CVIČENÍ
TEORIE RIZIKA

Poissonův proces

5.10. 2010

Předpoklady:

1, Počet událostí v disjunktních časových intervalech jsou nezávislé

2, Pst 1 události v $(t, t+h]$ je $\lambda h + o(h)$, $h \to 0^+$

3, Pst více událostí v $(t, t+h]$ je $o(h)$, $h \to 0^+$

$\leadsto$ Poissonův proces s konstantní intenzitou λ

N_t ... počet událostí do doby t, $\{N_t\}$ načítací proces

$P(N_t = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$ ... Poissonovo rozdělení se stř. hod. λt

$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[\sigma_k \le t]}$, $P(N_t < m) = P(\sigma_m > t)$

$\tau_i \sim Exp(\lambda)$ $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Př 1. Simulace náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením.

Nechť $U_1, U_2, \dots$ posloupnost vzájemně nezávislých náh. veličin s rovnoměrným rozdělením na $[0,1]$.

Nechť $T_k = U_1 \cdot U_2 \dots U_k$, $k = 1, 2, \dots$

$N = \inf\{m : T_m < e^{-\lambda}\}$

Pak náh. vel. $N-1$ má Poissonovo rozdělení se stř. hod. λ.

$N = \inf\{m : -\ln T_m > \lambda\} = \inf\{m, \sigma_m > \lambda\}$

$\sigma_k = -\ln T_k = -\ln (U_1 \cdot U_2 \dots U_k) = -\sum_{j=1}^{k} \ln U_j$

$P(-\ln U_j \le x) = P(U_j \ge e^{-x}) = 1 - e^{-x}$ $\sim Exp(1)$

$\sigma_1 = \tau_1$, $\sigma_2 = \tau_1 + \tau_2, \dots$ Poissonův proces s jednotkovou intenzitou

$$P(N-1=m) = P(N=m+1) = P(N_\lambda = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \sim Po(\lambda)$$

Př. 2 : Odhad intenzity

Ve městě se po dobu T sledovaly dopravní nehody. Do doby T nastalo m nehod v časech $\sigma_1 = s_1, \dots, \sigma_m = s_m$

Předpokládejme Poiss. proces s konst. intenzitou λ

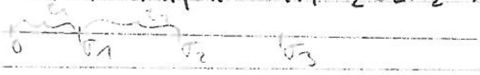
Chceme určit odhad parametru λ metodou maximální věrohodnosti.

věrohodnostní fce:

$$P(\sigma_1 \in [s_1, s_1+ds_1), \sigma_2 \in [s_2, s_2+ds_2), \dots, \sigma_m \in [s_m, s_m+ds_m), N_T = m) =$$

Platí $P(X \in [x, x+dx]) = f(x) \cdot dx$

$$= \cancel{P(\tau_1 \in [s_1, s_1+ds_1), \tau_2 \in [s_2-s_1, s_2-s_1+ds_2-ds_1), \dots},$$



$$= P(\tau_1 \in [s_1, s_1+ds_1), \tau_2 \in [s_2-s_1, ds_2+s_2-s_1), \dots, \tau_{m+1} > T - s_m) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda s_1} ds_1 \cdot \lambda e^{-\lambda(s_2-s_1)} ds_2 \cdots \lambda e^{-\lambda(s_m - s_{m-1})} ds_m \, e^{-\lambda(T-s_m)} =$$

$$= \lambda^m e^{-\lambda T} ds_1 \dots ds_m$$

log věr. fce $\quad l(\lambda) = m \cdot \log \lambda - \lambda T \quad / \frac{\partial}{\partial \lambda}$

$$l'(\lambda) = \frac{m}{\lambda} - T = 0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{m}{T} = \frac{\text{počet událostí}}{\text{délka intervalu}}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{N_T}{T}$$

$E\hat{\lambda} = E \frac{N_T}{T} = \frac{1}{T} \lambda T = \lambda$ … nestranný odhad

$\operatorname{var} \hat{\lambda} = \operatorname{var} \frac{N_T}{T} = \frac{1}{T^2} \lambda T = \frac{\lambda}{T}$ … vydatný (eficientní) odhad

$$\operatorname{Var} N_T = E N_T(N_T - 1) + EN_T - (EN_T)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} + \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} \right)^2 =$$

$$= e^{-\lambda T} \cdot \lambda^2 T^2 \cdot e^{\lambda T} + \lambda T e^{-\lambda T} e^{\lambda T} - (\lambda T)^2 = \lambda T$$

Př. 3: Podmíněné rozdělení

Nechť $\{\sigma_k\}$ je Poissonův proces. Dokažte, že za podmínky $N_T = m$ tvoří $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ uspořádaný výběr z rovnoměrného rozdělení na $[0,T]$.

$$P(\sigma_1 \in [s_1, s_1+ds_1), \dots, \sigma_m \in [s_m, s_m+ds_m) \mid N_T = m) =$$
$$P(\tau_1 \in [s_1, s_1+ds_1), \dots, \tau_m \in [s_m - s_{m-1}, s_m - s_{m-1} + ds_m) \mid N_T = m) =$$
$$= \frac{P(\tau_1 \in [s_1, s_1+ds_1), \dots, \tau_m \in [s_m - s_{m-1}, s_m - s_{m-1} + ds_m), \tau_{m+1} > T - s_m)}{P(N_T = m)} =$$

$$= \frac{\lambda^m e^{-\lambda T} ds_1 \dots ds_m}{\frac{(\lambda T)^m}{m!} e^{-\lambda T}} = \frac{m!}{T^m} ds_1 \dots ds_m$$

součin hustot $R(0,T) \to \frac{1}{T^m}$, $m!$ výběrů dá stejný uspoř. výběr. ?

Statistika N_T je postačující statistikou (pro odhad λ), protože pst výběru $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ za podmínky N_T nezávisí na parametru λ.

- N_T obsahuje stejnou informaci o par. λ jako celé pozorování
  $(\sigma_1 = s_1, \dots, \sigma_m = s_m, N_T = m)$
- na základě znalosti N_T si můžeme pořídit pozorování rovnocenné původnímu.

Př. 4: Porovnávání intenzit

$N_T = m$, $\sigma_1 = s_1, \dots, \sigma_m = s_m \to$ Pois. proces λ

$N'_{T'} = m'$ $\sigma'_1 = s'_1, \dots, \sigma'_{m'} = s'_{m'} \to$ Pois. proces λ'

? H_0: $\lambda = \lambda'$

$$P(N_T = k \mid N_T + N'_{T'} = m+m') = \frac{P(N_T = k, N_T + N'_{T'} = m+m')}{P(N_T + N'_{T'} = m+m')} =$$

$$= \frac{P(N_T = k, N'_{T'} = m+m'-k)}{P(N_T + N'_{T'} = m+m')} = \frac{P(N_T = k) P(N'_{T'} = m+m'-k)}{P(N_T + N'_{T'} = m+m')} =$$

$$= \frac{\frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \cdot \frac{(\lambda' T')^{n+n'-k}}{(n+n'-k)!} e^{-\lambda' T'}}{\frac{(\lambda' T' + \lambda T)^{n+n'}}{(n+n')!} e^{-(\lambda' T' + \lambda T)}} = \binom{n+n'}{k} \left(\frac{\lambda T}{\lambda T + \lambda' T'} \right)^k \left(\frac{\lambda' T'}{\lambda T + \lambda' T'} \right)^{n+n'-k} =$$

$$= \binom{n+n'}{k} \theta^k (1-\theta)^{n+n'-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n+n'$$

$$N_T \mid N_T + N'_{T'} = n+n' \sim Bi(n+n', \theta)$$

$$H_0 : \lambda = \lambda' \rightsquigarrow H_0 : \theta = \theta_0 = \frac{T}{T+T'}$$

H_0 zamítáme, pokud "$N_T = n$ je hodně malé nebo hodně velké",

tj. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+n'}{k} \theta_0^k (1-\theta_0)^{n+n'-k} < \frac{\alpha}{2}$ $\quad$? $P^{H_0}(N_T \leq n) < \frac{\alpha}{2}$

$\quad \sum_{k=n}^{n+n'} \binom{n+n'}{k} \theta_0^k (1-\theta_0)^{n+n'-k} < \frac{\alpha}{2}$ $\quad$? $P^{H_0}(N_T \geq n \mid N_T + N'_{T'} = n+n') < \frac{\alpha}{2}$

Aproximace normálním rozdělením

Moivre-Laplaceova věta:

$$X \sim Bi(n, p) \rightarrow \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1) \quad \text{pro } n \to \infty$$

$$U = \frac{N_T - (n+n')\theta_0}{\sqrt{(n+n')\theta_0(1-\theta_0)}}$$

$$|U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \text{zamítáme } H_0$$

$$N_T = n \rightarrow \left| \frac{nT' - n'T}{\sqrt{(n+n')TT'}} \right| \overset{?}{>} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Zobecnění $\quad T_1, \ldots, T_k \quad \times$ disjunktní časové intervaly

$\quad n_1, \ldots, n_k \quad$ pozorované počty událostí

$\quad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \quad \ldots$ intenzity Pois. procesu

$$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k \qquad n = \sum n_i \qquad T = \sum T_i$$

$$P(N^1_{T_1} = n_1, \ldots, N^{k-1}_{T_{k-1}} = n_{k-1} \mid N^1_{T_1} + \ldots + N^k_{T_k} = n) \overset{H_0}{=}$$

$$= \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \left(\frac{T_1}{T} \right)^{n_1} \ldots \left(\frac{T_k}{T} \right)^{n_k}$$

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(n_i - n\frac{T_i}{T})^2}{n\frac{T_i}{T}} \sim \chi^2_{k-1} \qquad H_0 \text{ zam., pokud } \chi^2$$

12.10.2010

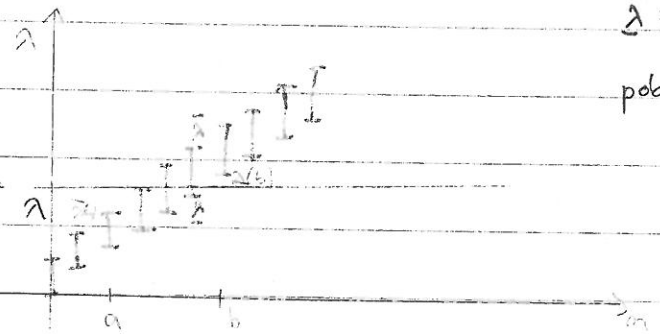
Př. 5: Konfidenční interval pro intenzitu λ.

$N_T = m$ chceme $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ $\quad P_\lambda(\underline{\lambda} \le \lambda \le \bar{\lambda}) \ge 1-\alpha$

$$\bar{\lambda}: \sum_{k=0}^{m} \frac{(\bar{\lambda}T)^k}{k!} e^{-\bar{\lambda}T} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\underline{\lambda}: \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(\underline{\lambda}T)^k}{k!} e^{-\underline{\lambda}T} = \frac{\alpha}{2}$$

Závislost na pozorované hodnotě



$\underline{\lambda} \le \lambda < \bar{\lambda}$ neplatí, pokud $N_T \le a$, $N_T \ge b$

$$P(N_T \le a \text{ nebo } N_T \ge b) \le \alpha$$

$$P(N_T \le a) = \sum_{k=0}^{a} \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \le \sum_{k=0}^{a} \frac{(\bar{\lambda}(a)T)^k}{k!} e^{-\bar{\lambda}(a)T} = \frac{\alpha}{2}, \quad \bar{\lambda}(a) \le \lambda$$

$$P(N_T \ge b) = \sum_{k=b}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} = 1 - \sum_{k=0}^{b-1} \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \le \sum_{k=b}^{\infty} \frac{(\underline{\lambda}(b)T)^k}{k!} e^{-\underline{\lambda}(b)T} = \frac{\alpha}{2} \quad \underline{\lambda}(b) \ge \lambda$$

$$P(N_T \le m) = P(\sigma_{m+1} > T)$$

$$f_{\sigma_k}(x) = \lambda^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0$$

$k = 1 \Rightarrow f_{\sigma_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \sim Exp(\lambda)$ ✓ $\quad \sigma_1 = \tau_1$

$\sigma_k = \sigma_{k-1} + \tau_k$

$f_{\sigma_k} \sim \sigma_k$

$f_{\sigma_{k-1}} \sim \sigma_{k-1}$

$f_{\tau_k} \sim \tau_k$

$$f_{\sigma_k}(x) = \int_0^x f_{\sigma_{k-1}}(y) f_{\tau_k}(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda^{k-1} \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda y} \cdot \lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy =$$

$$= \frac{\lambda^{k}}{(k-2)!} e^{-\lambda x} \left[\frac{y^{k-1}}{k-1} \right]_0^x = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda x} x^{k-1}$$ ✓

$$P(N_T \le m) = P(\sigma_{m+1} > T) = 1 - P(\sigma_{m+1} \le T) = 1 - \int_0^T f_{\sigma_{m+1}}(y)\,dy =$$

$$\int_T^{\infty} \frac{\lambda^{m+1}}{m!} e^{-\lambda y} y^m\,dy = \int_{\lambda T}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda^{m+1}}{m!} e^{-x} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^m dx = \int_{\lambda T}^{\infty} \frac{1}{m!} e^{-x} x^m\,dx$$

$x = \lambda y$

$dx = \lambda dy$

$$\chi^2_k: \quad f_k(x) = \frac{1}{2^{k/2}\,\Gamma(\frac{k}{2})}\, x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \text{ZAPAMATOVAT}$$

$z = 2x \qquad dz = 2\,dx$

$$= \int_{2\lambda T}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^m}{m!} e^{-\frac{z}{2}} \frac{1}{2}\,dz = \underbrace{\int_{2\lambda T}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1} m!} z^m e^{-\frac{z}{2}}\,dz}_{\xi \sim \chi^2_{2m+2}} = P(\xi > 2\lambda T) = P(N_T \leq m)$$

$$\bar\lambda: \quad P_{\bar\lambda}(N_T \leq m) = \frac{\alpha}{2} = P(\xi \geq 2\bar\lambda T) \quad \rightsquigarrow \quad \bar\lambda = \frac{\chi^2_{2m+2}(1-\frac{\alpha}{2})}{2T}$$

$$\underline{\lambda}: \quad P_{\underline{\lambda}}(N_T \geq m) = \frac{\alpha}{2} = P(\xi \leq 2\underline{\lambda} T) \qquad \underline{\lambda} = \frac{\chi^2_{2m+2}(\frac{\alpha}{2})}{2T}$$

~~Př. 6~~: Sledování trendu v intenzitě

Podmínku 2 nahradíme 2': Pst nastání 1 události v intervalu $(t, t+h]$ je $\lambda(t)h + o(h)$, $h \to 0+$

… Poissonův proces s proměnnou intenzitou $\lambda(t)$, $t \geq 0$

$$P(N_t - N_s = m) = \frac{\left(\int_s^t \lambda(y)\,dy\right)^m}{m!} e^{-\int_s^t \lambda(y)\,dy} \quad , \quad \frac{(\lambda(t-s))^m}{m!} e^{-\lambda(t-s)}$$

Př. 6: Model při sledování důlních neštěstí ve Walesu:

$\lambda(t) = e^{\alpha + \beta t}$, $t \geq 0$, α, β neznámé parametry

T, m, $\sigma_1 = s_1, \dots, \sigma_m = s_m$, $N_T = m$

Chceme věrohodnostní fci.

$\sim \lambda e^{-\lambda(s_i - s_{i-1})}$

$\lambda(s_i) e^{-\int_{s_{i-1}}^{s_i} \lambda(y)dy}$

$\sigma_i | \sigma_1$

$$P(\sigma_1 \in [s_1, s_1+ds_1), \dots, \sigma_m \in [s_m, s_m+ds_m), N_T = m) =$$
$$= \lambda(s_1) e^{-\int_0^{s_1}\lambda(y)dy} ds_1 \dots \lambda(s_m) e^{-\int_{s_{m-1}}^{s_m}\lambda(y)dy} ds_m \cdot e^{-\int_{s_m}^{T}\lambda(y)dy} =$$
$$= \lambda(s_1)\dots\lambda(s_m) e^{-\int_0^T \lambda(y)dy} ds_1 \dots ds_m = \lambda(s_1)\dots\lambda(s_m) e^{-\frac{e^{\alpha+\beta T} - e^{\alpha}}{\beta}} ds_1 \dots ds_m =$$

$$\int_0^T e^{\alpha + \beta y} dy = \left[\frac{e^{\alpha+\beta y}}{\beta}\right]_0^T = \frac{1}{\beta}\left(e^{\alpha+\beta T} - e^{\alpha}\right)$$

$T - N_{s_m} = 0) = ?$

$$= e^{\alpha+\beta s_1} \dots e^{\alpha+\beta s_m} e^{-\frac{e^{\alpha+\beta T} - e^{\alpha}}{\beta}} ds_1 \dots ds_m = e^{m\alpha + \beta(s_1 + \dots + s_m)} e^{-\frac{e^{\alpha+\beta T} - e^{\alpha}}{\beta}} ds_1 \dots ds_m$$

Kde se vzalo? Mělo by tam asi být $\int_0^{s_1} \lambda(y)dy$ ale jak z toho vznikne $\lambda(s_1)$ nevím

Věrohodnostní fce závisí na pozorováních pouze prostřednictvím m a Σs_m

$\Rightarrow$ dvojice $(N_T, \Sigma \sigma_i)$ je postačující statistikou pro odhad α a β

Podmíněná věrohodnostní fce za pod. $N_T = m$

$$P(\sigma_1 \in [s_1, s_1+ds_1), \dots, \sigma_m \in [s_m, s_m+ds_m) \mid N_T = m) =$$

$$= \frac{e^{m\alpha + \beta(s_1+\dots+s_m) + \frac{e^{\alpha} - e^{\alpha+\beta T}}{\beta}} ds_1 \dots ds_m}{P(N_T = m)} =$$

$N_T \sim Po(\text{stř. h.} \int_0^T \lambda(y)\,dy)$

$$= \frac{e^{m\alpha + \beta \sum_{i=1}^m s_i + e^{\frac{-\alpha(e^{\beta T}-1)}{\beta}}} ds_1 \dots ds_m}{\frac{\left(\frac{e^{\alpha}(e^{\beta T}-1)}{\beta}\right)^m}{m!} e^{-\frac{e^{\alpha}(e^{\beta T}-1)}{\beta}}} = \frac{m!\, e^{\beta(\sum_{i=1}^m s_i)} \beta^m}{(e^{\beta T}-1)^m} ds_1 \dots ds_m$$

$$\ni L(\beta) = \frac{m!\, e^{\beta(\sum_{i=1}^m s_i)} \beta^m}{(e^{\beta T}-1)^m}$$ ... hustota usp. výběru o rozsahu m z rozdělení o hustotě $\frac{\beta e^{\beta x}}{e^{\beta T}-1}$ (*) $0 \le x \le T$, $\beta \ne 0$

$$l(\beta) := \log L(\beta) = \log m! + \beta \sum_{i=1}^m s_i + m \cdot \log \beta - m \cdot \log(e^{\beta T}-1) \quad \Big/ \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta} = \underbrace{\sum_{i=1}^m s_i + \frac{m}{\beta} - \frac{m}{e^{\beta T}-1} e^{\beta T} \cdot T}_{g(\beta)} = 0$$

$$\beta = 0 \Rightarrow \lim_{\beta\to 0} \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^m s_i + m \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} - \frac{e^{\beta T} \cdot T}{e^{\beta T}-1} \overset{L'H}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^m s_i + m \lim_{\beta\to 0} \frac{Te^{\beta T} - T^2\beta e^{\beta T} - Te^{\beta T}}{\beta T e^{\beta T} - 1 + e^{\beta T}} \overset{L'H}{=} \sum_{i=1}^m s_i - m \cdot \lim_{\beta \to 0} \frac{T^2 e^{\beta T} + T^3 \beta e^{\beta T}}{Te^{\beta T} + Te^{\beta T} + \beta T^2 e^{\beta T}} =$$

$$= \sum_{i=1}^m s_i - \frac{mT}{2}$$

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{\beta e^{\beta x}}{e^{\beta T}-1} = \frac{1}{T}$$ ... hustota $R(0,T)$, $\beta = 0$

$$g(\beta) = \begin{cases} \frac{m}{\beta} - \frac{mTe^{\beta T}}{e^{\beta T}-1} + \sum_{i=1}^m s_i & \beta \ne 0 \\ -\frac{mT}{2} + \sum_{i=1}^m s_i & \beta = 0 \end{cases}$$

$H_0: \beta = \hat{\beta_0}$

$$g(\beta_0) = \begin{cases} \frac{m}{\beta_0} - \frac{mT e^{\beta_0 T}}{e^{\beta_0 T} - 1} + \sum \sigma_k & \beta_0 \neq 0 \\ \frac{1}{2} mT + \sum \sigma_k \end{cases}$$

$$E\{g(\beta_0) \mid N_T = m\} = ?, \ Var\{g(\beta_0) \mid N_T = m\} = ?$$

$\sum \sigma_k$ (nezávisí na uspořádání) má stejné rozdělení jako součet $\sum \sigma_k'$, kde σ_k' jsou nezávislé stejně rozdělené s hustotou $*$ (za podmínky $N_T = m$).

$$E[\sum \sigma_k \mid N_T = m] = E[\sum \sigma_k'] \overset{\text{nez.}}{=} \sum_{k=1}^{m} E\sigma_k' \overset{\text{stejně rozděl.}}{=} m \cdot E\sigma_k' =$$

$$= m \cdot \int_0^T x \cdot \frac{\beta e^{\beta x}}{e^{\beta T} - 1} dx = \frac{m}{e^{\beta T} - 1} \beta \cdot \left(\left[x \frac{e^{\beta x}}{\beta} \right]_0^T - \frac{1}{\beta^2} \left[e^{\beta x} \right]_0^T \right) =$$

$x \quad 1$

$e^{\beta x} \quad \frac{e^{\beta x}}{\beta}$

$$= \frac{m}{e^{\beta T} - 1} \left(T \cdot e^{\beta T} - \frac{1}{\beta} \cdot e^{\beta T} + \frac{1}{\beta} \right) = \begin{cases} \frac{mT e^{\beta T}}{e^{\beta T} - 1} - \frac{m}{\beta} & \text{pro } \beta \neq 0 \\ \frac{mT}{2} & \text{pro } \beta = 0 \end{cases}$$

získali jsme pro hustotu $e^{\beta(\ldots)}$

$$E[g(\beta_0) \mid N_T = m] = \begin{cases} \frac{m}{\beta_0} - \frac{mT e^{\beta_0 T}}{e^{\beta_0 T} - 1} + \frac{mT e^{\beta T}}{e^{\beta T} - 1} - \frac{m}{\beta_0} = 0 \\ -\frac{1}{2} mT + \frac{1}{2} mT = 0 \end{cases}$$

$$var[g(\beta_0) \mid N_T = m] = E(g(\beta_0)^2 \mid N_T = m) = \cancel{Var}\, E[(\sum \sigma_k - E(\sum \sigma_k \mid N_T = m))^2 \mid N_T = m] =$$

$$= Var(\sum \sigma_k \mid N_T = m) = var[\sum \sigma_k'] = m \cdot var\, \sigma_k = m \cdot (E\sigma_k'^2 - (E\sigma_k')^2) =$$

$$\overline{(*)}\ m \int_0^T x^2 \cdot \frac{\beta e^{\beta x}}{e^{\beta T} - 1} dx = \frac{m\beta}{e^{\beta T} - 1} \left(\left[x^2 \frac{e^{\beta x}}{\beta} \right]_0^T - \frac{2}{\beta} \int_0^T x e^{\beta x} \right) =$$

$x^2 \quad 2x \qquad x \quad 1$

$e^{\beta x} \quad \frac{e^{\beta x}}{\beta} \qquad e^{\beta x} \quad \frac{e^{\beta x}}{\beta}$

$$= \frac{m\beta}{e^{\beta T} - 1} \left[T^2 \frac{e^{\beta T}}{\beta} - \frac{2}{\beta} \left[\left[x \frac{e^{\beta x}}{\beta} \right]_0^T - \frac{e^{\beta T}}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} \right] \right] = \frac{m\beta}{e^{\beta T} - 1} \left(T^2 \frac{e^{\beta T}}{\beta} - \frac{2}{\beta} T \frac{e^{\beta T}}{\beta} + \frac{2 e^{\beta T}}{\beta^3} - \frac{2}{\beta^3} \right) =$$

$$= \frac{m e^{\beta T}}{e^{\beta T} - 1} \left(T^2 - \frac{2T}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^2 e^{\beta T}} \right)$$

$$= \frac{e^{\beta T}}{e^{\beta T}-1}\left[T^2 - \frac{2T}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^2 e^{\beta T}}\right] - \frac{T^2 e^{2\beta T}}{(e^{\beta T}-1)^2} + \frac{2T e^{\beta T}}{\beta(e^{\beta T}-1)} - \frac{1}{\beta^2} =$$

$$= \frac{e^{\beta T}\beta^2(e^{\beta T}-1)\left[T^2 - \frac{2T}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^2 e^{\beta T}}\right] - T^2\beta^2 e^{2\beta T} + 2T\beta e^{\beta T}(e^{\beta T}-1) - (e^{\beta T}-1)^2}{(e^{\beta T}-1)^2\beta^2}$$

$$= \frac{T^2\beta^2 e^{2\beta T} - T^2\beta^2 e^{\beta T} - 2T\beta e^{2\beta T} + 2T\beta e^{\beta T} + 2e^{2\beta T} - 2e^{\beta T} - 2e^{\beta T} + 2}{(e^{\beta T}-1)^2\beta^2}$$

$$= \frac{T^2\beta^2 e^{2\beta T} + 2T\beta e^{2\beta T} - 2T\beta e^{\beta T} - e^{2\beta T} + 2e^{\beta T} - 1}{\beta^2(e^{\beta T}-1)^2} =$$

$$= \frac{-T^2\beta^2 e^{\beta T} + e^{2\beta T} - 2e^{\beta T} + 1}{\beta^2(e^{\beta T}-1)^2}$$

$$= \begin{cases} m\left[\frac{1}{\beta^2} - \frac{T^2 e^{\beta T}}{(e^{\beta T}-1)^2}\right] & \beta \neq 0 \\ m\,\frac{T^2}{12} & \beta = 0 \end{cases}$$

$g(\beta_0) \mid N_T = m$ má ~~neza~~ stejné rozdělení jako součet m nezávislých n.v. stejně rozdělených s konečným rozptylem

$\Rightarrow$ splňuje CLV $\Rightarrow$ normální aproximace pro velká m

$$U = \frac{g(\beta_0)}{\sqrt{E\, g(\beta_0)^2}} = \frac{\sum \sigma_k - E[\sum \sigma_k \mid N_T = m]}{\sqrt{\operatorname{var}(\sum \sigma_k \mid N_T = m)}} \overset{as.}{\sim} N(0,1)$$

$|U| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$ zamítáme $H_0: \beta = \beta_0$

$H_0: \beta = 0$ $\quad U = \dfrac{\frac{1}{m}\sum \sigma_k - \frac{1}{2}T}{T\sqrt{\frac{m}{12}}} = \dfrac{\sum \sigma_k - \frac{mT}{2}}{\sqrt{\frac{mT^2}{12}}}$

intenzita konst.

$[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$ $\quad |U| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \dfrac{g(0)}{\sqrt{E(g(0))^2}}$

Větvící Poissonův proces

Procesy se mohou překrývat.

Pozorovateli události splývají.

$Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ posl. náh. vel. oddělujících primární proces.

Každému primárnímu jevu odpovídá náhodné číslo S a posloupnost jevů $Y_1, \dots, Y_S$ oddělující sekundární jevy.

Předpokl. Primární proces je Pois. proces s intenzitou λ, veličiny S, S', S'' jsou stejně rozdělené.

Př 7: 1, stanovte fci $h(s)$ ... očekávaný počet událostí v sekundárním procesu do doby s od jeho počátku

2, EN_t, kde N_t je počet všech událostí v intervalu $[0, t)$

3, limita intenzity $\frac{d}{dt} EN_t$ pro $t \to \infty$.

1, $F^{(r)}(t)$... d.f. $Y_1 + \dots + Y_r$ (doba r-té události)

$$F^{(r)}(t) = F * F^{(r-1)}(t) \quad \text{... konvoluce}$$

$$h(s) = E\left[\text{počet událostí do } s\right] = E_S\left[E[\text{počet do } s \mid S]\right] =$$

$$= E_S\left[\sum_{m=1}^{S} m \cdot P(\underbrace{\text{počet}}_{\text{do } s} = m)\right] = E_S\left[\left(\sum_{m=1}^{S-1} m \cdot \left(\underset{P(Y_1+\dots+Y_m \le s)}{F^{(m)}(s)} - \underset{P(Y_1+\dots+Y_{m+1} \le s)}{F^{(m+1)}(s)}\right)\right) + F^{(S)}(s) \cdot S\right] =$$

$$= E_S \sum_{m=1}^{S} F^{(m)}(s)$$