bodu od přímky)

Opět využijeme algoritmus popsaný větou V.2.3.1. Bod P určíme jakožto průsečík zadané přímky $p : X = A + t\vec{u}$ a podprostoru totálně kolmého k dané přímce p , jenž prochází daným bodem M , což je nadrovina ν o rovnici $\vec{u}(X - M) = 0$ (tzv. **normálová nadrovina** přímky). Potom $|M, p| = |MP|$. Pochopitelně v \mathbb{E}_2 , kde je přímka nadrovinou, můžeme použít vzorec (2.14), resp. (2.15). \square

Příklad 2.3.1. V eukleidovském prostoru \mathbb{E}_4 určete vzdálenost bodu $M = [-9, 2, 1, -5]$ od roviny $\varrho : X = [1, 2, 0, 0] + r(-1, 1, 1, 3) + s(0, -2, 1, -1)$.

Řešení: Nejprve najdeme kolmý průmět P bodu M do roviny ϱ — s využitím příkladu 2.2.3 dostáváme $P = [1, 0, 1, -1]$. Na základě věty V.2.3.1 tedy můžeme psát $|M, \varrho| = |MP| = 2\sqrt{30}$. \diamond

Příklad 2.3.2. V eukleidovském prostoru \mathbb{E}_3 určete vzdálenost bodu $A = [1, 3, -5]$ od roviny $\alpha : X = [3, 1, 1] + t(2, 1, 0) + r(0, 1, 1)$.

Řešení: V \mathbb{E}_3 je rovina nadrovinou, a proto se nabízí využít vzorec (2.15). K tomu je však nutné určit obecnou rovnici roviny α

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + 2z - 3 = 0.$$

Po dosazení do (2.15) dostáváme

$$v = |A, \alpha| = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 6.$$

Vzdálenost dvou podprostorů. Je zřejmé, že případ dvou incidentních, popř. různoběžných podprostorů můžeme vynechat, neboť jejich vzdálenost je podle definice vždy rovna nule. Budeme se proto věnovat jen podprostorům buďto rovnoběžným, nebo mimoběžným.

Věta 2.3.3. *Bud'te $\mathbb{E}'_k, \mathbb{E}''_l$ dva podprostory eukleidovského prostoru \mathbb{E}_n , které nemají žádný společný bod. Potom vždy existují body $P \in \mathbb{E}'_k$ a $Q \in \mathbb{E}''_l$ takové, že přímka $p = \leftrightarrow PQ$ je kolmá na oba podprostory. Navíc platí: $\forall X \in \mathbb{E}'_k, \forall Y \in \mathbb{E}''_l$ je $|XY| \geq |PQ|$. \square*

Důkaz: Necht' jsou dány podprostory $\mathbb{E}'_k = \{A; V'_k\}$ a $\mathbb{E}''_l = \{B; V''_l\}$. Uvažujme nový podprostor $\mathbb{F} = \{A; V'_k \vee W\}$, kde $W = (V'_k \vee V''_l)^\perp$. Zřejmě platí $\mathbb{E}'_k \subset \mathbb{F}$. Oproti tomu podprostory \mathbb{E}'_k a \mathbb{F} jsou různoběžné, neboť je splněna podmínka (ii) věty V.1.3.3

$$A - B \in V'_k \vee W \vee V''_l = (V'_k \vee V''_l) \vee (V'_k \vee V''_l)^\perp = V_n.$$

Zvolme Q libovolný bod průniku $\mathbb{E}''_l \cap \mathbb{F}$. Potom podle věty V.2.2.2 existuje právě jeden bod P , který je pravoúhlým průmětem Q do \mathbb{E}'_k . Zřejmě $\leftrightarrow PQ \perp \mathbb{E}'_k$.

Nyní musíme dokázat $\leftrightarrow PQ \perp \mathbb{E}''_l$. Platí $Q \in \mathbb{F}$ a $P \in \mathbb{E}'_k \subset \mathbb{F}$, z čehož plyne $(Q - P) \in (V'_k \vee W)$. A vzhledem k tomu, že $(Q - P) \perp V'_k$ (tj. $(Q - P) \notin V'_k$), zřejmě platí $(Q - P) \in W = (V'_k \vee V''_l)^\perp$. Odtud již přímo plyne $(Q - P) \perp V''_l$ a tedy $\leftrightarrow PQ \perp \mathbb{E}''_l$.

Konečně musíme dokázat, že pro libovolné body $X \in \mathbb{E}'_k, Y \in \mathbb{E}''_l$ je $|XY| \geq |PQ|$. Můžeme psát

$$Y - X = (Y - Q) + (Q - P) + (P - X)$$

a po umocnění dostáváme

$$(Y - X)^2 = [(Y - Q) + (P - X)]^2 + 2[(Y - Q) + (P - X)](Q - P) + (Q - P)^2.$$

A jelikož platí $(Y - Q) \in V''_l, (X - P) \in V'_k$ a $(Q - P) \in (V'_k \vee V''_l)^\perp$, lze výše uvedený vztah ještě zjednodušit na tvar

$$(Y - X)^2 = [(Y - Q) + (P - X)]^2 + (Q - P)^2.$$

Odtud již přímo plyne $(Y - X)^2 \geq (Q - P)^2$, přičemž rovnost nastává, právě když $(Y - X) = (Q - P)$. \square

Z předešlého důkazu je navíc jasné, že dvojic bodů $P \in \mathbb{E}'_k$, $Q \in \mathbb{E}''_l$ takových, že přímka PQ je kolmá na \mathbb{E}'_k i na \mathbb{E}''_l může být více. Příkladem jsou rovnoběžné podprostory $\mathbb{E}'_k = \{A; V'_k\}$ a $\mathbb{E}''_l = \{B; V''_l\}$ eukleidovského prostoru \mathbb{E}_n . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $V'_k \subset V''_l$. Potom $W = (V''_l)^\perp$, tedy $\mathbb{F} = \mathbb{E}_n$, a proto $\mathbb{E}'_l \cap \mathbb{F} = \mathbb{E}''_l$. Za bod Q lze tedy zvolit každý bod podprostoru \mathbb{E}''_l .

Dokázali jsme tak následující větu, kterou lze využít pro určení vzdálenosti dvou libovolných rovnoběžných podprostorů:

Věta 2.3.4. *Jsou-li \mathbb{E}'_k , \mathbb{E}''_l dva rovnoběžné podprostory v \mathbb{E}_n , přičemž dále platí $k \leq l$, potom je vzdálenost uvedených rovnoběžných podprostorů rovna vzdálenosti libovolného bodu $X \in \mathbb{E}'_k$ od podprostoru \mathbb{E}''_l . \square*

V případě mimoběžných podprostorů \mathbb{E}'_k , \mathbb{E}''_l se příčka kolmá k oběma podprostorům, již využíváme pro výpočet jejich vzdálenosti, nazývá **osa mimoběžných podprostorů**. S využitím věty V.2.3.3 pak vzdálenost mimoběžných podprostorů určíme jako *délku osy*.

Příklad 2.3.3. Určete vzdálenost přímky p a roviny ϱ v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_4 , kde

$$p = \{A; \vec{u}\}, A = [0, 3, -2, -5], \vec{u} = (-2, 0, -1, 2);$$

$$\varrho = \{B; \vec{v}, \vec{w}\}, B = [-2, -4, 0, 4], \vec{v} = (-1, -1, -2, 2), \vec{w} = (1, 2, 1, 0).$$

Řešení: Snadno se přesvědčíme, že oba podprostory jsou mimoběžné. V souladu s větou V.2.3.3 určíme body P, Q takové, že $P \in p$, $Q \in \varrho$, $\leftrightarrow PQ \perp p$, $\leftrightarrow PQ \perp \varrho$. Vektor $P - Q$ lze vyjádřit ve tvaru

$$P - Q = \left([0, 3, -2, -5] + t(-2, 0, -1, 2) \right) - \left([-2, -4, 0, 4] + r(-1, -1, -2, 2) + s(1, 2, 1, 0) \right) = (2 - 2t + r - s, 7 + r - 2s, -2 - t + 2r - s, -9 + 2t - 2r).$$

Dále musí platit $P - Q \perp V_1^p = \langle \vec{u} \rangle$ a $P - Q \perp V_2^\varrho = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, tj.

$$(-2, 0, -1, 2) \cdot (2 - 2t + r - s, 7 + r - 2s, -2 - t + 2r - s, -9 + 2t - 2r) = 0$$

$$(-1, -1, -2, 2) \cdot (2 - 2t + r - s, 7 + r - 2s, -2 - t + 2r - s, -9 + 2t - 2r) = 0$$

$$(1, 2, 1, 0) \cdot (2 - 2t + r - s, 7 + r - 2s, -2 - t + 2r - s, -9 + 2t - 2r) = 0.$$

Dostáváme tedy soustavu tří rovnic o třech neznámých ve tvaru

$$\begin{aligned} 9t - 8r + 3s &= 20 \\ 8t - 10r + 5s &= 23 \\ -3t + 5r - 6s &= -14, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $t = 1$, $r = -1$, $s = 1$. Odtud určíme $P = [-2, 3, -3, -3]$, $Q = [0, -1, 3, 2]$ a tedy $v = |p, \varrho| = |PQ| = 9$. \diamond

2.4 Odchylyky podprostorů

S využitím odchylyky (úhlu) dvou vektorů zavedeme nejprve tzv. odchytku (úhel) směřů v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_n . Musíme však ukázat, že takováto definice má vůbec smysl (tj. nezávisí na výběru generátorů daných směřů).

Věta 2.4.1. *Bud' α úhel (odchytkou) nenulových vektorů \vec{u}, \vec{v} v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_n . Jestliže $\vec{u}' = r\vec{u}, \vec{v}' = s\vec{v}$, kde $r, s \neq 0$, potom úhel (odchytkou) vektorů \vec{u}', \vec{v}' je buďto α , nebo $\pi - \alpha$. \square*

Důkaz: Označíme-li β úhel vektorů \vec{u}', \vec{v}' , potom podle definice je

$$\cos \beta = \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}'}{|\vec{u}'| |\vec{v}'|} = \frac{(r\vec{u}) \cdot (s\vec{v})}{|r\vec{u}| |s\vec{v}|} = \frac{rs(\vec{u} \cdot \vec{v})}{|rs| |\vec{u}| |\vec{v}|} = \pm \cos \alpha.$$

A jelikož $\alpha, \beta \in \langle 0, \pi \rangle$, je zřejmě $\beta = \alpha$, nebo $\beta = \pi - \alpha$. \square

DEFINICE 2.4.1.

Úhlem (odchytkou) φ dvou směřů $\langle \vec{u} \rangle, \langle \vec{v} \rangle$ v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_n rozumíme úhel $\varphi = \min(\alpha, \pi - \alpha)$, kde α je úhel vektorů \vec{u}, \vec{v} .

Výše uvedenou definici již můžeme použít k definici odchylek podprostorů eukleidovského prostoru \mathbb{E}_n .

DEFINICE 2.4.2.

Úhel dvou přímk $a = \{A; \vec{u}\}, b = \{B; \vec{v}\}$ v \mathbb{E}_n je úhel směřů $\langle \vec{u} \rangle, \langle \vec{v} \rangle$.
Úhel přímky $a = \{A; \vec{u}\}$ a nadroviny η v \mathbb{E}_n je doplněk úhlu směř $\langle \vec{u} \rangle$ a normálového směř nadroviny η (úhel α je doplněk úhlu β , jestliže platí $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$). Konečně **úhlem dvou nadrovin** rozumíme úhel směřů jejich normál.

Odchytku (úhel) dvou libovolných podprostorů $\mathbb{E}'_k, \mathbb{E}''_l$ eukleidovského prostoru \mathbb{E}_n bychom mohli (obdobně jako u kolmosti) převést na odchytku (úhel) jejich zaměření V'_k, V''_l . Úhel dvou libovolných vektorových podprostorů však zavádět nebudeme — jeho zavedení je jednak trochu komplikovanější a navíc je známo více přístupů, jak tento úhel definovat. Nicméně ačkoliv jsou tyto definice rozdílné, všechny pochopitelně musejí splývat v „představitelných“ eukleidovských prostorech $\mathbb{E}_n, n = 2, 3$.

Příklad 2.4.1. Určete odchytku přímky p a roviny ϱ v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_3 , jestliže $p = \{A; \vec{u}\}$ a $\varrho = \{B; \vec{v}, \vec{w}\}$, kde $A = [3, -1, 3], \vec{u} = (1, 1, 2), B = [2, 1, 1], \vec{v} = (1, 0, 0), \vec{w} = (1, 1, -1)$.

Řešení: V \mathbb{E}_3 je rovina nadrovinou, a proto v souladu s definicí D.2.4.2 určíme odchylku α přímky p a roviny ϱ jako doplněk úhlu β směrového vektoru přímky $\vec{u} = (1, 1, 2)$ a normálového vektoru roviny $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = (1, 0, 0) \times (1, 1, -1) = (0, 1, 1)$, tj.

$$\cos \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha = \frac{|(1, 1, 2) \cdot (0, 1, 1)|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{0+1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odchylka přímky p a roviny ϱ je tedy rovna $\alpha = \frac{\pi}{3}$. \diamond

2.5 Objem rovnoběžnostěnu a simplexu

Obsah rovnoběžníka a objem rovnoběžnostěnu. **Rovnoběžník** je čtyřúhelník (mnohoúhelník se čtyřmi vrcholy) v \mathbb{E}_2 , jehož každé dvě protější strany jsou rovnoběžné. Snadno zjistíme, že rovnoběžník, jenž je vymezen dvěma lineárně nezávislými vektory \vec{a} a \vec{b} vycházejícími z počátku O (tj. rovnoběžník s vrcholy o souřadnicích \mathbf{o} , \mathbf{a} , $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, \mathbf{b}) je popsán rovnicí

$$X = O + t_1 \vec{a} + t_2 \vec{b}, \quad \text{kde } 0 \leq t_1, t_2 \leq 1.$$

V souladu s našimi předchozími znalostmi určíme **obsah rovnoběžníka** podle vzorce

$$S_{\text{rovnoběžník}} = z \cdot v_z = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi,$$

kde φ je úhel, jenž svírají vektory \vec{a} a \vec{b} ($|\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ je velikost výšky na stranu \vec{a}). Využijeme-li znalosti vektorového součinu a vztahu pro jeho velikost, potom snadno nahlédneme, že platí

$$S_{\text{rovnoběžník}} = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (2.16)$$

Vektorový součin jsme zavedli pro vektory v trojrozměrném vektorovém prostoru, a proto bereme vrcholy rovnoběžníka jakožto body eukleidovského prostoru \mathbb{E}_3 . Chceme-li určit obsah rovnoběžníka v rovině \mathbb{E}_2 , stačí uvažovat u každého bodu třetí souřadnici rovnu 0. Vzorec (2.16) pak pro rovnoběžník v eukleidovské rovině \mathbb{E}_2 přechází na tvar

$$S_{\text{rovnoběžník}, \mathbb{E}_2} = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right|. \quad (2.17)$$

Poznámka 2.5.1. Vzorec pro výpočet obsahu rovnoběžníka můžeme v \mathbb{E}_3 využít i pro *výpočet vzdálenosti bodu A od přímky p* : $X = B + t\vec{u}$. Určíme

obsah rovnoběžníka vymezeného vektory $A - B$ a \vec{u} , vzdálenost bodu A od přímky p pak představuje výšku tohoto rovnoběžníka. Odtud dostáváme

$$|A, p| = \frac{|(A - B) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}. \quad (2.18)$$

Rovnoběžnostěn v \mathbb{E}_3 je mnohostěn v \mathbb{E}_3 , jehož každá ze šesti stěn je rovnoběžník. Rovnoběžnostěn, jenž je vymezen třemi lineárně nezávislými vektory \vec{a} , \vec{b} a \vec{c} vycházejícími z počátku O (tj. mnohostěn s 8 vrcholy o souřadnicích \mathbf{o} , \mathbf{a} , $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, \mathbf{b} , \mathbf{c} , $\mathbf{a} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$) je popsán rovnicí

$$X = O + t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}, \quad \text{kde } 0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1.$$

V souladu s našimi předchozími znalostmi vypočteme **objem rovnoběžnostěnu** v \mathbb{E}_3 podle vztahu

$$V_{\text{rovnoběžnostěn}} = S \cdot v,$$

kde S je obsah rovnoběžníka vymezeného vektory \vec{a} , \vec{b} ($S = |\vec{a} \times \vec{b}|$) a v je výška na tuto stěnu. Výšku v získáme jakožto velikost pravoúhlého průmětu vektoru \vec{c} na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ (neboť $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ a $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$):

$$v = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Po dosazení pak dostáváme

$$V_{\text{rovnoběžnostěn}} = S \cdot v = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|,$$

tj.

$$V_{\text{rovnoběžnostěn}, \mathbb{E}_3} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|. \quad (2.19)$$

Vzorec (2.17), resp. (2.19) představuje tzv. vnější součin v \mathbb{E}_n pro $n = 2$, resp. $n = 3$. Výše uvedený přístup lze tedy přímo zobecnit pro n lineárně nezávislých vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ v n -rozměrném eukleidovském prostoru, které vymezují **rovnoběžnostěn** v \mathbb{E}_n o rovnici

$$X = O + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \dots + t_n\vec{a}_n, \quad \text{kde } 0 \leq t_1, t_2, \dots, t_n \leq 1.$$

Jednoznačně určené číslo, které získáme jako absolutní hodnotu z vnějšího součinu $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]$, považujeme za **objem rovnoběžnostěnu** s hranami \vec{a}_i a velikostmi hran $|\vec{a}_i|$ pro $i = 1, \dots, n$, tj.

$$V_{\text{rovnoběžnostěn}, \mathbb{E}_n} = \left| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \right|. \quad (2.20)$$

Obsah trojúhelníka, objem simplexu (spec. čtyřstěnu). Simplexem v rovině \mathbb{E}_2 je trojúhelník, který je konvexním obalem lineárně nezávislých bodů A, B, C . Trojúhelník ABC je polovinou rovnoběžníka vymezeného vektory $B - A$ a $C - A$, a proto v souladu s předcházejícím zjištěním pro **obsah trojúhelníka** ABC platí

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \left| (B - A) \times (C - A) \right|. \quad (2.21)$$

V prostoru \mathbb{E}_3 je simplexem čtyřstěn, který je konvexním obalem lineárně nezávislých bodů A, B, C, D . Čtyřstěn $ABCD$ je jehlan s trojúhelníkovou podstavou ABC , jejíž obsah se vypočte podle (2.21). Pro **objem čtyřstěnu** $ABCD$ pak platí

$$\begin{aligned} V_{\text{čtyřstěn}} &= \frac{1}{3} S(\triangle ABC) \cdot v_D = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| (B - A) \times (C - A) \right| \cdot \left| \frac{\left((B - A) \times (C - A) \right) \cdot (D - A)}{\left| (B - A) \times (C - A) \right|} \right|, \end{aligned}$$

tj.

$$V_{\text{čtyřstěn}} = \frac{1}{6} \left| \left((B - A) \times (C - A) \right) \cdot (D - A) \right| = \frac{1}{6} \left| \left[(B - A), (C - A), (D - A) \right] \right|. \quad (2.22)$$

Uvedený přístup můžeme opět zobecnit. Ve shodě s výše získanými výsledky nazveme **objemem simplexu**, který je konvexním obalem $n + 1$ lineárně nezávislých bodů A_0, A_1, \dots, A_n v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_n , číslo

$$V_{\text{simplex}, \mathbb{E}_n} = \frac{1}{n!} \left| \left[(A_1 - A_0), (A_2 - A_0), \dots, (A_n - A_0) \right] \right|. \quad (2.23)$$

Příklad 2.5.1. V eukleidovském prostoru \mathbb{E}_4 určete objem rovnoběžnostěnu, jenž je určen vektory $\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (5, 2, 4, 3)$, $\vec{u}_3 = (-1, -3, 7, 0)$, $\vec{u}_4 = (2, 2, 1, -5)$.

Řešení: Podle vzorce (2.20) je

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \right| = 104.$$

Příklad 2.5.2. Určete objem čtyřstěnu, jehož stěny leží v rovinách $\alpha: x + y + z - 1 = 0$, $\beta: x - y - 1 = 0$, $\gamma: x - z - 1 = 0$, $\delta: z - 2 = 0$.

Řešení: Nejprve určíme souřadnice jednotlivých vrcholů čtyřstěnu, a to $A \in \beta \cap \gamma \cap \delta$, $B \in \alpha \cap \gamma \cap \delta$, $C \in \alpha \cap \beta \cap \delta$, $D \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$ — dostáváme $A = [3, 2, 2]$, $B = [3, -4, 2]$, $C = [0, -1, 2]$ a $D = [1, 0, 0]$. S využitím vzorce (2.23) tedy můžeme psát

$$V = \frac{1}{6} \left| \left[(B - A), (C - A), (D - A) \right] \right| = \left| \begin{vmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \right| = 6.$$

Kapitola 3

Kružnice a kulová plocha

V kapitole 4 budeme hovořit o *kuželosečkách* jako o kvadratických křivkách v rovině \mathbb{E}_2 a v kapitole 5 o *kvadrikách* jako o kvadratických plochách v prostoru \mathbb{E}_3 , z tradičních důvodů se však budeme nejprve zabývat kružnicí a kulovou plochou (sférou). Ty samozřejmě rovněž patří mezi výše uvedené kvadratické objekty, v této kapitole však zvolíme jiný přístup a zavedeme je jako množiny bodů v rovině, resp. v prostoru definované pomocí pojmu vzdálenost.

3.1 Kružnice

DEFINICE 3.1.1.

Kružnicí nazýváme množinu všech bodů v rovině σ , jejíž každý bod X má od pevně zvoleného bodu $S \in \sigma$, který nazýváme **střed**, konstantní vzdálenost $|SX| = r > 0$ (tzv. **poloměr**).

Značíme $k(\sigma, S, r)$, resp. jen $k(S, r)$ v případě $\sigma = \mathbb{E}_2$.

Jsou-li souřadnice bodů v eukleidovské rovině \mathbb{E}_2 vztaheny k jisté kartézské soustavě souřadnic, potom můžeme kružnici $k(S, r)$ popsat rovnicí

$$k : (X - S)^2 - r^2 = (x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 - r^2 = 0. \quad (3.1)$$

Nejznámější parametrizace kružnice mají tvar

$$k : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (s_1 + r \cos t, s_2 + r \sin t), \quad \text{kde } 0 \leq t < 2\pi \quad (3.2)$$

$$k : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \left(s_1 + r \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, s_2 + r \frac{2t}{1 + t^2} \right), \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

V druhém případě je kružnice popsána parametricky pomocí *racionálních funkcí* a hovoříme o tzv. **racionální parametrizaci**.

Uvažujme kružnici $k(S, r) : (X - S)^2 - r^2 = 0$ a libovolný bod M . Každému bodu M v rovině \mathbb{E}_2 přiřadíme číslo, které bude vyjadřovat jeho vztah ke kružnici k :

DEFINICE 3.1.2.

Reálné číslo $\mu_k^M = |SM|^2 - r^2 = (\mathbf{m} - \mathbf{s})^2 - r^2$ nazýváme **mocností bodu M ke kružnici $k(S, r) : (X - S)^2 - r^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{s})^2 - r^2 = 0$** .

Zřejmě platí:

- $\mu_k^M > 0 \Leftrightarrow |SM| = |\mathbf{m} - \mathbf{s}| > r \Leftrightarrow M$ leží vně kružnice k
- $\mu_k^M = 0 \Leftrightarrow |SM| = |\mathbf{m} - \mathbf{s}| = r \Leftrightarrow M$ leží na kružnici k
- $\mu_k^M < 0 \Leftrightarrow |SM| = |\mathbf{m} - \mathbf{s}| < r \Leftrightarrow M$ leží uvnitř kružnice k

Navíc snadno nahlédneme, že pro vnější bod M vyjadřuje výraz $\sqrt{(\mathbf{m} - \mathbf{s})^2 - r^2}$ délku úseku MT na tečnu s dotykovým bodem T vedené z bodu M ke kružnici k (podle Pythagorovy věty: $|MT|^2 + r^2 = |SM|^2$).

Je-li $k(\sigma, S, r)$ kružnice ležící v rovině $\sigma \subset \mathbb{E}_3$ o rovnici $\vec{n} \cdot (X - S) = 0$, potom vzhledem k lokální kartézské soustavě souřadnic $\langle S; \vec{u}, \vec{v} \rangle$ definované v rovině σ (tj. $\sigma : X = S + y_1 \vec{u} + y_2 \vec{v}$; $\vec{n} \perp \vec{u}, \vec{v}$) lze kružnici k popsat *vnitřní rovnicí*

$$k : y_1^2 + y_2^2 - r^2 = 0 \quad (3.4)$$

nebo parametricky

$$\begin{aligned} k : \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) &= S + r \cos t \cdot \vec{u} + r \sin t \cdot \vec{v} = \\ &= (s_1 + r \cos t \cdot u_1 + r \sin t \cdot v_1, s_2 + r \cos t \cdot u_2 + r \sin t \cdot v_2, \\ & \quad s_3 + r \cos t \cdot u_3 + r \sin t \cdot v_3) \quad \text{kde } 0 \leq t < 2\pi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Otázkou zůstává, jak nalezneme bázové vektory lokální kartézské soustavy souřadnic $\langle S; \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Necht' A je bod kružnice $k(\sigma, S, r)$, potom můžeme volit

$$\vec{u} = \frac{A - S}{|A - S|} \quad \text{a} \quad \vec{v} = \vec{u} \times \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Je zřejmé, že pomocí transformace soustavy souřadnic, je možné každou kružnici $k(\sigma, S, r)$ převést do souřadné roviny $x_1 x_2$ ($x_3 = 0$), tj. bez újmy na obecnosti je dále možné pracovat pouze s rovnicemi (3.1), (3.2) nebo (3.3).

Příklad 3.1.1. Určete parametrické vyjádření kružnice ℓ , která leží v rovině $\alpha : 4x - 5y + 2z - 11 = 0$, má střed v bodě $S = [1, -1, 1]$ a její poloměr je $r = 2$.

Řešení: Nejprve musíme najít bázové vektory \vec{u}, \vec{v} lokální kartézské soustavy souřadnic $\langle S; \vec{u}, \vec{v} \rangle$ roviny ϱ , tj. libovolné dva vektory \vec{u}, \vec{v} splňující podmínky $\vec{u}, \vec{v} \in V_2^e$ $\vec{u} \perp \vec{v}$. Zvolme libovolný bod $M \neq S$ ležící v rovině ϱ — např. $M = [3, 1, 2]$. Potom dle výše uvedeného postupu je

$$\vec{u} = \frac{M - S}{|M - S|} = \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$$

$$\vec{v} = \vec{u} \times \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{3}(2, 2, 1) \times \frac{(4, -5, 2)}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}(1, 0, -2)$$

Vyjádření kružnice ℓ tedy v souladu s (3.5) nabývá tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \left(1 + \frac{4}{3} \cos t + \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin t, -1 + \frac{4}{3} \cos t, 1 + \frac{2}{3} \cos t - \frac{4\sqrt{5}}{5} \sin t\right) \diamond$$

Průsečky přímky a kružnice. Společné body přímky $p : X = A + t\vec{u}$ ($t \in \mathbb{R}$) a kružnice $k : (X - S)^2 - r^2 = 0$ určíme řešením *kvadratické* rovnice

$$(A + t\vec{u} - S)^2 - r^2 = [(A - S) + t\vec{u}]^2 - r^2 = 0.$$

Pro parametr t dostáváme

$$t_{1,2} = \frac{\vec{u}(S - A) \pm \sqrt{[\vec{u}(A - S)]^2 - \vec{u}^2[(A - S)^2 - r^2]}}{\vec{u}^2}. \quad (3.6)$$

Jestliže existují dva reálné různé kořeny t_1, t_2 , kterým odpovídají dva společné body P_1, P_2 , potom je přímka p **sečnou** kružnice k ; v tomto případě platí $|S, p| < r$.

Pro komplexně sdružené parametry t_1, t_2 nedostáváme žádné reálné průsečky a přímka p je **vnější přímkou** kružnice k ; v tomto případě platí $|S, p| > r$.

Tečna a polára kružnice. Pro $|S, p| = r$ je diskriminant kvadratické rovnice (3.6) roven nule (jak bychom se mohli přesvědčit přímým výpočtem), a proto dostáváme dvojnásobný kořen $t_1 = t_2 (= t_0)$. Přímka p je v tomto případě **tečnou** kružnice k mající s ní společný (dvojnásobný) **bod dotyku** T

$$T = A + t_0\vec{u}.$$

Jelikož v případě tečny p platí $ST \perp p$, pro každý bod $X \in p$ dostáváme

$$0 = (T - S)(X - T) = (T - S)(X - S + S - T) = (T - S)(X - S) - (T - S)^2.$$

$T \in k$, tj. $(T - S)^2 = r^2$, a proto rovnici tečny kružnice v bodě $T \in k$ můžeme psát ve tvaru

$$(T - S)(X - S) - r^2 = 0. \quad (3.7)$$

Otázkou zůstává, jak nalezneme rovnici tečny kružnice z vnějšího bodu R . Kdybychom znali dotykový bod T , mohli bychom podle předcházejícího postupu zapsat rovnici tečny v bodě T ve tvaru $(T - S)(X - S) - r^2 = 0$. Tato tečna byla vedena z bodu R , a proto souřadnice bodu R musejí rovnici vyhovovat, tj.

$$(T - S)(R - S) - r^2 = 0 \quad (3.8)$$

Na (3.8) se ovšem můžeme dívat i jiným způsobem, a to jako na vyjádření vztahu $T \in r$, kde r je přímka o rovnici

$$(X - S)(R - S) - r^2 = (R - S)(X - S) - r^2 = 0 \quad (3.9)$$

Přímka r se nazývá **polára** kružnice k vzhledem k **pólu** R . Průsečíky poláry r vnějšího bodu R s kružnicí k jsou dle výše uvedeného dotykovými body tečen vedených z bodu R ke kružnici k .

Příklad 3.1.2. Z bodu $M = [-1, 6]$ veďte tečny ke kružnici k se středem $S = [-2, -1]$ a poloměrem $r = 5$.

Řešení: Rovnice kružnice k je $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 - 25 = 0$. Jak víme, body dotyku hledaných tečen musí ležet na poláře m pólu M

$$m: (M - S) \cdot (X - S) - r^2 = (1, 7) \cdot (x + 2, y + 1) - 25 = x + 7y - 16 = 0.$$

Řešením soustavy lineární rovnice $x + 7y - 16 = 0$ a kvadratické rovnice $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 - 25 = 0$ určíme průsečíky $m \cap k$, tj. body dotyku $T_1 = [-5, 3]$ a $T_2 = [2, 2]$. Odtud již snadno s využitím vztahu (3.7) určíme rovnice obou tečen

$$t_1: (T_1 - S) \cdot (X - S) - r^2 = (-3, 4) \cdot (x + 2, y + 1) - 25 = 0,$$

$$t_2: (T_2 - S) \cdot (X - S) - r^2 = (4, 3) \cdot (x + 2, y + 1) - 25 = 0$$

neboli $t_1: 3x - 4y + 27 = 0$, $t_2: 4x + 3y - 14 = 0$. ◇

Průsečíky dvou kružnic. Dejme do rovnosti rovnice kružnic $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a po rozepsání do souřadnic a po úpravě dostaneme

$$(X - S_1)^2 - r_1^2 - [(X - S_2)^2 - r_2^2] = 2(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)\mathbf{x} + \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0$$

Rovnice

$$2(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)\mathbf{x} + \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0 \quad (3.10)$$

je pro $S_1 \neq S_2$, tj. pro *nesoustředné kružnice* rovnicí přímky c , která protíná kružnici k_1 (resp. k_2) ve společných bodech obou kružnic — pro určení společných bodů kružnic tak lze využít již uvedený algoritmus pro určení průsečíků přímky a kružnice. Navíc je zřejmé, že přímka c s rovnicí (3.10) má normálový vektor $S_2 - S_1$, a proto je kolmá na přímku spojující středy S_1S_2 .

Je nutné zdůraznit ještě jeden fakt. Výše uvedený rozdíl rovnic kružnic k_1 , k_2 neboli vztah $(X - S_1)^2 - r_1^2 - [(X - S_2)^2 - r_2^2] = 0$ lze samozřejmě rovněž interpretovat jako rovnost mocností

$$\mu_{k_1}^X = \mu_{k_2}^X,$$

a proto všechny body přímky c o rovnici (3.10) mají k nesoustředným kružnicím k_1 a k_2 stejnou mocnost. Přímku c nazýváme **chordálov (potenční přímka)** kružnic k_1 , k_2 .

Příklad 3.1.3. Jsou dány kružnice $k_1 : \mathbf{x}(t) = (-2 + 4 \cos t, 3 + 4 \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $k_2(S_2, r_2)$, kde $S_2 = [1, 1]$, $r_2 = 5$. Na ose y najděte bod L , jenž má k oběma kružnicím stejnou mocnost. Mocnost $\mu_{k_1}^L = \mu_{k_2}^L$ určete.

Řešení: Určíme rovnice obou kružnic — $k_1 : x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ a $k_2 : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$. Body mající stejnou mocnost k oběma kružnicím leží na chordále c_{12} , jež má s využitím vztahu (3.10) rovnici

$$c_{12} : (x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3) - (x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23) = 6x - 4y + 20 = 0$$

Bod L je průsečíkem přímky c_{12} a osy $x = 0$, tj. $L = [0, 5]$. Mocnost $\mu_{k_1}^L$, resp. $\mu_{k_2}^L$ snadno určíme ze vztahu daného definicí 3.1.2

$$\begin{aligned} \mu_{k_1}^L &= |S_1L|^2 - r_1^2 = (2^2 + 2^2) - 16 = -8, \\ \mu_{k_2}^L &= |S_2L|^2 - r_2^2 = (1^2 + 4^2) - 25 = -8. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ortogonální kružnice. Dvě kružnice k_1 , k_2 nazýváme **kolmé (ortogonální)**, značíme $k_1 \perp k_2$, právě když jsou kolmé jejich tečny v jednom z průsečíků (pro oba průsečíky dostaneme shodné úhly). Je zřejmé, že potom střed S_1 kružnice k_1 leží na tečně kružnice k_2 sestrojené v jejich průsečíku P a naopak. Podle Pythagorovy věty platí $|S_1S_2|^2 = |S_1P|^2 + |S_2P|^2 = r_1^2 + r_2^2$, a proto můžeme psát:

$$k_1 \perp k_2 \Leftrightarrow (S_1 - S_2)^2 - r_1^2 - r_2^2 = 0. \quad (3.11)$$

Doplňme jen, že definujeme i **úhel (odchylku)** dvou protínajících se kružnic, a to jako úhel jejich tečen ve společném bodě.

3.2 Kulová plocha

DEFINICE 3.2.1.

Kulovou plochou nazýváme množinu všech bodů v prostoru \mathbb{E}_3 , jejíž každý bod X má od pevně zvoleného bodu S , který nazýváme **střed**, konstantní vzdálenost $|SX| = r > 0$ (tzv. **poloměr**).
Značíme $\kappa(S, r)$.

Jsou-li souřadnice bodů v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_3 vztaheny k jisté kartézské soustavě souřadnic, potom můžeme kulovou plochu $\kappa(S, r)$ popsat rovnicí

$$\kappa : (X - S)^2 - r^2 = (x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 - r^2 = 0. \quad (3.12)$$

Použijeme-li geografické souřadnice u (*zeměpisná délka*), v (*zeměpisná šířka*), potom každý bod $X \in \kappa(O, r)$ můžeme popsat

$$\kappa : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \sin u \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \leq u < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \end{matrix} \quad (3.13)$$

(3.13) je příkladem parametrického vyjádření kulové plochy se středem v počátku.

Vzhledem k libovolné kartézské soustavě souřadnic $\langle S; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ je možné s využitím (3.13) kulovou plochu $\kappa(S, r)$ popsat parametricky ve tvaru

$$\kappa(S, r) : \mathbf{x}(u, v) = S + r \cos u \cos v \cdot \vec{e}_1 + r \sin u \cos v \cdot \vec{e}_2 + r \sin v \cdot \vec{e}_3 \quad (3.14)$$

Stejně jako u kružnice i v případě kulové plochy lze najít *racionální parametrické* kulové plochy κ ve tvaru

$$\kappa : \mathbf{x}(u, v) = \left(s_1 + r \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}, s_2 + r \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, s_3 + r \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \right),$$

kde $u, v \in \mathbb{R}$. (3.15)

Průsečíky přímky s kulovou plochou. Pro hledání společných bodů přímky $p : X = A + t\vec{u}$ ($t \in \mathbb{R}$) a kulové plochy $\kappa : (X - S)^2 - r^2 = 0$ použijeme stejný algoritmus jako při *hledání společných bodů přímky a kružnice*. Řešením kvadratické rovnice získáme hodnoty parametrů t_1, t_2 (3.6), kde tentokrát bereme souřadnice $\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$.

Jestliže existují dva různé reálné kořeny t_1, t_2 , kterým odpovídají dva společné body P_1, P_2 , potom je přímka p **sečnou** kulové plochy κ ; v tomto případě

platí $|S, p| < r$. Pro komplexně sdružené parametry t_1, t_2 nedostáváme žádné reálné průsečky a přímka p je **vnější přímkou** kulové plochy κ ; v tomto případě platí $|S, p| > r$. Pro $|S, p| = r$ dostáváme z (3.6) $t_1 = t_2 (= t_0)$ a přímka p je **tečnou** kulové plochy κ mající s kulovou plochou společný (dvojnásobný) **bod dotyku** T ; navíc platí $ST \perp p$.

Tečná rovina kulové plochy. Pro směrový vektor \vec{u} libovolné tečny kulové plochy $\kappa : (X - S)^2 - r^2 = 0$ s bodem dotyku T platí $\vec{u} \cdot (T - S) = 0$, tzn. že směrové vektory všech tečen kulové plochy s bodem dotyku $T \in \kappa$ náleží téže normálové rovině přímkou ST sestrojené v bodě T

$$\tau : (T - S)(X - T) = 0. \quad (3.16)$$

Rovina τ se nazývá **tečná rovina** kulové plochy $\kappa(S, r)$ v bodě $T \in \kappa$ a obdobně jako v případě kružnice je možné rovnici (3.16) převést na tvar

$$(T - S)(X - S) - r^2 = 0 \quad (3.17)$$

Vezmeme-li v rovnici (3.17) místo dotykového bodu $T \in \kappa$ libovolný bod R dostáváme analogicky jako v případě kružnice rovnici tzv. **polární roviny** kulové plochy κ vzhledem k **pólu** R

$$(R - S)(X - S) - r^2 = 0, \quad (3.18)$$

v níž leží dotykové body všech tečných rovin vedených z bodu R ke kulové ploše κ .

Řez kulové plochy rovinou. Rovina $\varrho : \vec{n} \cdot (X - A) = \mathbf{nx} + a_0 = 0$ protíná kulovou plochu $\kappa : (X - S)^2 - r^2 = 0$ v kružnici $k(\varrho, S', r')$, právě když $|S, \varrho| < r$. Jestliže $S \in \varrho$, potom se kružnice řezu nazývá **hlavní kružnice**; v opačném případě hovoříme o **vedlejších kružnicích**.

Je-li k *hlavní kružnice*, potom $S' = S$ a $r' = r$. Je-li k *vedlejší kružnice*, potom její střed S' snando určíme jako patu kolmice spuštěné z bodu S na rovinu ϱ . Pro určení poloměru r' využijme Pythagorovu větu a obdržíme

$$r' = \sqrt{r^2 - d^2},$$

kde $d = |S, \varrho| = |SS'|$ je vzdálenost středu S od roviny řezu. Rovnici kružnice $k(\varrho, S', r')$ popíšeme parametricky dle vztahu (3.5).

Průnik dvou kulových ploch. Obdobně jako v případě řešení průniku dvou kružnic dáme do rovnosti rovnice kulových ploch $\kappa_1(S_1, r_1)$, $\kappa_2(S_2, r_2)$ a po úpravě dostaneme

$$(X - S_1)^2 - r_1^2 - [(X - S_2)^2 - r_2^2] = 2(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)\mathbf{x} + \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0$$

Rovnice

$$2(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)\mathbf{x} + \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0 \quad (3.19)$$

je tentokrát pro $S_1 \neq S_2$ rovnicí roviny χ , která v případě $|r_1 - r_2| < |S_1 S_2| < r_1 + r_2$ protíná kulovou plochu κ_1 (resp. κ_2) ve společné kružnici, a proto lze využít již uvedený algoritmus pro určení kružnice řezu roviny a kulové plochy.

Stejně jako v případě kružnice v rovině E_2 bychom každému bodu $M \in \mathbb{E}_3$ mohli přiřadit reálné číslo $\mu_\kappa^M = (M - S)^2 - r^2$, tzv. **mocnost bodu M ke kulové ploše** $\kappa(S, r) : (X - S)^2 - r^2 = 0$.

Platí:

- $\mu_\kappa^M > 0 \Leftrightarrow |SM| = |\mathbf{m} - \mathbf{s}| > r \Leftrightarrow M$ leží vně kulové plochy κ
- $\mu_\kappa^M = 0 \Leftrightarrow |SM| = |\mathbf{m} - \mathbf{s}| = r \Leftrightarrow M$ leží na kulové ploše κ
- $\mu_\kappa^M < 0 \Leftrightarrow |SM| = |\mathbf{m} - \mathbf{s}| < r \Leftrightarrow M$ leží uvnitř kulové plochy κ

Rovina (3.19), která se nazývá **potenční rovina** nesoustředných kulových ploch $\kappa_1(S_1, r_1)$, $\kappa_2(S_2, r_2)$, je potom množinou všech bodů prostoru E_3 , které mají ke kulovým plochám κ_1 a κ_2 stejnou mocnost.

Příklad 3.2.1. Jsou dány dvě kulové plochy $\kappa_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 4z - 8 = 0$ a $\kappa_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 3z - 11 = 0$. Určete jejich průsečné kružnici.

Řešení: Všechny společné body kulových ploch κ_1 , κ_2 leží v potenční rovině χ_{12} , jejíž rovnice je

$$\begin{aligned} \chi_{12} : (x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 4z - 8) - (x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 3z - 11) = \\ = -2x + 2y - z + 3 = 0. \end{aligned}$$

Řešení průniku dvou kulových ploch jsme tak převedli na řešení průniku roviny χ_{12} a jedné z daných kulových ploch, např. κ_1 , která má střed $S_1 = [3, -2, 2]$ a poloměr $r_1 = 5$.

Jelikož platí $d = |S_1, \chi| = 3 < r_1 = 5$, je průnikem vedlejší kružnice kulové plochy κ_1 . Její střed určíme jakožto pravoúhlý průmět bodu S_1 do roviny χ_{12} — dostáváme $S' = [1, 0, 1]$. Ještě vypočteme poloměr průsečné kružnice $r' = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Postupem analogickým postupu v příkladu 3.1.1 je možné určit parametrické rovnice průsečné kružnice kulových ploch κ_1 , κ_2 . ◇

Kapitola 4

Kuželosečky

4.1 Elipsa

DEFINICE 4.1.1.

Množinu všech bodů v rovině \mathbb{E}_2 , které mají od dvou různých pevně zvolených bodů F_1, F_2 konstantní součet vzdáleností $2a$, nazýváme **elipsa**; tj.

$$k_e = \{X \in \mathbb{E}_2 : |XF_1| + |XF_2| = 2a = \text{konst.}, 0 < |F_1F_2| < 2a\}.$$

Dané pevné body F_1, F_2 se nazývají **ohniska**¹, spojnicím XF_1 a XF_2 říkáme **průvodiče**. Střed S úsečky F_1F_2 je tzv. **střed elipsy**. Vzdálenost ohnisek od středu se nazývá **lineární výstřednost (excentricita)** a označuje se e

$$|SF_1| = |SF_2| = e.$$

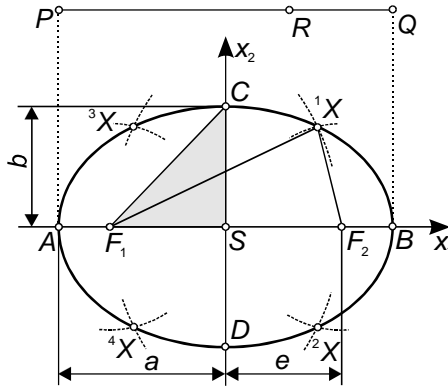
Kdybychom v definici elipsy připustili i možnost, že ohniska F_1, F_2 splynou, potom by se mezi elipsy zařadila i *kružnice* jakožto speciální případ elipsy s nulovou výstředností.

Bezprostředně z definice vyplývá tzv. **bodová konstrukce elipsy**: Úsečku PQ o délce $2a$ rozdělíme libovolným bodem R na dvě části s délkami r_1 a r_2 (tj. $r_1 + r_2 = 2a$) a sestrojíme dvě dvojice kružnic $k_1(F_1, r_1), k_2(F_2, r_2)$ a $k'_1(F_1, r_2), k'_2(F_2, r_1)$. Je zřejmé, že kružnice k_1, k_2 (resp. k'_1, k'_2) se protínají v bodech elipsy ($k_1 \cap k_2 = \{^1X, ^2X\}, k'_1 \cap k'_2 = \{^3X, ^4X\}$). Různou volbou bodu R získáváme různé poloměry kružnic a tím i různé body elipsy.

¹ F — zkr. *focus*, z lat. *ohnisko*

Na základě bodové konstrukce snadno nahlédneme, že elipsa je *osově souměrná* podle přímky F_1F_2 i podle osy úsečky F_1F_2 a *středově souměrná* podle středu úsečky F_1F_2 .

Body A, B , v nichž přímka F_1F_2 protíná elipsu, jsou tzv. **hlavní vrcholy**. Přímku AB nazýváme **hlavní osa** a — nemůže-li dojít k záměně — označujeme týmž názvem i vzdálenost $|AB|$. Délku $|SA| = |SB| = a$ nazveme **hlavní poloosa**. Body C, D , ve kterých osa úsečky F_1F_2 protíná elipsu, jsou tzv. **vedlejší vrcholy**. Přímku CD nazýváme **vedlejší osa** a opět — nemůže-li dojít k záměně — označujeme týmž názvem i vzdálenost $|CD|$. Délku $|SC| = |SD| = b$ nazveme **vedlejší poloosa**.



Obr. 4.1.1

Pro vedlejší vrcholy C, D nastává $|F_1C| = |F_2C| = |F_1D| = |F_2D| = a$. Pravoúhlý trojúhelník F_iSC , resp. F_iSD ($i = 1, 2$) je tzv. **charakteristický trojúhelník** elipsy s odvěsnami b, e a přeponou a , a proto

$$a^2 = b^2 + e^2. \quad (4.1)$$

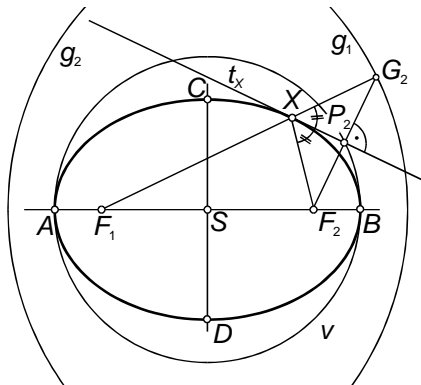
Z toho plyne, že k určení elipsy stačí dva z prvků a, b, e ($a > b, e$).

Poznamenejme ještě, že všechny body roviny \mathbb{E}_2 je možné charakterizovat na základě jejich polohy vzhledem k elipse:

- $|F_1X| + |F_2X| < 2a \Leftrightarrow X$ je **vnitřní bod** elipsy;
- $|F_1X| + |F_2X| = 2a \Leftrightarrow X$ je bod elipsy;
- $|F_1X| + |F_2X| > 2a \Leftrightarrow X$ je **vnější bod** elipsy.

Tečna elipsy, ohniskové vlastnosti. Přímka může mít s elipsou trojí možnou vzájemnou polohu. Nemá-li s elipsou žádný společný bod, nazývá se **vnější přímka** (všechny body takovéto přímky jsou vnějšími

body elipsy). Přímka, která má s elipsou právě jeden společný bod a jejíž všechny ostatní body jsou vnější, se nazývá **tečna elipsy**; společný bod nazýváme **bod dotyku**. Má-li přímka s elipsou společné dva **průsečíky**, nazývá se **sečna** (speciálními sečnami jsou tzv. **průměry** procházející středem elipsy — např. hlavní a vedlejší osa)).



Obr. 4.1.2

Bud' t_X tečna elipsy v jejím libovolném bodě X . Označme dále G_i bod souměrně sdružený s ohniskem F_i ($i = 1, 2$) podle tečny t_x a $P_i = t_X \cap F_i G_i$ patu kolmice spuštěné z ohniska F_i na tečnu t_X . Potom platí:

- Tečna elipsy t_X v jejím libovolném bodě X púli vnější úhel průvodičů $F_1 X$ a $F_2 X$.²
- Bod G_2 (resp. G_1) souměrně sdružený s ohniskem F_2 (resp. F_1) podle tečny t_X leží na kružnici $g_1(F_1, 2a)$ (resp. $g_2(F_2, 2a)$), která se nazývá **řídící kružnice** elipsy.
- Paty kolmic P_1 , resp. P_2 spuštěných z ohniska F_1 , resp. F_2 na tečnu t_X leží na kružnici $v(S, a)$ — tzv. **vrcholové kružnici** elipsy, která je obrazem řídící kružnice g_1 , resp. g_2 ve stejnoolehlosti se středem F_2 , resp. F_1 a koeficientem $\frac{1}{2}$.

Výše uvedené věty (tzv. **ohniskové** nebo **fokální věty**) lze využít pro řadu konstrukcí týkajících se elipsy; např. je možné pomocí nich sestavit tečnu t_X v bodě elipsy X , resp. tečnu t_R z vnějšího bodu R .

Analytický popis elipsy. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem ve středě elipsy S a souřadnou osou x_1 v hlavní ose elipsy AB a

²Ze čtyř úhlů, které tvoří průvodiče bodu X elipsy, vždy jeden obsahuje střed elipsy — tento úhel a úhel s ním vrcholový se nazývají **vnitřní úhly průvodičů**. Úhly vedlejší k vnitřním úhlům nazýváme **vnější úhly průvodičů**.

souřadnou osou x_2 ve vedlejší ose elipsy CD — jsou-li souřadné osy osami souměrnosti elipsy (tj. počátek je současně středem elipsy), potom říkáme, že elipsa je v tzv. **základní poloze**.

Pro libovolný bod elipsy $X = [x_1, x_2]$ platí $|XF_1| + |XF_2| = 2a$, tj.

$$\sqrt{(e + x_1)^2 + x_2^2} + \sqrt{(e - x_1)^2 + x_2^2} = 2a.$$

Po úpravě a umocnění získáváme

$$e^2 + 2ex_1 + x_1^2 + x_2^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e - x_1)^2 + x_2^2} + e^2 - 2ex_1 + x_1^2 + x_2^2,$$

neboli po zjednodušení

$$ex_1 - a^2 = -a\sqrt{(e - x_1)^2 + x_2^2}.$$

Rovnici ještě jednou umocníme a po úpravě dostaneme

$$(a^2 - e^2)x_1^2 + a^2x_2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Dosadíme (4.1) a obdržíme

$$b^2x_1^2 + a^2x_2 = a^2b^2 \quad \text{popř.} \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \quad (4.2)$$

Nyní je ještě nutné dokázat (což bychom snadno provedli), že opravdu každý bod, jehož souřadnice vyhovují rovnici (4.2), je bod elipsy k_e . Rovnice (4.2) se nazývá **středová rovnice** elipsy.

Možná **parametrická vyjádření** elipsy jsou

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi) = (a \cos \varphi, b \sin \varphi), \quad \text{kde } 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (4.3)$$

nebo

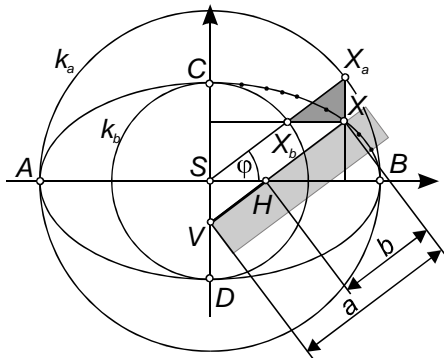
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \left(a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, b \frac{2t}{1 + t^2} \right), \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

V druhém případě je elipsa popsána parametricky pomocí *racionálních funkcí* a jde tedy o **racionální parametrizaci**.

Kdybychom v definici elipsy připustili i možnost $F_1 = F_2$ (tj. $e = 0$, a proto $a = b$), potom bychom z (4.2), dostali známou rovnici kružnice a z (4.3) a (4.4) známá parametrická vyjádření kružnice.

Trojúhelníková a proužková konstrukce elipsy. Parametrizaci (4.3) použijeme ke zdůvodnění tzv. **trojúhelníkové konstrukce** elipsy. Sestrojíme dvě pomocné kružnice $k_a(S, a)$ a $k_b(S, b)$ a zvolíme body $X_a \in k_a$, $X_b \in k_b$ oba příslušné k témuž parametru φ (tyto body tedy získáme jako průsečíky téže polopřímky vycházející ze středu elipsy S s oběma kružnicemi)

$$X_a = [a \cos \varphi, a \sin \varphi] \quad \text{a} \quad X_b = [b \cos \varphi, b \sin \varphi], \quad \text{kde } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$



Obr. 4.1.3

Bod $X = [x_1, x_2]$, který má stejnou první souřadnici jako bod X_a a stejnou druhou souřadnici jako bod X_b , tj. bod

$$X = [a \cos \varphi, b \sin \varphi], \quad \text{kde } 0 \leq \varphi < 2\pi$$

leží na elipse se středem S a poloosami a, b . Konstrukci dal název pravoúhlý trojúhelník $X_b X X_a$.

Z trojúhelníkové konstrukce odvodíme tzv. **proužkovou konstrukci** elipsy. Bodem X vedeme rovnoběžku s přímkou SX_a . Tato rovnoběžka protne hlavní, resp. vedlejší osu v bodě H , resp. V , přičemž platí $|VX| = a$, $|HX| = b$ (rovnoběžníky $VX X_a S$ a $SH X X_b$). Odtud již plyne princip zmíněné konstrukce: Na proužek papíru s přímým okrajem vyznačíme kolineární body V, H a X tak, aby platilo $|VX| = a$, $|HX| = b$ (tj. $|VH| = a - b = \text{konst.}$). Nyní pohybujeme proužkem papíru tak, aby bod V ležel stále na vedlejší ose a současně bod H na hlavní ose; potom je bod X bodem elipsy.

Oskulační kružnice elipsy. Při praktickém sestrojování elipsy ji nahrazujeme v okolí vrcholů tzv. **oskulačními kružnicemi**, tj. kružnicemi, které se ve vrcholech elipsy co nejvíce přibližují.

Každá kružnice, která se dotýká elipsy např. ve vrcholu B , ji přibližně v blízkém okolí tohoto vrcholu nahrazuje. Uvažujeme-li umístění elipsy v kartézské soustavě souřadnic tak, že její rovnice má tvar

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

potom rovnice takové dotýkové kružnice nabývá tvaru

$$(x_1 - s_B)^2 + x_2^2 = (a - s_B)^2,$$

kde bod $[s_B, 0]$ ($0 < s_B < a$) je jejím středem. Pro první souřadnice společných bodů kružnice a elipsy platí

$$(x_1 - a) \cdot [(b^2 - a^2)x_1 + ab^2 - a^3 + 2a^2s_B] = 0. \quad (4.5)$$

Společné body tedy leží jednak na přímce $x_1 - a = 0$ a dále na přímce $(b^2 - a^2)x_1 + ab^2 - a^3 + 2a^2s_B = 0$. Splynou-li i další průsečíky s vrcholem B , tj. jestliže i druhá přímka bude mít rovnici $x_1 - a = 0$, potom příslušná kružnice bude *nejlépe* nahrazovat elipsu v okolí vrcholu B .

Případ, že i rovnice druhé přímky nabude tvaru $x_1 - a = 0$, nastává právě když $s_B = \frac{e^2}{a}$. Kružnice se středem $S_B = [\frac{e^2}{a}, 0]$ a poloměrem $\varrho_B = a - \frac{e^2}{a} = \frac{b^2}{a}$ je tudíž hledanou oskulační kružnicí, střed S_B je tzv. **střed křivosti** a ϱ_B tzv. **poloměr křivosti** elipsy ve vrcholu B . Pro případ vrcholu A samozřejmě dostáváme též poloměr

$$\varrho_A = \varrho_B = \frac{b^2}{a}.$$

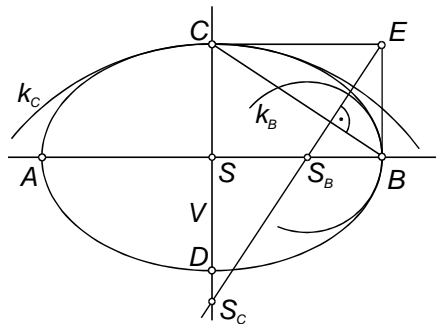
Obdobně najdeme poloměr křivosti i ve vedlejších vrcholech C, D ; a to

$$\varrho_C = \varrho_D = \frac{a^2}{b}.$$

S využitím výše uvedeného již snadno odvodíme *konstrukce oskulačních kružnic* k_A, k_B, k_C a k_D ve vrcholech elipsy: Nechť E je průsečík tečen elipsy ve vrcholech B a C . Kolmice z bodu E na přímku BC protne hlavní (resp. vedlejší) osu ve středu S_B (resp. S_C) oskulační kružnice ve vrcholu B (resp. C). Z podobnosti trojúhelníků $\triangle S_B B E \sim \triangle C S B$ totiž plyne

$$|S_B B| : |B E| = |S C| : |B S|, \quad \text{a proto} \quad r_B = |S_B B| = \frac{b^2}{a}.$$

Obdobně bychom zdůvodnili i konstrukci středu S_C . Oskulační kružnice k_A , resp. k_D je souměrně sdužená s oskulační kružnicí k_B , resp. k_C podle středu S .



Obr. 4.1.4

Při praktické konstrukci elipsy narýsujeme nejprve v okolí vrcholů elipsy oblouky oskulačních kružnic. Dále např. pomocí proužkové konstrukce najdeme několik dalších bodů elipsy a s využitím křivítka pak dokreslíme oblouky elipsy procházející sestrojenými body a dotýkající se oblouků oskulačních kružnic.

Poznamenejme ještě, že oskulační kružnice je samozřejmě možné sestrojít v každém bodě elipsy. Není-li však tento bod vrcholem, má oskulační kružnice s elipsou společný ještě další bod. Oproti tomu oskulační kružnice ve vrcholech mají s elipsou společný výhradně vrchol (čtyřnásobný průsečík!) — proto se jim také říká **hyperoskulační kružnice**.

Příklad 4.1.1. Z bodu $R = [3, -3]$ vedte tečny k elipse, jež je dána rovnicí $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

Řešení: Každá přímka procházející bodem $R = [3, -3]$ má parametrické vyjádření $x = 3 + tu_1$, $y = -3 + tu_2$. Tato přímka je tečnou elipsy, právě když má s elipsou společný jediný (a to dvojnásobný) reálný bod, tj. rovnice pro hledání společných bodů

$$4(3 + tu_1)^2 + 9(-3 + tu_2)^2 - 36 = t^2(4u_1^2 + 9u_2^2) + t(24u_1 - 54u_2) + 81 = 0$$

musí mít jediný (a to dvojnásobný) reálný kořen. To nastává, právě když je její diskriminant $\mathcal{D} = -144u_1(5u_1 + 18u_2)$ roven nule. Odtud již snadno získáme směrové vektory tečen $\vec{u} = (0, 1)$ a $\vec{u} = (18, -5)$. Obecné rovnice hledaných tečen jsou $x - 3 = 0$ a $5x + 18y + 39 = 0$. \diamond

4.2 Hyperbola

Hyperbola se definuje obdobně jako elipsa a rovněž její ohniskové vlastnosti se podobají ohniskovým vlastnostem elipsy.

DEFINICE 4.2.1.

Množinu všech bodů v rovině \mathbb{E}_2 , které mají od dvou různých pevně zvolených bodů F_1 , F_2 konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností $2a$, nazýváme **hyperbola**; tj.

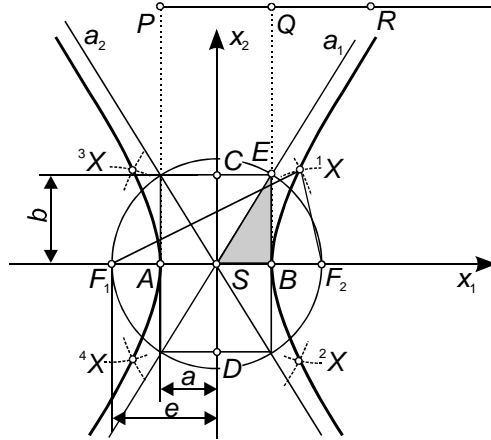
$$k_h = \{X \in \mathbb{E}_2 : ||XF_1| - |XF_2|| = 2a = konst., 0 < 2a < |F_1F_2|\}.$$

Analogicky jako u elipsy označujeme dané pevné body F_1 , F_2 **ohniska**, spojnicím XF_1 a XF_2 říkáme **průvodiče** a střed S úsečky F_1F_2 je tzv. **střed hyperboly**. Vzdálenost ohnisek od středu se nazývá **lineární výstřednost**

(**excentricita**) a označuje se e

$$|SF_1| = |SF_2| = e.$$

Protože neexistuje bod, pro který by současně platilo $|XF_1| - |XF_2| = 2a$ a $|XF_2| - |XF_1| = 2a$, je zřejmé, že hyperbola se skládá ze dvou částí, jimž říkáme **větvě hyperboly** a které nemají žádný společný bod.



Obr. 4.2.5

Bezprostředně z definice vyplývá tzv. **bodová konstrukce hyperboly**: Na prodloužení úsečky PQ o délce $2a$ volíme za bodem Q libovolný bod R ; označme $r_1 = |PR|$ a $r_2 = |QR|$ (tj. $r_1 - r_2 = 2a$). Sestrojíme dvě dvojice kružnic $k_1(F_1, r_1)$, $k_2(F_2, r_2)$ a $k'_1(F_1, r_2)$, $k'_2(F_2, r_1)$. Je zřejmé, že kružnice k_1 , k_2 (resp. k'_1 , k'_2) se protínají v bodech hyperboly ($k_1 \cap k_2 = \{^1X, ^2X\}$, $k'_1 \cap k'_2 = \{^3X, ^4X\}$). Různou volbou bodu R získáváme různé poloměry kružnic a tím i různé body hyperboly.

Na základě bodové konstrukce snadno nahlédneme, že hyperbola je *osově souměrná* podle přímky F_1F_2 i podle osy úsečky F_1F_2 a *středově souměrná* podle středu úsečky F_1F_2 .

Body A , B , ve kterých přímka F_1F_2 protíná hyperbolu, jsou tzv. (**hlavní vrcholy**). Přímku AB nazýváme **hlavní osa** a — nemůže-li dojít k záměně — označujeme tímž názvem i vzdálenost $|AB|$. Délku $|SA| = |SB| = a$ nazveme **hlavní poloosa**. Osa úsečky F_1F_2 je tzv. **vedlejší osa** — ta ovšem na rozdíl od elipsy hyperbolu neprotíná. **Vedlejší poloosou** rozumíme úsečku o velikosti b , pro níž platí

$$e^2 = a^2 + b^2, \quad (4.6)$$

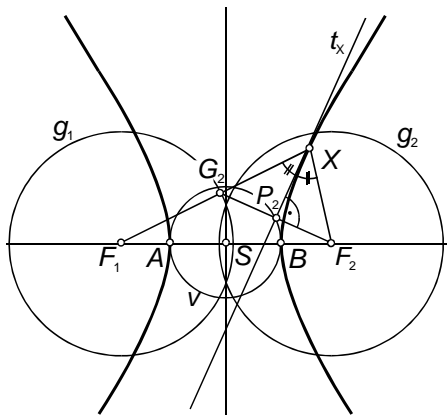
tj. k určení hyperboly stačí dva z prvků a , b , e ($e > a, b$). Pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a , b a přeponou e (např. $\triangle SBE$) se nazývá **charakteristický trojúhelník** hyperboly. V případě $a = b$ hovoříme o tzv. **rovnoosé hyperbole**.

Všechny body roviny \mathbb{E}_2 je možné charakterizovat na základě jejich polohy vzhledem k elipse:

- a) $||XF_1| - |XF_2|| > 2a \Leftrightarrow X$ je **vnitřní bod** hyperboly;
- b) $||XF_1| - |XF_2|| = 2a \Leftrightarrow X$ je bod hyperboly;
- c) $||XF_1| - |XF_2|| < 2a \Leftrightarrow X$ je **vnější bod** hyperboly.

Tečna hyperboly, ohniskové vlastnosti. Přímka, která má s hyperbolou právě jeden společný bod a jejíž všechny ostatní body jsou vnější, se nazývá **tečna hyperboly**; společný bod nazýváme **bod dotyku**. Nemá-li přímka s hyperbolou žádný společný bod, nazývá se **vnější přímkou** (tj. všechny body takové přímky jsou vnějšími body hyperboly; příkladem může být vedlejší osa hyperboly. Ostatní přímky nazýváme **sečny** (speciálními sečnami jsou tzv. **průměry** procházející středem hyperboly — např. hlavní osa). O některých speciálních případech tečen (*asymptoty*) a sečen (*sečny asymptotických směrů*), které do jisté míry (tj. v eukleidovské rovině bez nevlastních prvků) odporují předcházejícím definicím, je nutné se ještě zmínit.

Bud' t_X tečna hyperboly v jejím libovolném bodě X . Označme dále G_i bod souměrně sružený s ohniskem F_i ($i = 1, 2$) podle tečny t_x a $P_i = t_X \cap F_i G_i$ patu kolmice spuštěné z ohniska F_i na tečnu t_X . Potom platí:



Obr. 4.2.6

- Tečna hyperboly t_X v jejím libovolném bodě X pŕlí vnější úhel průvodičŕ F_1X a F_2X .³
- Bod G_2 (resp. G_1) souměrně sdružený s ohniskem F_2 (resp. F_1) podle tečny t_X leží na kružnici $g_1(F_1, 2a)$ (resp. $g_2(F_2, 2a)$), která se nazývá **řídící kružnice** hyperboly.
- Paty kolmic P_1 , resp. P_2 spuštěných z ohniska F_1 , resp. F_2 na tečnu t_X leží na kružnici $v(S, a)$ — tzv. **vrcholové kružnice** hyperboly, která je obrazem řídící kružnice g_1 , resp. g_2 ve stejnolehlosti se středem F_2 , resp. F_1 a koeficientem $\frac{1}{2}$.

Výše uvedené věty (tzv. **ohniskové** nebo **fokální věty**) lze analogicky jako u elipsy využít pro řadu konstrukcí týkajících se hyperboly.

Analytický popis hyperboly. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem ve středu hyperboly S a souřadnou osou x_1 v hlavní ose a souřadnou osou x_2 ve vedlejší ose — jsou-li souřadné osy osami souměrnosti hyperboly (tj. počátek je současně středem hyperboly), potom říkáme, že hyperbola je v tzv. **základní poloze**.

Pro libovolný bod hyperboly $X = [x_1, x_2]$ platí $\left| |XF_1| - |XF_2| \right| = 2a$, tj.

$$\left(\sqrt{(e + x_1)^2 + x_2^2} - \sqrt{(e - x_1)^2 + x_2^2} \right)^2 = 4a^2.$$

Po obdobných úvahách jako v případě elipsy obdržíme tzv. **středovou rovnici** hyperboly

$$b^2 x_1^2 - a^2 x_2^2 = a^2 b^2 \quad \text{popř.} \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \quad (4.7)$$

Možná **parametrická vyjádření** hyperboly jsou např.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi) = (\pm a \cosh \varphi, b \sinh \varphi), \quad \text{kde } \varphi \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

a kde na základě definic *hyperbolických funkcí* platí

$$\sinh \varphi = \frac{1}{2}(e^\varphi - e^{-\varphi}), \quad \cosh \varphi = \frac{1}{2}(e^\varphi + e^{-\varphi}), \quad \text{a proto}$$

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1;$$

³Ze čtyř úhlŕ, které tvoří průvodiče bodu X hyperboly, vždy jeden obsahuje střed hyperboly — tento úhel a úhel s ním vrcholový se nazývají **vnější úhly průvodičŕ**. Úhly vedlejší k vnitřním úhlŕm nazýváme **vnitřní úhly průvodičŕ**.

nebo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \left(a \frac{1+t^2}{1-t^2}, b \frac{2t}{1-t^2} \right), \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

V druhém případě jde o tzv. **racionální parametrizaci** hyperboly.

Asymptoty hyperboly. *Asymptotou rovinné křivky nazýváme takovou přímku, že vzdálenost d libovolného bodu P na křivce od této přímky konverguje k nule, jestliže alespoň jedna souřadnice bodu P roste nade všechny meze. U křivek $y = f(x)$ rozeznáváme tzv. *něsměrníkové (vertikální) asymptoty* rovnoběžné s osou y a *směrníkové asymptoty* o rovnici $y = kx + q$, pro něž platí*

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx].$$

Abychom mohli využít výše uvedené vztahy, upravíme (4.7) na explicitní tvar

$$x_2 = \frac{b}{a} x_1 \sqrt{1 - \frac{a^2}{x_1^2}}, \quad x_1 \geq a,$$

tj. nezkoumáme celou hyperbolu, ale jen její oblouk v prvním kvadrantu. Výpočtem limit určíme $x_2 = \frac{b}{a} x_1$. Postup zopakujeme i pro zbývající kvadranty — pro třetí kvadrant obdržíme stejný výsledek, ve druhém a čtvrtém kvadrantu vypočteme $x_2 = -\frac{b}{a} x_1$. **Asymptoty hyperboly** a_1, a_2 tedy procházejí jejím středem a mají rovnice

$$a_{1,2} : x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1, \quad \text{popř. } bx_1 \mp ax_2 = 0. \quad (4.10)$$

Asymptoty hyperboly svírají s hlavní osou úhel α , pro který platí $\text{tg } \alpha = \frac{b}{a}$ a úhly sevřené asymptotami jsou půleny osami hyperboly (tj. asymptoty hyperboly a_1, a_2 získáme jako úhlopříčky obdélníka, který má svůj střed ve středu hyperboly a jeho strany s délkami $2a$ a $2b$ jsou rovnoběžné s hlavní a vedlejší osou hyperboly). Navíc snadno nahlédneme, že asymptoty *rovnosé hyperboly* jsou na sebe kolmé.

Závěrem se vrátíme k diskuzi vzájemné polohy přímky a hyperboly. Ačkoliv nemají v eukleidovské rovině \mathbb{E}_2 asymptoty s hyperbolou žádný společný bod (body na obou větvích hyperboly se totiž k asymptotám stále více blíží, nikdy je však neprotnou), přesto se díky svým vlastnostem řadí k tečnám hyperboly (např. splňují ohniskové věty).

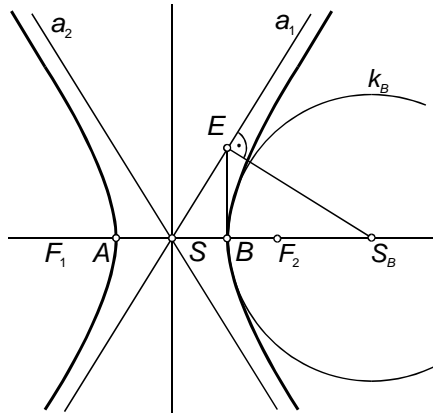
Rovněž přímky rovnoběžné s jednou z asymptot, ale neprocházející středem vykazují jisté zvláštnosti. Tyto přímky mají s hyperbolou jediný společný bod, přesto však nejde o tečny (leží na nich totiž jak body vnitřní, tak vnější). Přímkou takového typu nazýváme **sečna asymptotického směru**.

Oskulační kružnice hyperboly. Oskulační kružnice ve vrcholech hyperboly se definují obdobně jako u elipsy a mají poloměr (tzv. poloměr křivosti hyperboly ve vrcholech)

$$\varrho = \frac{b^2}{a}.$$

Uvedme opět konstrukci oskulačních kružnic k_A, k_B ve vrcholech hyperboly: Tečna ve vrcholu B protne asymptotu a_1 v bodě E , v němž vztyčíme kolmici k asymptotě a_1 . Průsečík kolmice s hlavní osou je středem S_B oskulační kružnice ve vrcholu B . Z podobnosti trojúhelníků $\triangle S_B B E \sim \triangle E B S$ totiž plyne

$$|S_B B| : |EB| = |EB| : |BS|, \quad \text{a proto} \quad r_B = |S_B B| = \frac{b^2}{a}.$$



Obr. 4.2.7

Oskulační kružnice k_A je souměrně sdružená s oskulační kružnicí k_B podle středu elipsy S .

4.3 Parabola

Definice paraboly se poněkud odlišuje od definice elipsy a hyperboly.

DEFINICE 4.3.1.

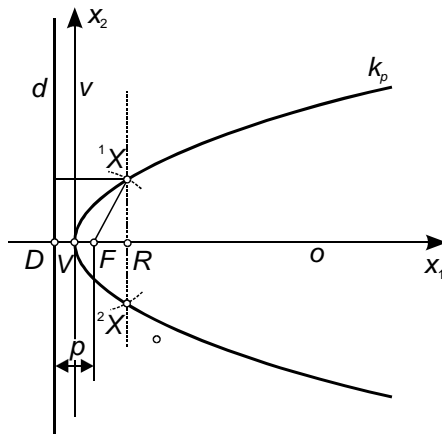
Množinu všech bodů v rovině \mathbb{E}_2 , které mají od pevného bodu F a pevné přímky d , jenž tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti, nazýváme **parabola**; tj.

$$k_p = \{X \in \mathbb{E}_2 : |XF| = |X, d|, F \notin d\}.$$

Pevný bod F se nazývá **ohnisko** a pevná přímka d **řídící (direkční) přímka**.⁴ Vzdálenost ohniska od řídící přímky se značí p a nazývá se **parametr**. Spojnice bodu s ohniskem a kolmice daným bodem k řídící přímce jsou **průvodiče**.

Z definice plyne tzv. **bodová konstrukce paraboly**: Z ohniska F spustíme kolmici o na řídící přímku d a její patu označíme D . Střed V úsečky DF je evidentně bodem paraboly ($|V, d| = |VD| = |VF|$). Další body paraboly získáme tak, že v libovolném bodě R polopřímky VF vedeme rovnoběžku s řídící přímkou a najdeme její společné body 1X , 2X s kružnicí o středu F a poloměru $|DR|$.

Na základě bodové konstrukce snadno nahlédneme, že parabola je *osově souměrná* podle přímky o ($F \in o$ a $o \perp d$).



Obr. 4.3.8

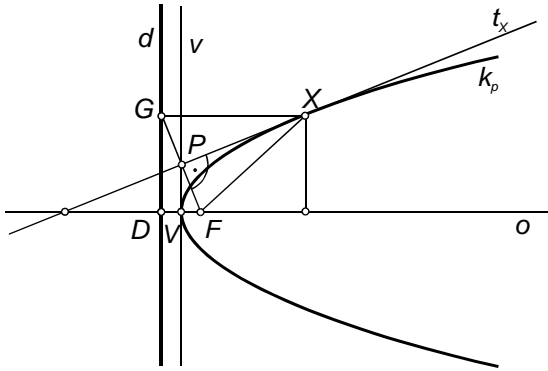
Osa souměrnosti o se nazývá **osa paraboly**, její průsečík V s parabolou je tzv. **vrchol paraboly**.

Všechny body roviny \mathbb{E}_2 je možné charakterizovat na základě jejich polohy vzhledem k parabole:

- $|XF| < |X, d| \Leftrightarrow X$ je **vnitřní bod** paraboly;
- $|XF| = |X, d| \Leftrightarrow X$ je bod paraboly;
- $|XF| > |X, d| \Leftrightarrow X$ je **vnější bod** paraboly.

⁴ d — zkr. *directrix*

Tečna paraboly, ohniskové vlastnosti. Přímka, která má s parabolou právě jeden společný bod a jejíž všechny ostatní body jsou vnější, se nazývá **tečna paraboly**; společný bod nazýváme **bod dotyku**. Nemá-li přímka s parabolou žádný společný bod, nazývá se **vnější přímka** (všechny její body jsou vnějšími body paraboly); příkladem je direkční přímka. Ostatní přímky nazýváme **sečny**. Speciálními případy sečen jsou přímky rovnoběžné s osou paraboly, které mají s parabolou jediný společný bod, přesto se však nejedná o tečny (leží na nich totiž jak vnitřní, tak vnější body paraboly) — tyto sečny nazýváme **průměry** paraboly.



Obr. 4.3.9

Bud' t_X tečna hyperboly v jejím libovolném bodě X . Označme dále G bod souměrně sdružený s ohniskem F podle tečny t_x a $P = t_X \cap FG$ patu kolmice spuštěné z ohniska F na tečnu t_X . Potom platí:

- Tečna hyperboly t_X v jejím libovolném bodě X půlí vnější úhel průvodičů.⁵
- Bod G souměrně sdružený s ohniskem F podle tečny t_X leží na *řídící přímce* paraboly d .
- Pata kolmice P spuštěné z ohniska F na tečnu t_X leží na **vrcholové tečně** paraboly v , která je obrazem řídící přímky d ve stejnoolehlosti se středem F a koeficientem $\frac{1}{2}$.

Výše uvedené věty (tzv. **ohniskové** nebo **fokální věty**) lze opět využít pro řadu konstrukcí týkajících se paraboly.

⁵Ze čtyř úhlů, které tvoří průvodiče bodu X hyperboly, vždy jeden obsahuje bod $D = o \cap d$ — tento úhel a úhel s ním vrcholový se nazývají **vnější úhly průvodičů**. Úhly vedlejší k vnitřním úhlům nazýváme **vnitřní úhly průvodičů**.

Analytický popis paraboly. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem ve vrcholu paraboly V a souřadnou osou x_1 v ose paraboly — je-li jedna ze souřadných os osou paraboly a počátek je současně jejím vrcholem, potom říkáme, že parabola je v tzv. **základní poloze**. Vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic je $F = [\frac{p}{2}, 0]$ a $d : x_1 + \frac{p}{2} = 0$.

Libovolný bod $X = [x_1, x_2]$ leží na parabole, právě když

$$|XF| = \sqrt{(x_1 - \frac{p}{2})^2 + x_2^2} = |X, d| = x_1 + \frac{p}{2}.$$

Po úpravě obdržíme tzv. **vrcholovou rovnici** paraboly

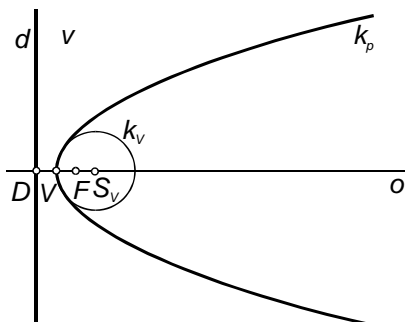
$$x_2^2 - 2px_1 = 0. \quad (4.11)$$

Parametrická vyjádření paraboly je např.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t \right), \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}; \quad (4.12)$$

jde o tzv. **polynomickou parametrizaci**.

Oskulační kružnice paraboly. Při rýsování paraboly ji nahrazujeme v okolí vrcholu *oskulační kružnicí*, jejíž střed leží na polopřímce VF a poloměr se rovná parametru paraboly p .

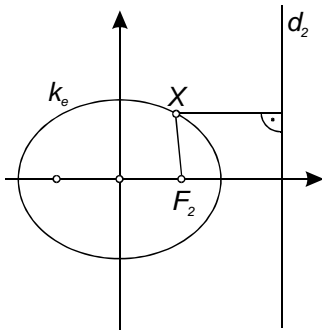


Obr. 4.3.10

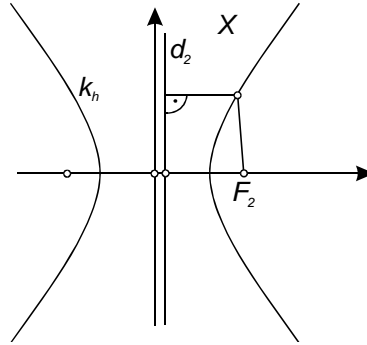
4.4 Společné vlastnosti elipsy, hyperboly a paraboly

Elipsu, hyperbolu a parabolu budeme označovat souhrnným názvem **regulární kuželosečky**. A ačkoliv je každá z těchto křivek zavedena speciální množinově-bodovou definicí, lze k nim uplatnit jednotný přístup.

4.4. Společné vlastnosti elipsy, hyperboly a paraboly



Obr. 4.4.11



Obr. 4.4.12

Nechť jsou elipsa k_e , resp. hyperbola k_h v základní poloze vzhledem k souřadnému systému, tj. jejich rovnice mají tvar (4.2), resp. (4.7). Pro libovolný bod $X = [x_1, x_2] \in k_e$ (resp. k_h) platí, že jeho vzdálenost od ohniska F_2 je

$$|XF_2| = \left| a - \frac{ex_1}{a} \right| = \frac{|a^2 - ex_1|}{a}.$$

Bud' d_2 přímka rovnoběžná s vedlejší osou ve vzdálenosti $\frac{a^2}{e}$; tzv. **direkční přímka** ohniska F_2 . Vzdálenost bodu X od direkční přímky d_2 je

$$|X, d_2| = \left| \frac{a^2}{e} - x_1 \right| = \frac{|a^2 - ex_1|}{e}.$$

Odtud plyne, že pro každý bod X elipsy, resp. hyperboly platí vztah

$$|XF_2| : |X, d_2| = e : a = \varepsilon = konst. > 0,$$

kde e je lineární excentricita a a je hlavní poloosa. Číslo ε se nazývá **číselná excentricita (výstřednost)** elipsy, resp. hyperboly, přičemž je zřejmé, že pro elipsu je $\varepsilon < 1$ (neboť $a > e$) a pro hyperbolu je $\varepsilon > 1$ (neboť $a < e$).

Vzhledem k definici paraboly je $|XF| = |X, d|$, a proto pro každý bod X paraboly dostáváme

$$|XF_2| : |X, d_2| = \varepsilon = 1.$$

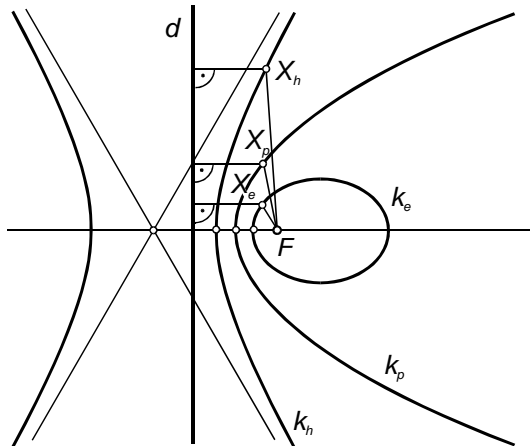
Věta 4.4.1.

Všechny body $X \in \mathbb{E}_2$, jejichž vzdálenosti od pevně zvoleného bodu F a od pevně zvolené přímky d ($F \notin d$) jsou v konstantním poměru

$$|XF| : |X, d| = \varepsilon > 0,$$

leží na regulární kuželosečce, jejímž ohniskem je bod F a jejíž směrnici přímkou příslušnou k ohnisku F je přímka d . Navíc platí:

- $\varepsilon < 1 \Leftrightarrow k$ je elipsa
- $\varepsilon = 1 \Leftrightarrow k$ je parabola
- $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow k$ je hyperbola.



Obr. 4.4.13

Poznamenejme ještě, že kdybychom uvažovali *kružnici* jako speciální případ elipsy ($a = b$, $e = 0$), potom by pro ni zřejmě platilo $\varepsilon = 0$.

4.5 Řezy na kuželové ploše

Název **kuželosečka** napovídá, že tyto křivky je možné získat jako rovinné řezy kuželové plochy. Snadno dokážeme, že všechny řezy na kuželové ploše jsou *algebraickými křivkami 2. stupně*, tj. je možné je popsat kvadratickou rovnicí $f(x_1, x_2) = 0$.

Definujme nejprve pojem *rotační kuželové plochy*:

DEFINICE 4.5.1.

Nechť je v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_3 dán pevný bod V , pevná přímka o procházející bodem V a úhel $\alpha = \angle(o, a)$, kde $a \neq o$, $a \not\perp o$ je libovolná přímka procházející bodem V . **Rotační kuželovou plochou** $\mathcal{K}(V, o, \alpha)$ rozumíme množinu všech přímek (tzv. **povrchových přímek**, resp. **površek**), které svírají s přímkou o (tzv. **osou** kuželové plochy) úhel o velikosti α . Bod V se nazývá **vrchol** kuželové plochy.

Je zřejmé, že pomocí transformace soustavy souřadnic, je možné každou rovinu ztotožnit se souřadnou rovinou x_1x_2 ($x_3 = 0$), tj. bez újmy na obecnosti je možné předpokládat řez obecné rotační kuželové plochy souřadnou rovinou $\sigma = x_1x_2$.

Uvažujme kuželovou plochu $\mathcal{K}(V, o, \alpha)$. Nechť směr osy o je dán jednotkovým směrovým vektorem \vec{e} . Bod X leží na kuželové ploše \mathcal{K} , právě když vektory $X - V$ a \vec{e} mají odchylku buďto α , anebo $\pi - \alpha$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. S využitím skalárního součinu můžeme tuto podmínku vyjádřit ve tvaru

$$(X - V) \cdot \vec{e} = \pm |X - V| \cos \alpha, \quad (4.13)$$

tj po úpravě z (4.13) dostáváme

$$\begin{aligned} & [(x_1 - v_1)e_1 + (x_2 - v_2)e_2 + (x_3 - v_3)e_3]^2 - \\ & - [(x_1 - v_1)^2 + (x_2 - v_2)^2 + (x_3 - v_3)^2] \cdot \cos^2 \alpha = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Rovnici pro řez rovinou x_1x_2 obdržíme z (4.14), dosadíme-li $x_3 = 0$. Výsledná rovnice je kvadratickou rovnicí v x_1, x_2 a všimneme-li si pouze kvadratických členů, potom má tvar

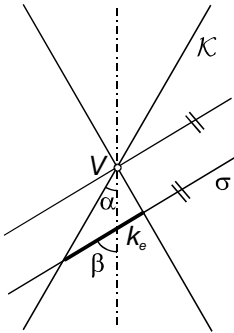
$$(e_1^2 - \cos^2 \alpha)x_1^2 + (e_2^2 - \cos^2 \alpha)x_2^2 + 2e_1e_2x_1x_2 + \dots = 0 \quad (4.15)$$

přičemž platí, že alespoň jeden z koeficientů u kvadratických členů je nenulový, jak lze snadno ukázat.

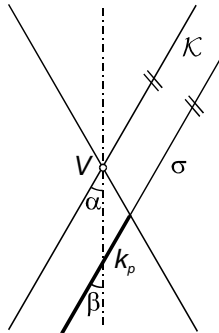
Dále rozlišujeme tyto dva případy — rovina σ je vrcholová ($V \in \sigma$, tj. $v_3 = 0$), resp. rovina σ není vrcholová ($V \notin \sigma$, tj. $v_3 \neq 0$). V prvním případě dostaneme řezem kuželosečku, která se nazývá **singulární**, v druhém pak kuželosečku, která se nazývá **regulární**. Označíme-li $\beta = \angle(o, \sigma)$, potom v závislosti na velikostech úhlů α a β nastávají tyto případy:

- a) Není-li rovina σ vrcholová (tj. $V \notin \sigma$), potom pro průsečnou křivku k platí

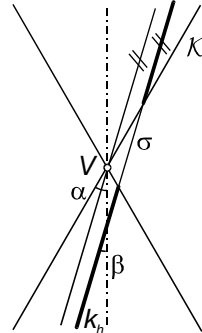
- $\beta > \alpha \Leftrightarrow k$ je *elipsa* (příčemž pro $\beta = \frac{\pi}{2}$ je k *kružnice*)
- $\beta = \alpha \Leftrightarrow k$ je *parabola*
- $\beta < \alpha \Leftrightarrow k$ je *hyperbola*.



Obr. 4.5.14



Obr. 4.5.15



Obr. 4.5.16

b) Je-li rovina σ vrcholová (tj. $V \in \sigma$), potom pro průsečnou křivku k platí

- $\beta > \alpha \Leftrightarrow k$ je *bod* (tj. vrchol kuželové plochy)
- $\beta = \alpha \Leftrightarrow k$ je *dvojice splývající přímek* (tj. dvě splývající površky)
- $\beta < \alpha \Leftrightarrow k$ je *dvojice různoběžných přímek* (tj. dvě různé površky).

Bývá vhodné provést ještě následující doplňující úvahu. Je-li vrchol kuželové plochy $\mathcal{K}(V, o, \alpha)$ tzv. **nevlastním bodem** (bodem v nekonečnu) osy o (tj. současně $\alpha = 0$), potom se plocha \mathcal{K} stává **rotační válcovou plochou**. Stejně jako u kuželové plochy je pro případ $\beta > \alpha (= 0)$ řezem *elipsa* (navíc je-li $\beta = \frac{\pi}{2}$, potom je opět řezem *kružnice*) a pro případ $\beta = \alpha (= 0)$ je řezem buďto *dvojice splývajících přímek* nebo *dvojice různých rovnoběžek*. Mezi kuželosečkami tak řadíme i *dvojici různých rovnoběžných přímek*.

Ještě konkrétněji hovoří v případě regulárních kuželoseček tzv. **Quételetova-Dandelinova věta**:

Věta 4.5.1.

Řezem na rotační kuželové ploše rovinou, která není vrcholová je **kuželosečka**, jejímiž ohnisky jsou dotykové body kulových ploch, které lze vepsat do kuželové plochy tak, že se dotýkají roviny řezu. Jestliže rovina protíná všechny povrchové přímky kuželové plochy, je řezem **elipsa** (je-li rovina navíc kolmá k ose plochy, potom je řezem kružnice jakožto speciální případ elipsy - dotykové body vepsaných kulových ploch potom splývají); je-li rovina řezu rovnoběžná právě s jednou površkou plochy, je řezem **parabola** (do kuželové plochy lze vepsat jedinou kulovou plochu splňující dané podmínky); je-li rovina řezu rovnoběžná se dvěma površkami plochy, je řezem **hyperbola** a ony povrchové přímky udávají směry asymptot.

4.6 Kuželosečky — kvadratické křivky v \mathbb{E}_2

V minulé kapitole jsme ukázali, že každý řez rotační kuželové plochy je kvadratickou křivkou. Při pevně zvolené kartézské soustavě souřadnic vyhovují tedy souřadnice $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ každého bodu X kuželosečky k tzv. **obecné rovnici kuželosečky**

$$k : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{00} = 0, \quad (4.16)$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ a $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$.

Je patrné, že elipsa o rovnici $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, hyperbola o rovnici $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ a parabola o rovnici $x_2^2 = 2px_1$ jakožto konkrétní příklady kvadratických křivek patří samozřejmě mezi kuželosečky.

Příklad 4.6.1. Všimněme si důsledků, které na rovnici elipsy v základní poloze budou mít některé transformace kartézské soustavy souřadnic.

Translace daná vektorem $\vec{t} = (m, n)$ má rovnice

$$\begin{aligned} x &= x' + m \\ y &= y' + n \end{aligned}$$

Přejdeme pomocí posunutí od \mathcal{KSS} k nové \mathcal{KSS}' a můžeme psát:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{(x' + m)^2}{a^2} + \frac{(y' + n)^2}{b^2} = 1.$$

Po úpravě (se současným přeznačením na „nečárkované“ souřadnice) dostáváme rovnici

$$b^2x^2 + a^2y^2 + 2b^2mx + 2a^2ny + b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2 = 0,$$

kteřá je opět speciálním typem kvadratické rovnice (4.16). Oproti výchozí rovnici se však pro $(m, n) \neq (0, 0)$ nově objevil(y) lineární člen(y)!

Rotace kolem počátku o orientovaný úhel φ má rovnice

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi\end{aligned}$$

Přejdeme pomocí otočení od \mathcal{KSS} k nové \mathcal{KSS}' a můžeme psát:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2}{a^2} + \frac{(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2}{b^2} = 1.$$

Po úpravě (se současným přeznačením na „nečárkované“ souřadnice) dostáváme rovnici

$$\begin{aligned}(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)x^2 + 2(a^2 - b^2) \cos \varphi \sin \varphi xy + \\+ (b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi)y^2 - a^2 b^2 = 0,\end{aligned}$$

kteřá je opět speciálním typem kvadratické rovnice (4.16). Oproti výchozí rovnici se však pro $\varphi \neq k\frac{\pi}{2}$ (a pro elipsu, kteřá není kružnicí) nově objevil smíšený kvadratický člen! \diamond

Obdobně jako v předchozím příkladu bychom mohli analyzovat dopad otočení a translace \mathcal{KSS} i na rovnice hyperboly, resp. paraboly v základní poloze. Uvedený příklad je tak motivací pro to, jak pomocí *vhodné* transformace soustavy kartézských souřadnic převést *obecnou rovnici kuželosečky* (4.16) na takovou rovnici, z níž již bez problémů vyčteme jak druh kuželosečky, tak všechny její metrické charakteristiky.

Vraťme se k rovnici (4.16). Tu je možné zapsat maticově ve tvaru

$$k : \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{x} + a = 0, \quad (4.17)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}, \quad a = a_{00};$$

resp. ve tvaru

$$k : (1, x_1, x_2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.18)$$

Matici \mathbf{C} nazýváme **maticí kuželosečky** a její determinant $D = \det(\mathbf{C})$ **diskriminant kuželosečky**. Platí:

- je-li $D \neq 0$, potom je k regulární kuželosečka;
- je-li $D = 0$, potom je k singulární kuželosečka.

Označíme dále Δ determinant $\det(\mathbf{A})$, kde \mathbf{A} je matice z rovnice (4.17). Dá se dokázat, že jak diskriminat kuželosečky D , tak jeho subdeterminant Δ jsou tzv. **ortogonálními invarianty**, jejichž hodnota se nemění při jakékoliv transformaci kartézských souřadnic.

Jak již bylo řečeno, naším úkolem je pomocí transformace soustavy kartézských souřadnic převést rovnici kuželosečky (4.16), (4.17) na takovou rovnici, z níž lze snadno určit typ kuželosečky. Tuto transformaci získáme složením vhodného otočení kolem počátku O a vhodné translace.

Pomocí otočení

$$\mathcal{R} : \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{y} \quad (\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, \det(\mathbf{R}) = 1)$$

kolem počátku O přejde (4.17) na tvar

$$k : \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{y} + a = 0, \quad \text{kde } \mathbf{B} = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}, \mathbf{b} = \mathbf{R}^T \mathbf{a}, \quad (4.19)$$

přičemž \mathbf{R} volíme tak, aby matice \mathbf{B} byla diagonální, tj.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Při volbě matice \mathbf{R} využijeme následující větu:

Věta 4.6.1.

Ke každé symetrické matici \mathbf{A} existuje ortonormální matice \mathbf{R} taková, že $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{B}$ je diagonální matice — prvky b_{ii} na diagonále matice \mathbf{B} jsou všechna vlastní čísla λ_i matice \mathbf{A} (počítána i s jejich násobností) a sloupcové vektory matice \mathbf{R} jsou jednotkové vzájemně ortogonální vlastní vektory matice \mathbf{A} příslušné k vlastním číslům λ_i .

Jako **vlastní čísla** (nebo také **charakteristická čísla**) matice \mathbf{A} označujeme kořeny polynomu

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0.$$

Vlastním vektorem \mathbf{v}_i matice \mathbf{A} příslušným k *vlastnímu číslu* λ_i rozumíme každý vektor, který je řešením homogenní soustavy rovnic

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{o}.$$

V souladu s výše uvedenou větou volíme jednotkové vlastní vektory

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}.$$

Zdůrazněme ještě, že vlastní čísla reálných symetrických matic (což matice \mathbf{A} je) jsou *vždy* reálná. Je-li $\text{hod}(\mathbf{A}) = 2$, potom jsou obě vlastní čísla různá od nuly $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; je-li $\text{hod}(\mathbf{A}) = 1$, potom je právě jedno z vlastních čísel nulové (např. λ_2) a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pomocí otočení $\mathcal{R} : \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{y}$ jsme eliminovali smíšený kvadratický člen ($b_{12} = 0$), tj. souřadné osy y_i jsou rovnoběžné s osami kuželosečky. V dalším kroku použijeme translaci

$$\mathcal{T} : \mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{t},$$

čímž z rovnice (4.19) dostaneme

$$k : \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} + 2\mathbf{c}^T \mathbf{z} + c = 0, \quad \text{kde } \mathbf{c} = \mathbf{B}\mathbf{t} + \mathbf{b}, \quad c = \mathbf{t}^T \mathbf{B} \mathbf{t} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{t} + a. \quad (4.20)$$

Vektor \mathbf{t} volíme tak, aby se rovnice (4.20) co nejvíce zjednodušila.

- Jestliže $\text{hod}(\mathbf{B}) = \text{hod}(\mathbf{B}, \mathbf{b})$ ($= 2$ nebo 1), potom podle Frobeniovy věty existuje řešení soustavy $\mathbf{B}\mathbf{t} + \mathbf{b} = \mathbf{o}$ a pomocí translace \mathcal{T} je tudíž možné z rovnice (4.20) eliminovat lineární člen.

- Je-li $\text{hod}(\mathbf{B}) = \text{hod}(\mathbf{B}, \mathbf{b}) = 2$, potom

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\frac{b_1}{\lambda_1} & -\frac{b_2}{\lambda_2} \end{pmatrix}^T, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0. \quad (4.21)$$

- Je-li $\text{hod}(\mathbf{B}) = \text{hod}(\mathbf{B}, \mathbf{b}) = 1$ (v případě $\lambda_2 = b_2 = 0$), potom

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\frac{b_1}{\lambda_1} & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \lambda_1 \neq 0. \quad (4.22)$$

- Jestliže $\text{hod}(\mathbf{B}) = 1 \neq \text{hod}(\mathbf{B}, \mathbf{b}) = 2$ (v případě $\lambda_2 = 0, b_2 \neq 0$), potom se lineární člen eliminovat nepodaří. Translace (4.22) převede v tomto případě rovnici (4.20) na tvar

$$k : \lambda_1 z_1^2 + 2b_2 z_2 + c = 0, \quad c = a - \frac{b_1^2}{\lambda_1}. \quad (4.23)$$

V případě $c \neq 0$ je tudíž nutné použít ještě jednu translaci kartézské souřadné soustavy

$$\mathcal{T}' : \mathbf{z} = \mathbf{z}' + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c}{2b_2} \end{pmatrix}^T,$$

kteřá převede rovnici (4.23) na jednodušší tvar bez absolutního členu

$$k : \lambda_1 z_1'^2 + 2b_2 z_2' = 0.$$

Věta 4.6.2. Rovnici každé kuželosečky lze převést na jednu z uvedených **kanonických rovnic** ($\lambda_1, \lambda_2, c, b_2 \neq 0$):

- (Ia) $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + c = 0$;
 (Ib) $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 0$;
 (II) $\lambda_1 z_1^2 + 2b_2 z_2 = 0$;
 (IIIa) $\lambda_1 z_1^2 + c = 0$;
 (IIIb) $\lambda_1 z_1^2 = 0$.

Následující tabulka udává přehled všech druhů kuželoseček v \mathbb{E}_2 :

Typ	λ_1	λ_2	b_2	c	Druh	Rovnice
Ia	> 0	> 0	0	< 0	Elipsa	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$
	> 0	< 0	0	< 0	Hyperbola	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$
	> 0	> 0	0	> 0	Imaginární elipsa	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = -1$
Ib	> 0	> 0	0	0	Imaginární různoběžky	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
	> 0	< 0	0	0	Různoběžky	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
II	> 0	0	$\neq 0$	0	Parabola	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - x_2 = 0$
IIIa	> 0	0	0	< 0	Dvojice různých rovnoběžek	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$
	> 0	0	0	> 0	Dvojice imaginárních rovnoběžek	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = -1$
IIIb	> 0	0	0	0	Dvojice splývajících přímk	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$

Příklad 4.6.2. Určete kanonickou rovnici a typ kuželosečky, jež je dána rovnicí

$$k: x^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 2 = 0. \quad (4.24)$$

Řešení: Kuželosečku k je možné zapsat maticově ve tvaru

$$k: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}^T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{2}_{a_{00}} = 0,$$

resp.

$$k : (1, x_1, x_2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Protože $\det(\mathbf{C}) = -4 \neq 0$, jde o regulární kuželosečku.

(i) Eliminace smíšeného kvadratického členu

Z charakteristického polynomu a charakteristické rovnice vypočteme vlastní čísla matice \mathbf{A} :

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

tj. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

Zjistíme vlastní vektory \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 matice \mathbf{A} příslušné k vlastním číslům λ_1 , λ_2 , jakožto netriviální řešení homogenních soustav

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E}) \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{o}, \quad \text{tj.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_i & 2 \\ 2 & 1 - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^i \\ v_2^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

pro $\lambda_1 = 3$ volíme např. vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ a pro $\lambda_2 = -1$ např. vlastní vektor $\mathbf{v}_2 = (-1, 1)$.

Dále určíme *jednotkové* vlastní vektory příslušné vlastním číslům λ_i

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}, \quad \text{tj.}$$

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

jež budou tvořit sloupcové vektory matice \mathbf{R} , tedy

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Nyní již můžeme přistoupit ke vhodné transformaci kartézské soustavy souřadnic, jež eliminuje smíšený kvadratický člen — konkrétně jde o *otočení* \mathcal{KSS} kolem počátku dané maticovým vyjádřením

$$\mathcal{R} : \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{y}, \quad \text{tj.}$$

$$\mathcal{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

resp. po rozeepsání

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_2, \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Doplňme jen, že vzhledem k tomu, že matice otočení \mathcal{KSS} kolem počátku má obecný tvar

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

je vidět, že $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a tedy úhel otočení je $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Transformace (5.24) převede původní rovnici kuželosečky na tvar

$$k : \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{y} + a_{00} = 0, \quad \text{kde } \mathbf{B} = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{R}^T \mathbf{a},$$

tj.

$$k : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}^T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 2 = 0,$$

resp. po roznásobení

$$k : 3y_1^2 - y_2^2 + 2\sqrt{2}y_1 + 2 = 0. \quad (4.26)$$

(ii) *Eliminace lineárního členu/lineárních členů*

Rovnici $3y_1^2 - y_2^2 + 2\sqrt{2}y_1 + 2 = 0$ lze dále upravit na tvar

$$3 \left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 - y_2^2 + \frac{4}{3} = 0.$$

Posunutí \mathcal{T} kartézské soustavy souřadnic dané rovnicemi

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \\ z_2 &= y_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

potom převede rovnici (5.25) na *kanonický tvar*

$$3z_1^2 - z_2^2 + \frac{4}{3} = 0, \quad (4.28)$$

popř. po jednoduché úpravě

$$-\frac{z_1^2}{4} + \frac{z_2^2}{4} = 1. \quad (4.29)$$

Jde tedy o *hyperbolu*, jejíž metrické charakteristiky jsou $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ a $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{4}{3}$.

Zdůrazněme ještě, že všechny rovnice (5.23), (5.25) a (5.27, 5.28) popisují tutéž kuželosečku — ovšem vzhledem k různým souřadným systémům $\mathcal{KSS}(x_1, x_2)$, $\mathcal{KSS}'(y_1, y_2)$ a $\mathcal{KSS}''(z_1, z_2)$.

Výše uvedené transformační rovnice (5.24) a (5.26) lze samozřejmě využít i pro určení dalších charakteristik hyperboly — např. k určení souřadnic středu, vrcholů a ohnisek (ale např. i k určení rovnic os a asymptot). Střed hyperboly S má v $\mathcal{KSS}''(z_1, z_2)$ souřadnice $S = [0, 0]$; pomocí rovnic (5.26) snadno zjistíme, že vzhledem ke $\mathcal{KSS}'(y_1, y_2)$ má souřadnice $S = \left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right]$; konečně ze vztahů (5.24) plyne, že střed hyperboly má v $\mathcal{KSS}(x_1, x_2)$ souřadnice $S = \left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right]$. Obdobně bychom postupovali i při určování souřadnic ostatních zmíněných bodů. \diamond

Příklad 4.6.3. Vyšetřete kuželosečku danou rovnicí

$$k: 4x^2 - 24xy + 11y^2 - 32x + 46y + 39 = 0.$$

Řešení: Kuželosečku k zapíšeme maticově ve tvaru

$$k: \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \cdot (-16, 23) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 39 = 0,$$

resp.

$$k: \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 39 & -16 & 23 \\ -16 & 4 & -12 \\ 23 & -12 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Protože je diskriminant kuželosečky roven 0, jde o kuželosečku singulární (vzniká řezem kuželové plochy vrcholovou rovinou).

(i) *Eliminace smíšeného kvadratického členu*

Z charakteristického polynomu a charakteristické rovnice vypočteme vlastní čísla matice \mathbf{A} :

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -12 \\ -12 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0,$$

tj. $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = -5$.

Jednotkové vlastní vektory \mathbf{e}_i příslušné vlastním číslům λ_i jsou

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right), \quad \mathbf{e}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right),$$

tj. otočení \mathcal{KSS} kolem počátku je dáno maticovým vyjádřením

$$\mathcal{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

resp. po rozepsání

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y', \\ y &= -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'; \end{aligned}$$

úhel otočení je tedy $\varphi \approx -53^\circ 7' 48''$.

V nové soustavě souřadnic \mathcal{KSS}' má potom kuželosečka vyjádření

$$k : \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 \cdot (-28, 1) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 39 = 0,$$

resp. po roznásobení

$$k : 20x'^2 - 5y'^2 - 56x' + 2y' + 39 = 0.$$

(ii) Eliminace lineárního členu/lineárních členů

Rovnici $20x'^2 - 5y'^2 - 56x' + 2y' + 39 = 0$ upravíme na tvar

$$20 \left(x' - \frac{7}{5} \right)^2 - 5 \left(y' - \frac{1}{5} \right)^2 = 0.$$

Nyní použijeme posunutí kartézské soustavy souřadnic \mathcal{T} dané rovnicemi

$$\begin{aligned} x'' &= x' - \frac{7}{5} \\ y'' &= y' - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

a dostáváme vyjádření kuželosečky ve tvaru

$$\begin{aligned} 20x''^2 - 5y''^2 &= 0, \quad \text{resp.} \\ 4x''^2 - y''^2 &= 0. \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že jde o dvojici různoběžných přímk s rovnicemi $p_1 : 2x'' + y'' = 0$ a $p_2 : 2x'' - y'' = 0$.

Nás samozřejmě zajímají rovnice přímk p_1 , p_2 vztahené k původní „nečárkované“ soustavě souřadnic, a proto musíme přejít zpět nejprve od \mathcal{KSS}'' ke \mathcal{KSS}' a poté od \mathcal{KSS}' ke \mathcal{KSS} .

S využitím transformačních rovnic $x'' = x' - \frac{7}{5}$, $y'' = y' - \frac{1}{5}$ můžeme psát

$$\begin{aligned} p_1: \quad 2x'' + y'' &= 2(x' - \frac{7}{5}) + (y' - \frac{1}{5}) = 2x' + y' - 3 = 0 \\ p_2: \quad 2x'' - y'' &= 2(x' - \frac{7}{5}) - (y' - \frac{1}{5}) = 2x' - y' - \frac{13}{5} = 0, \end{aligned}$$

tj.

$$p_1: \quad 2x' + y' - 3 = 0 \quad p_2: \quad 10x' - 5y' - 13 = 0.$$

Matice otočení \mathbf{R} je *ortonormální*, tj. platí

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{E};$$

matice transponovaná k matici \mathbf{R} je tedy současně i maticí inverzní, a proto platí

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y', & x' &= \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y, \\ y &= -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' & \implies y' &= \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y. \end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} p_1: \quad 2x' + y' - 3 &= 2(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y) + (\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y) - 3 = 2x - y - 3 = 0, \\ p_2: \quad 10x' - 5y' - 13 &= 10(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y) - 5(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y) - 13 = 2x - 11y - 13 = 0. \end{aligned}$$

Rovnice tvořících přímk singulární kuželosečky k tedy jsou

$$p_1: \quad 2x - y - 3 = 0 \quad \text{a} \quad p_2: \quad 2x - 11y - 13 = 0.$$

Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\begin{aligned} k &= p_1 \cup p_2: (2x - y - 3)(2x - 11y - 13) = \\ &= 4x^2 - 24xy + 11y^2 - 32x + 46y + 39 = 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

Kapitola 5

Kvadriky

5.1 Rotační plochy

Rotační plochou rozumíme takovou plochu, jež vznikne rotací **tvořící křivky** k (ne nutně rovinné!) kolem **osy rotace** o . Každý bod tvořící křivky buďto leží na ose rotace, anebo při rotaci opíše v rovině kolmé na osu rotace **rovnoběžkovou kružnici** se středem na ose rotace. Řez rotační plochy rovinou, která prochází osou rotační plochy, se nazývá **meridián** rotační plochy.

Každý meridián lze samozřejmě chápat rovněž jako tvořící křivku. Necht' je tedy jakožto tvořící křivka rotační plochy vznikající rotací kolem osy z uvažován meridián ležící v souřadné rovině yz s vyjádřením $f(y, z) = x = 0$. Potom má libovolný bod Y tvořící křivky souřadnice $[0, \bar{y}, \bar{z}]$, přičemž platí $f(\bar{y}, \bar{z}) = 0$. Každý bod $X = [x, y, z]$ rotační plochy ležící na stejné rovnoběžkové kružnici jako bod Y má od osy rotace (v tomto případě od osy z) stejnou vzdálenost r — jde o *poloměr rotace*, který je dán vztahem $r^2 = x^2 + y^2$ neboli pro body X a Y

$$r^2 = x^2 + y^2 = 0^2 + \bar{y}^2.$$

Získáváme tak transformační rovnice

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bar{z} &= z \end{aligned} \tag{5.1}$$

a implicitní rovnice rotační plochy vznikající rotací kolem osy z nabývá tedy tvaru

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \tag{5.2}$$

Příklad 5.1.1. Určete rovnici *anuloidu*, který vzniká rotací kružnice k s rovnicí $(y - R)^2 + z^2 = r^2$, jež leží v rovině yz , kolem osy z .

Řešení: Kružnice k je meridiánem vznikající rotační plochy — anuloidu, a proto můžeme použít transformační vztahy (5.1). Každý bod Y meridiánu k má souřadnice $[0, \bar{y}, \bar{z}]$, kde $(\bar{y} - R)^2 + \bar{z}^2 = r^2$. Dosadíme z (5.1) do této rovnice, tj. $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$ a po úpravě dostáváme hledanou rovnici anuloidu

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0. \quad \diamond$$

5.2 Rotační kvadriky

Rotační kvadrika je rotační plocha, jejíž tvořící křivkou je kuželosečka a osou rotace je osa této kuželosečky.

Rotační válcová a kuželová plocha. Rotací singulárních kuželoseček vznikne buďto **rotační válcová plocha** — nechali bychom kolem osy z rotovat přímku ležící v rovině yz o rovnici $y = b$ a s využitím transformačních vztahů (5.1) bychom dospěli k rovnici

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (5.3)$$

anebo **rotační kuželová plocha** — nechali bychom kolem osy z rotovat přímku ležící v rovině yz o rovnici $z = \frac{c}{b}y$ a s využitím transformačních vztahů (5.1) dospějeme k rovnici

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (5.4)$$

Protáhlý a zploštělý rotační elipsoid. Rotací elipsy kolem její osy vzniká **rotační elipsoid** — v případě rotace kolem hlavní osy vzniká tzv. **protáhlý elipsoid**, v případě rotace kolem vedlejší osy vzniká tzv. **zploštělý elipsoid**.

Elipsoid v *základní poloze* vznikne rotací elipsy ležící v rovině yz se středem v počátku a osami v souřadných osách kolem osy z . Tvořící elipsa, která je současně *meridiánem rotační plochy*, je popsána rovnicí

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Aplikujeme postup uvedený v kapitole (5.1) a pro rotační elipsoid můžeme psát

$$f(\bar{y}, \bar{z}) = \frac{\bar{y}^2}{b^2} + \frac{\bar{z}^2}{c^2} - 1 = 0$$

a po dosazení transformačních vztahů (5.1) obdržíme hledanou implicitní rovnici

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (5.5)$$

Pro $b > c$ (osa z je vedlejší osou) dostaneme *zploštělý* rotační elipsoid a pro $b < c$ (osa z je hlavní osou) dostaneme *protáhlý* rotační elipsoid. V případě $b = c$ bychom dostali kulovou plochu.

Jednodílný a dvojdílný rotační hyperboloid. Rotací hyperboly kolem její osy vzniká **rotační hyperboloid** — v případě rotace kolem hlavní osy vzniká tzv. **dvojdílný hyperboloid**, v případě rotace kolem vedlejší osy vzniká tzv. **jednodílný hyperboloid**.

Jednodílný hyperboloid v *základní poloze* vznikne rotací hyperboly ležící v rovině yz se středem v počátku a osami v souřadných osách kolem osy z . Tvořící hyperbola, která je současně *meridiánem* rotační plochy, je popsána rovnicí

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Aplikací postupu z kapitoly (5.1) obdržíme hledanou rovnici jednodílného hyperboloidu

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (5.6)$$

Příklad 5.2.1. Je zajímavé, že ke stejnému výsledku (tj. k jednodílnému hyperboloidu) bychom dospěli, kdybychom nechali kolem osy z rotovat přímku o rovnici $z = \frac{c}{b}y$ (resp. $z = -\frac{c}{b}y$) ležící v rovině $x = b$.

Je však nutné upravit transformační vztahy (5.1), které lze použít jen v tom případě, kdy tvořící křivka je současně meridiánem rotační plochy. To však není tento případ, neboť tvořící přímka a osa rotace jsou mimoběžky. Snadno nahlédneme, že v případě obecné tvořící křivky je nutné pracovat s transformačními vztahy

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 + \bar{y}^2 &= x^2 + y^2 \\ \bar{z} &= z. \end{aligned}$$

Každý bod Y tvořící přímky má souřadnice $[b, \bar{y}, \bar{z}]$, kde $\bar{z} = \frac{c}{b}\bar{y}$. Umocníme a dosadíme výše uvedené transformační vztahy, tj. $z^2 = \frac{c^2}{b^2}(x^2 + y^2 - b^2)$. Po úpravě dostáváme rovnici jednodílného rotačního hyperboloidu (5.6). \diamond

Obdobně pro případ *dvojdílného hyperboloidu* bychom použili výše uvedený algoritmus pouze s tím rozdílem, že tvořící hyperbola (meridián) je popsána rovnicí

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Implicitní rovnice dvojdielného hyperboloidu potom zní

$$-\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (5.7)$$

Rotací paraboloid. Rotací paraboly kolem její osy vzniká **rotační paraboloid**.

Paraboloid v *základní poloze* vytvoříme rotací paraboly ležící v rovině yz s vrcholem v počátku a osou v souřadné ose z kolem této osy. Tvořící parabola, která je současně *meridiánem* rotační plochy, je popsána rovnicí

$$y^2 = b^2 z,$$

Obdobným postupem jako v případě elipsoidů a hyperboloidů dospějeme k rovnici

$$z = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (5.8)$$

5.3 Obecné kvadriky v základní poloze

U kuželoseček rozumíme *základní polohou* takové umístění, kdy souřadné osy jsou osami souměrnosti a počátek je v případě středových (resp. nestředových) kuželoseček středem (resp. vrcholem) kuželosečky. Obdobně u kvadrik budeme hovořit o **základní poloze**, jestliže souřadné roviny budou rovinami souměrnosti a počátek kartézské soustavy souřadnic bude v případě středových (resp. nestředových) kvadrik středem (resp. vrcholem) kvadriky.

Další kvadriky získáme, zobrazíme-li rotační kvadriky z předcházející kapitoly v **dilataci** ve směru osy x . Tato afinní transformace je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{b}x, & a, b > 0 \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Elipsoid. Necháme dilataci (5.9) působit na rotační elipsoid s rovnicí (5.5) a dostáváme

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \longrightarrow \frac{\left(\frac{b}{a}x'\right)^2}{b^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

Napíšeme-li tuto rovnici opět v „nečárkovaných“ souřadnicích, potom získáme kanonickou rovnici tzv. **trojosého elipsoidu**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \neq b \neq c \neq a. \quad (5.10)$$

Elipsoid je středová kvadrika (střed je v počátku souřadné soustavy) mající tři roviny souměrnosti $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, které protínají plochu v elipsách. Osy souřadnic x , y , z jsou zároveň osami elipsoidu — ty protínají plochu ve vrcholech $A[a, 0, 0]$, $B[0, b, 0]$, $C[0, 0, c]$, $A'[-a, 0, 0]$, $B'[0, -b, 0]$, $C'[0, 0, -c]$.

Pokud je $a = b$, potom je daný elipsoid rotační; v případě $a = b = c$ je daný elipsoid kulovou plochou.

Hyperboloidy. Aplikací afinní transformace (5.9) obdržíme z rovnice (5.6) kanonickou rovnici **trojosého jednodílného hyperboloidu**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \neq b \neq c \neq a. \quad (5.11)$$

Jednodílný hyperboloid je středová kvadrika (střed je v počátku souřadné soustavy) mající tři roviny souměrnosti $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; roviny $x = 0$ a $y = 0$ protínají plochu v hyperbolách, rovina $z = 0$ v elipse. Osy x , y protínají plochu ve vrcholech $A[a, 0, 0]$, $B[0, b, 0]$, $A'[-a, 0, 0]$, $B'[0, -b, 0]$.

Pokud je $a = b$, potom je daný jednodílný hyperboloid rotační.

Obdobně získáme z rovnice (5.7) kanonickou rovnici **trojosého dvojdílného hyperboloidu**

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \neq b \neq c \neq a. \quad (5.12)$$

Dvojdílný hyperboloid je středová kvadrika (střed je v počátku souřadné soustavy) mající tři roviny souměrnosti $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; roviny $x = 0$ a $y = 0$ protínají plochu v hyperbolách, rovina $z = 0$ nemá s plochou žádný společný bod. Osa z protíná plochu ve vrcholech $C[0, 0, c]$, $C'[0, 0, -c]$.

Pokud je $a = b$, potom je daný dvojdílný hyperboloid rotační.

Paraboloidy. Působením dilatace na rotační paraboloid (5.8) dostaneme **eliptický paraboloid**

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a \neq b \quad (5.13)$$

Eliptický paraboloid je nestředová kvadrika mající dvě roviny souměrnosti $x = 0$, $y = 0$; ty protínají plochu v parabolách. Osa z je osa paraboloidu a protíná plochu ve vrcholu $V[0, 0, 0]$.

Pokud je $a = b$, potom je daný paraboloid rotační.

Eliptický paraboloid bychom mohli vytvořit ještě jiným způsobem. Uvažujme dvě paraboly se společným vrcholem ležící v navzájem kolmých rovinách —

např. $p_1 : x^2 = a^2z \wedge y = 0$ a $p_2 : y^2 = b^2z \wedge x = 0$. Při translačním pohybu, při kterém se parabola p_1 svým vrcholem pohybuje po parabole p_2 , vzniká plocha s rovnicí (5.13).

Jiný typ plochy vytvoříme, uvažujeme-li paraboly $p_1 : x^2 = a^2z \wedge y = 0$ a $p_2 : y^2 = -b^2z \wedge x = 0$. Při translačním pohybu, při kterém se parabola p_1 svým vrcholem pohybuje po parabole p_2 , vzniká tzv. **hyperbolický paraboloid** s rovnicí

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \quad (5.14)$$

Hyperbolický paraboloid je nestředová kvadrika mající dvě roviny souměrnosti $x = 0$, $y = 0$; ty protínají plochu v parabolách. Osa z je osou paraboloidu.

Válcové plochy. Dilataci lze samozřejmě použít i v případě rotační válcové plochy (5.3) — dostaneme **eliptickou válcovou plochu**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \neq b. \quad (5.15)$$

Roviny souměrnosti $x = 0$, $y = 0$ protínají plochu ve dvojici rovnoběžných přímk; roviny souměrnosti $z = konst.$ protínají plochu ve shodných elipsách. Středem plochy je každý bod osy z . Pro $a = b$ je daná válcová plocha rotační.

Analogicky jako o eliptické válcové ploše lze hovořit i o válcové ploše hyperbolické a parabolické.

Hyperbolická válcová plocha je popsána kanonickou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.16)$$

Roviny souměrnosti $x = 0$, $y = 0$ protínají plochu ve dvojici rovnoběžných přímk; roviny souměrnosti $z = konst.$ protínají plochu ve shodných hyperbolách. Středem plochy je každý bod osy z .

Parabolická válcová plocha je popsána kanonickou rovnicí

$$x^2 = a^2y \quad (5.17)$$

Rovina souměrnosti $x = 0$ protíná plochu v přímce, a to v ose z ; roviny souměrnosti $z = konst.$ protínají plochu ve shodných parabolách.

Kuželová plocha. Aplikujeme-li dilataci (5.9) na rotační kuželovou plochu (5.4), dostaneme **eliptickou kuželovou plochu**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a \neq b. \quad (5.18)$$

Roviny souměrnosti $x = 0$, $y = 0$ protínají plochu ve dvojici různoběžných přímek; rovina souměrnosti $z = 0$ protíná plochu v jediném bodě — středu (popř. vrcholu) kuželové plochy. Pro $a = b$ je daná kuželová plocha rotační.

5.4 Kvadriky — kvadratické plochy v \mathbb{E}_3

Kvadrikou nazýváme množinu všech bodů X v prostoru \mathbb{E}_3 , jejichž souřadnice $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ vyhovují kvadratické rovnici

$$\kappa : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + 2a_{03}x_3 + a_{00} = 0, \quad (5.19)$$

kde všechna a_{ij} jsou reálná čísla a alespoň jeden z koeficientů u kvadratických členů je různý od nuly.

Obdobně jako v případě kuželoseček lze opět kvadriku danou rovnicí (5.19) zapsat maticově

$$\kappa : \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{x} + a = 0, \quad (5.20)$$

kde tentokrát

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix}, \quad a = a_{00};$$

resp.

$$\kappa : (1, x_1, x_2, x_3) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.21)$$

Matici \mathbf{C} nazýváme **maticí kvadriky** a její determinant $D = \det(\mathbf{C})$ se nazývá **diskriminant kvadriky**.

- Je-li $D \neq 0$, potom hovoříme o tzv. **regulárních kvadrikách**.
- Je-li $D = 0$, potom hovoříme o **singulárních kvadrikách**.

Elipsoid (rotační včetně kulové plochy i trojosý), jednodílný hyperboloid (rotační i trojosý), dvojdílný hyperboloid (rotační i trojosý), eliptický paraboloid (speciálně rotační) i hyperbolický paraboloid patří mezi *regulární kvadriky*.

Eliptická (speciálně rotační), hyperbolická a parabolická válcová plocha a eliptická (speciálně rotační) kuželová plocha patří mezi *singulární kvadriky*.

Samozřejmě existují i další typy kvadrik, jak uvidíme.

Stanovení kanonických tvarů rovnic. Naším cílem je ze zadání kvadriky v kartézské soustavě $\langle O; x_1, x_2, x_3 \rangle$ maticovou rovnicí (5.20) dospět k nové kartézské soustavě, v níž bude mít rovnice kvadriky kanonický tvar. Tento algoritmus je analogický postupu uvedenému u kuželoseček.

Pomocí otočení

$$\mathcal{R} : \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{y} \quad (\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, \det(\mathbf{R}) = 1)$$

kolem počátku O přejde (5.20) na tvar

$$\kappa : \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{y} + a = 0, \quad \text{kde } \mathbf{B} = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}, \mathbf{b} = \mathbf{R}^T \mathbf{a}, \quad (5.22)$$

přičemž \mathbf{R} volíme tak, aby matice \mathbf{B} byla diagonální — prvky b_{ii} na diagonále matice \mathbf{B} jsou všechna vlastní čísla λ_i matice \mathbf{A} (počítána i s jejich násobností) a sloupcové vektory matice \mathbf{R} jsou jednotkové vzájemně ortogonální vlastní vektory matice \mathbf{A} příslušné k vlastním číslům λ_i .

Následně vhodným posunutím

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{t}$$

(opět postupujeme analogicky jako u kuželoseček) přejdeme od kartézské soustavy souřadnic $\langle O; y_1, y_2, y_3 \rangle$ k soustavě $\langle P; z_1, z_2, z_3 \rangle$, v níž bude kvadrika vyjádřena jednou z rovnic, o nichž hovoří následující věta.

Věta 5.4.1.

Rovnici každé kvadriky v \mathbb{E}_3 lze převést na jednu z uvedených kanonických rovnic ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c, b_3 \neq 0$):

(Ia) $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + c = 0;$

(Ib) $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = 0;$

(II) $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + 2b_3 z_3 = 0;$

(IIIa) $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + c = 0;$

(IIIb) $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 0;$

(IV) $\lambda_1 z_1^2 + 2b_3 z_3 = 0;$

(Va) $\lambda_1 z_1^2 + c = 0;$

(Vb) $\lambda_1 z_1^2 = 0.$

Následující tabulka udává přehled všech druhů kvadrik v \mathbb{E}_3 :

<i>Typ</i>	λ_1	λ_2	λ_3	b_3	c	<i>Druh</i>	<i>Rovnice</i>
Ia	> 0	> 0	> 0	0	< 0	Elipsoid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$
	> 0	> 0	< 0	0	< 0	Jednodílný hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$
	> 0	< 0	< 0	0	< 0	Dvojdílný hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$
	> 0	> 0	> 0	0	> 0	Imaginární elipsoid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = -1$
Ib	> 0	> 0	> 0	0	0	Imaginární kuželová plocha	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$
	> 0	> 0	< 0	0	0	Kuželová plocha	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$
II	> 0	> 0	0	$\neq 0$	0	Eliptický paraboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - x_3 = 0$
	> 0	< 0	0	$\neq 0$	0	Hyperbolický paraboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - x_3 = 0$
IIIa	> 0	> 0	0	0	< 0	Eliptická válcová plocha	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$
	> 0	< 0	0	0	< 0	Hyperbolická válcová plocha	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$
	> 0	> 0	0	0	> 0	Imaginární válcová plocha	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = -1$
IIIb	> 0	> 0	0	0	0	Dvojice imaginárních různoběžných rovin	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
	> 0	< 0	0	0	0	Dvojice různoběžných rovin	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
IV	> 0	0	0	$\neq 0$	0	Parabolická válcová plocha	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - x_2 = 0$
Va	> 0	0	0	0	< 0	Dvojice různých rovnoběžných rovin	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$
	> 0	0	0	0	> 0	Dvojice imaginárních rovnoběžných rovin	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = -1$
Vb	> 0	0	0	0	0	Dvojice splývajících rovin	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$

Příklad 5.4.1. Určete kanonickou rovnici a typ kvadriky určené rovnicí

$$\mathcal{Q}: 4x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 8yz + 8x - 12y - 6z - 47 = 0. \quad (5.23)$$

Řešení: Kvadriku \mathcal{Q} je možné zapsat maticově ve tvaru

$$\mathcal{Q}: (x, y, z) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \cdot \underbrace{(4, -6, -3)}_{\mathbf{a}^T} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \underbrace{-47}_{a_{00}} = 0,$$

resp.

$$\mathcal{Q}: (1, x, y, z) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -47 & 4 & -6 & -3 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Protože $\det(\mathbf{C}) = -2160 \neq 0$, jde o regulární kvadriku.

(i) *Eliminace smíšeného kvadratického členu*

Z charakteristické rovnice vypočteme vlastní čísla matice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5 - \lambda & 4 \\ 0 & 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 14\lambda^2 + 49\lambda - 36,$$

tj. $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 1$.

Určíme *jednotkové* vlastní vektory \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 matice \mathbf{A} příslušné k vlastním číslům λ_1 , λ_2 , λ_3 , tj.

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \mathbf{e}_3 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

jež tvoří sloupcové vektory transformační matice \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Nyní již můžeme přistoupit ke vhodné transformaci kartézské soustavy souřadnic, jež eliminuje smíšené kvadratické členy (zde pouze *jeden* smíšený kvadratický člen) a jež je dána maticovým vyjádřením

$$\mathcal{R}: \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}', \quad \text{tj.} \quad (5.24)$$

$$\mathcal{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Transformace (5.24) převede původní rovnici kvadriky \mathcal{Q} na tvar

$$\mathcal{Q} : (\mathbf{x}')^T \mathbf{B} \mathbf{x}' + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}' + a_{00} = 0, \quad \text{kde}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{R}^T \mathbf{a} = \left(4, -\frac{9}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2} \right),$$

tj. po roznásobení

$$\mathcal{Q} : 4x'^2 + 9y'^2 + z'^2 + 8x' - 9\sqrt{2}y' + 3\sqrt{2}z' - 47 = 0. \quad (5.25)$$

(ii) *Eliminace lineárních členů*

Rovnici $4x'^2 + 9y'^2 + z'^2 + 8x' - 9\sqrt{2}y' + 3\sqrt{2}z' - 47 = 0$ lze dále upravit

$$4(x' + 1)^2 + 9\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(z' + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 60 = 0$$

Posunutí \mathcal{T} kartézské soustavy souřadnic dané rovnicemi

$$\begin{aligned} x'' &= x' + 1 \\ y'' &= y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z'' &= z' + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad (5.26)$$

potom převede rovnici (5.25) na *kanonický tvar*

$$4x''^2 + 9y''^2 + z''^2 - 60 = 0, \quad (5.27)$$

popř. po jednoduché úpravě

$$\frac{x''^2}{15} + \frac{y''^2}{\frac{20}{3}} + \frac{z''^2}{60} = 1. \quad (5.28)$$

Jde tedy o *trojosý elipsoid*.

Zdůrazněme, že všechny rovnice (5.23), (5.25) a (5.27, 5.28) popisují tutéž kvadriku — ovšem vzhledem k různým souřadným systémům $\mathcal{KSS}(x, y, z)$, $\mathcal{KSS}(x', y', z')$ a $\mathcal{KSS}(x'', y'', z'')$.