4. cvičení - mohutnosti množin

1) $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$

- $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad \varphi(n) = n$ je prosté $\Rightarrow \mathbb{N} \preceq \mathbb{Z}$
- $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad \psi(q) = \begin{cases} 1 & q = 0 \\ 2q & q \in \mathbb{Z};\ q > 0 \\ -2q+1; & q \in \mathbb{Z};\ q < 0 \end{cases}$

ψ je prosté $\Rightarrow \mathbb{Z} \preceq \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R} \prec \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

$$\mathbb{R} \approx [0,1] \approx [0,1) \approx (0,1)$$

2) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \cancel{\mathbb{R}}\ (0,1)$

1	2	3	4	...
O	×	×	O	

0,1 2 3 1

$$0{,}1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + \dots$$

$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \cancel{\mathbb{R}}\ (0,1)$

$M \subset \mathbb{N} : \varphi(M) = \sum_{k \in M} 2^{-2k}$ je prosté

Proč 2^{-2k}? $\quad 0{,}1 = 0{,}0\overline{1} \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq (0,1)$

$\varphi : (0,1) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$

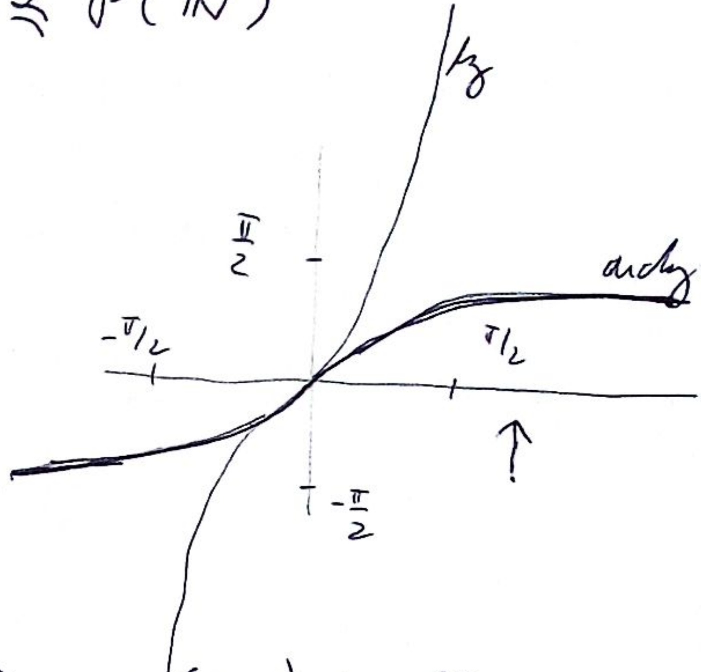
$\varphi(q) = M = \{ k \in \mathbb{N} ;$ q má ve 2. rozvoji na k-tém místě 1, uvažuji 0,1 místo $0{,}0\bar{1}$ apod. $\}$

φ je prosté : $(0,1) \preccurlyeq \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx (0,1)$

3) $\mathbb{R} \approx (0,1)$

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

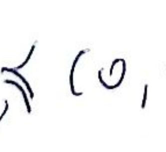


$$\varphi(x) := \frac{\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}}{\pi} : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$$ prostá a na, bijekce

$\Rightarrow \mathbb{R} \approx (0,1)$

4) $(0,1) \preccurlyeq [0,1) \preccurlyeq [0,1] \preccurlyeq (0,1)$

$\varphi(x) = \frac{x+1}{10}$; prosté $\varphi([0,1]) = \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right] \subset (0,1)$



5) $(0,1) \approx [0,1]^2$

- $\varphi(x) = (x,0) \in [0,1]^2$, $x \in (0,1)$ prosté $(0,1) \preccurlyeq [0,1]^2$

- $[0,1]^2 \preccurlyeq (0,1)$? – Doma!

6) $P_{01} = \{$ množina posloupností 0 a 1 $\}$

$\mathbb{N},\ \mathbb{R},\ \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Víme: $P_{01} \approx \mathbb{R}$

Chceme: $P_{01} \preccurlyeq (0,1)$

Víme: $\hat{P}_{01} := \{$ posloupnosti 0 a 1, nekončící samé 1 $\}$

$\hat{P}_{01} \preccurlyeq (0,1)$ ... zobrazení značím φ

$$P_{01} = \hat{P}_{01} \cup \underbrace{\{p\ ;\ p \text{ končí samé } 1\}}_{\tilde{P}_{01}}$$

Chci ukázat, že $\tilde{P}_{01}$ je spočetná.

7) $K = \{$ množina konečných podmnožin $\mathbb{N}$ $\}$

$K_1 = \{$ množina 1 prvkových podmnožin $\mathbb{N}$ $\}$

$K_1 \approx \mathbb{N}$

$K_2 = \{$ množina 2 prvkových podmnožin $\mathbb{N}$ $\}$

$K_2 \approx \mathbb{N}$; $K_n = \{$ množina n prvkových podmnožin $\mathbb{N}$ $\}$

$K_n \approx \mathbb{N}$

$$K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n,\ K_n \text{ spočetná},\ K_n \approx \mathbb{N} \Rightarrow K \approx \mathbb{N}$$

a) $K_1 \approx \mathbb{N}$ ✓

b) $K_2 \approx \mathbb{N}$?

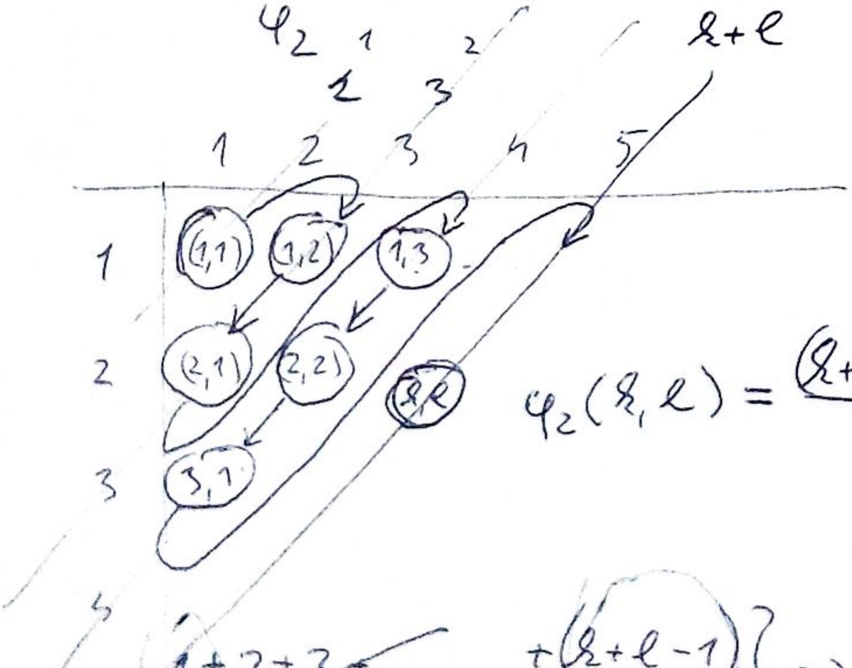
- $K_2 \succcurlyeq \mathbb{N}$: $\varphi(n) = \{n, n+1\}$; $n \in \mathbb{N}$
  prosté

- $K_2 \preccurlyeq \mathbb{N}$

$M \in K_2$; $M = \{a, b\}$; $a < b$; $a, b \in \mathbb{N}$

$M \xrightarrow[\varphi_1 \text{ prosté}]{} [a, b]$; $K_2 \preccurlyeq \mathbb{N}^2$

$\mathbb{N}^2 \xrightarrow[\varphi_2]{} \mathbb{N}$



$$\varphi_2(k, l) = \frac{(k+l-2)(k+l-1)}{2} + k$$

je prosté

$\cancel{1 + 2 + 3 +} \ldots + (k+l-1) \Big\} \Rightarrow \cancel{\frac{(k+l-1)(k+l)}{2}}$

$\cancel{k+l-1} + \cdot$ $\quad 1$

$$1 + 2 + \ldots + k + l - 2 = \frac{(k+l-2)(k+l-1)}{2}$$

$\Rightarrow \mathbb{N}^2 \preccurlyeq \mathbb{N}$

$$\mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(k,l,m) \in \mathbb{N}^3 \xrightarrow[\varphi_3]{} \varphi_2(k, \varphi_2(l,m)) \in \mathbb{N}$$

φ_3 je prosté $\quad \mathbb{N}^3 \precsim \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}^3 \approx \mathbb{N}$

$\Rightarrow K_3 \approx \mathbb{N}$

a podobně $\forall n \in \mathbb{N}: K_n \approx \mathbb{N}$

Po cvičení:

ad 6)

Snadněji ukážeme, že $P_{01} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \in P_{01}$: $\varphi(\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}) := \{k \in \mathbb{N};\ x_k = 1\}$

Pak je φ bijekce, a tedy $P_{01} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}) (\approx \mathbb{R})$

P_{01} na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Ad 5) $(0,1)^2 \preceq (0,1)$

Víme, že ex. bijekce $\varphi: (0,1) \to P_{01}$.

Definuji $\psi: (0,1)^2 \to (0,1)$ předpisem

$$\psi(x,y) = \varphi^{-1}\left(\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}\right), \text{ kde}$$

$$a_{2k} = \varphi(x)_k \text{ a } a_{2k-1} = \varphi(y)_k \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}.$$

Pak ψ je prosté, dokonce bijekce.

Tedy $(0,1)^2 \approx (0,1)$

Dále: $(0,1)^2 \underset{id}{\preceq} [0,1]^2 \preceq (0,1)^2$

$$\varphi(x,y) := \left(\frac{x+1}{3}, \frac{y+1}{3}\right)$$

Tedy $(0,1)^2 \approx [0,1]^2 \approx (0,1) \approx \mathbb{R}$