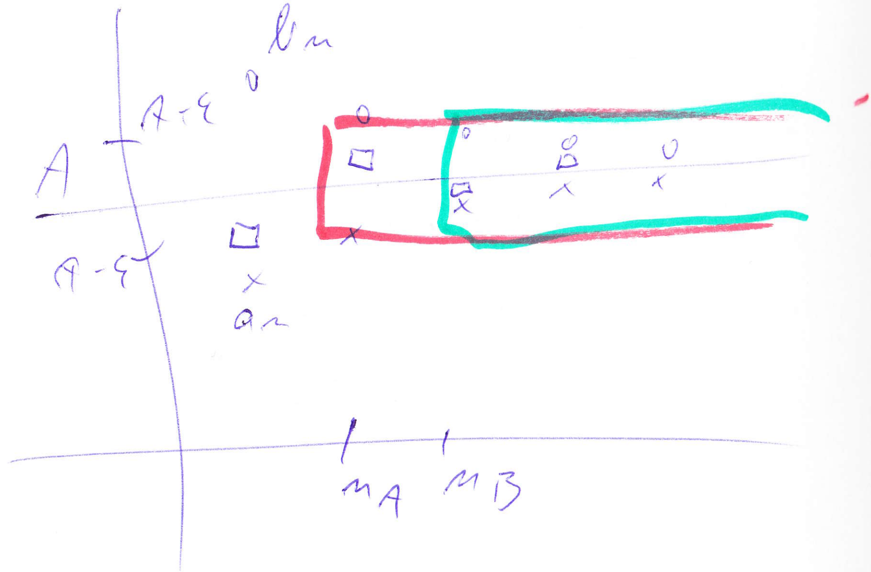
Věta L2.6 (o dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0: \quad a_n \leq c_n \leq b_n$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}$

Pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.



Dk: Nechť $\varepsilon > 0$.

Z $\lim a_n = A$ $\exists n_A\ \forall n \geq n_A$

$|a_n - A| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a_n > A - \varepsilon$

Z $\lim b_n = A$ $\exists n_B\ \forall n \geq n_B$

$|b_n - A| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad b_n < A + \varepsilon$

Položme $n_1 = \max\{n_0, n_A, n_B\}$.

Pak $\forall n \geq n_1$

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon \Rightarrow |c_n - A| < \varepsilon$$

$\square$

Věta 2.7 (o limitě součinu omezené a mizející posloupnosti) L.2.7

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\langle b_n \rangle$ je omezená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Dk: Posloupnost $\langle b_n \rangle$ je omezená, tedy $\exists K>0 \ \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq K$.

Z $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ k zadanému $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - 0| < \varepsilon$.

K tomuto $\varepsilon > 0$ volme stejné n_0, pak $\forall n \geq n_0$

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| \leq |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot K \leq \varepsilon K$$

$\square$

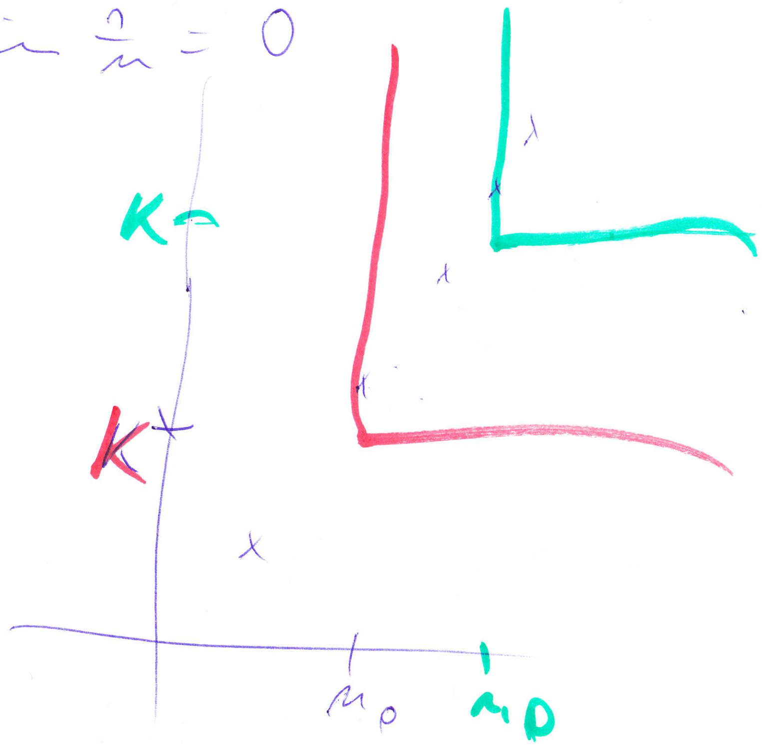
Příklad: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_n = \sin n$

$|\sin n| \leq 1$ $\quad b_n$ je omezená

$\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$

Tedy z V 2.7 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

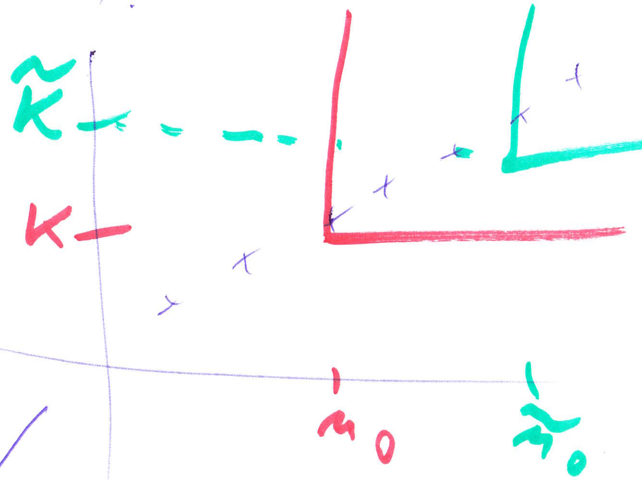


2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Def. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má (nevlastní) limitu $+\infty$ (respektive $-\infty$), pokud:

$$\forall K\in\mathbb{R}\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0,\ n\in\mathbb{N}:\ a_n > K.$$

$$(\forall K\in\mathbb{R}\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0,\ n\in\mathbb{N}:\ a_n < K).$$



Příklad: $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

$$\forall K\in\mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n\ge n_0:\ a_n = n > K.$$

Zde $K\in\mathbb{R}$ zvolíme $n_0 = [|K|]+1 > |K| \ge K$

Pak $\forall n \ge n_0$ platí $n \ge [|K|]+1 > K$ ✓

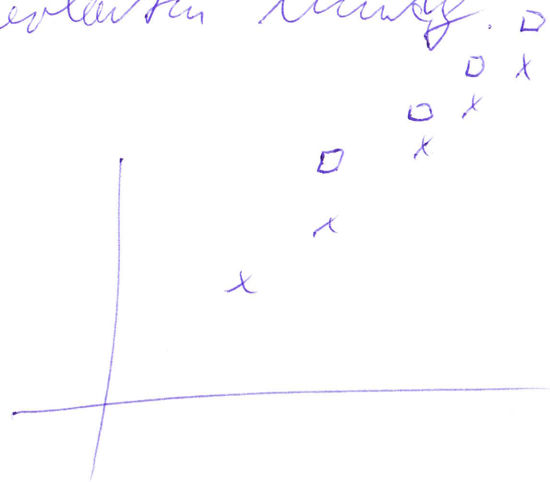
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$$

Věta 2.1. – jednoznačnost limity

Věta 2.3. – limita vybrané posl., platí i pro nevlastní limity.

Věta 2.5 limita a uspořádání

Věta 2.6. o dvou strážnících



$$\underset{\downarrow\ +\infty}{b_n = \sqrt{n+1}} \ \ge\ \underset{\downarrow\ +\infty}{\sqrt{n}} = a_n$$

$\boxed{\text{Definice}}$ Rozšířená reálná osa je množina $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

s následujícími vlastnostmi:

uspořádání: $\forall a \in \mathbb{R} \quad -\infty < a < +\infty$

absolutní hodnota: $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$

sčítání $\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\} \quad -\infty + a = -\infty$

$\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\} \quad +\infty + a = +\infty$

násobení $\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0 \quad a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$

$\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0 \quad a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$

dělení: $\forall a \in \mathbb{R} \quad \dfrac{a}{\pm\infty} = 0$.

Výrazy $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{\text{cokoli}}{0}$ nejsou definovány!

Poznámka: Rozšířená definice sup a inf:

Je-li $A \neq \emptyset$ shora neomezená, tak definujeme $\sup A = +\infty$.

Je-li $A \neq \emptyset$ zdola neomezená, tak definujeme $\inf A = -\infty$.

Pro prázdnou množinu $A = \emptyset$ definujeme $\sup A = -\infty$

$\inf A = +\infty$.

$\boxed{\text{Věta L 2.4)}}$ (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A+B$, pokud je výraz $A+B$ definován.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A\cdot B$, pokud je výraz $A\cdot B$ definován.

(iii) pokud $b_n \neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$ a $B\neq 0$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz $\frac{A}{B}$ definován.

Příklady (i) $1 = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)+(-n) \overset{?}{=} \cancel{\lim (n+1) + \lim(-n) = \infty - \infty}$

$2 = \lim\limits_{n\to\infty} (n+2)+(-n) \overset{?}{=} \cancel{\lim (n+2) + \lim(-n) = \infty - \infty}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ $\quad (-1)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{(-1)^n}{n}} \overset{?}{=} \frac{\lim 1}{\lim \frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{0}$

$\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot$

$n = 2k \quad 2k \qquad n = 2k+1 \ \ldots\ -(2k+1)$

Dk: – ČÁST DŮKAZU (i) $A, B \in \mathbb{R}$ víme, $\underline{A = +\infty,\ B\in\mathbb{R}}$ $\lim a_n + b_n = +\infty$

Zvolme $K\in\mathbb{R}$ libovolné. Z $\lim b_n = B$ k $\varepsilon = 1$ $\exists n_1\ \forall n\geq n_1\ |b_n - B| < 1$ $(\Rightarrow b_n > B-1)$

Z $\lim a_n = +\infty$ k $\tilde{K} = K - B + 1$ $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$

$a_n > \tilde{K} = K - B + 1$.

Pak $\forall n \geq \tilde{n}_0 = \max\{n_0, n_1\}$ $\quad a_n + b_n > K - B + 1 + B - 1 = K$ $\square$

$\forall K\in\mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0:\ a_n + b_n > K$

$\boxed{\text{Věta L 2.8}}$ (limita typu $\frac{A}{0}$) Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*, A > 0$,

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\exists n_0 \forall n \geq n_0$ platí $b_n > 0$. Pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Dk: Zvolme $K \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \begin{cases} A = +\infty & \exists n_1 \quad \forall n \geq n_1 \quad a_n > 1 \\ A \in \mathbb{R} & \varepsilon = \frac{A}{2} \quad \exists n_1 \quad \forall n \geq n_1 \quad |a_n - A| < \varepsilon = \frac{A}{2} \Rightarrow a_n > A - \varepsilon = \frac{A}{2} \end{cases}$$

> 0

Tedy položme $\tilde{A} = \min\{1, \frac{A}{2}\}$. Pak $\forall n \geq n_1 \quad a_n > \tilde{A}$.

Z $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ k $\varepsilon = \frac{\tilde{A}}{K}$ $\exists n_2 \quad \forall n \geq n_2$

$$|b_n - 0| < \frac{\tilde{A}}{K} \xRightarrow[\forall n \geq n_0]{b_n > 0} \underbrace{0 < b_n}_{n \geq n_0} \underbrace{< \frac{\tilde{A}}{K}}_{n \geq n_2} \Rightarrow \frac{1}{b_n} > \frac{K}{\tilde{A}}$$

Položme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Pak

$$\forall n \geq n_3 \quad \frac{a_n}{b_n} > \tilde{A} \cdot \frac{K}{\tilde{A}} = K$$

$\square$

$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_n}{b_n} > K$.