Cvičení 2

1a) $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x+y| \leq |x| + |y|$

Def: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme $|x| = \begin{cases} x & \text{pokud } x \geq 0 \\ -x & \text{pokud } x < 0 \end{cases}$

Dk: rozlišením možností

a) $x \geq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0$

chceme: $|x+y| = x+y \leq |x|+|y| = x+y$ ✓

b) $x \geq 0,\ y < 0,\ x+y \geq 0$: chci

$x+y \leq x-y$?

Stačí: $\forall y < 0: y \leq -y$.

$\left(y < 0 \underset{(+(-y))}{\Rightarrow} 0 < -y \Rightarrow y < -y \Rightarrow y \leq -y \right)$

c) $x \geq 0,\ y < 0,\ x+y < 0$: chci

$-x-y \leq x-y$?

Stačí: $\forall x \geq 0: -x \leq x$

podobně jako nahoře

d) $x < 0$ .... podobně.

1b) $\forall x,y \in \mathbb{R}: \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$ $\quad \left(\big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y| \right)$

$|x| \geq |y|: |x| \leq |x-y|+|y|$? $\quad$ Δ nerovnost

platí protože: $|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y|$

$|x|<|y|$: chci: $|y| \leq |x-y| + |x|$

platí: $|y| = |y-x+x| \underset{1a}{\leq} |y-x| + |x| =$

$|x-y| + |x|$

$\perp$.

2) Tvrzení: $\sqrt{6}$ je iracionální

číslo je iracionální, pokud není racionální

číslo je racionální, pokud je možné zapsat ve tvaru $\frac{k}{l}$, kde $k \in \mathbb{Z}$; $l \in \mathbb{N}$ (předpokládejme, aby k, l byla nesoudělná)

Dk: Sporem Budeme předpokládat $\sqrt{6}$ je racionální.

$\sqrt{6} = \frac{k}{l}$; $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ nesoudělné

$\sqrt{6}\, l = k$; $6l^2 = k^2 \Rightarrow k^2$ je děl 3 $\Rightarrow k$ je děl. 3

(at $k = 3m + 1$ pro j. $m \in \mathbb{Z}$

pak $k^2 = 9m^2 + 6m + 1$ a

$\underbrace{k^2 - 9m^2 - 6m}_{\text{je děl 3}} = \underbrace{1}_{\text{není děl. 3}}$ nelze

at $k = 3m + 2$

$k^2 = 9m^2 + 12m + 4$

$\underbrace{k^2 - 9m^2 - 12m}_{\text{je děl 3}} = \underbrace{4}_{\text{není}}$ nelze)

$\Rightarrow k = 3m$ pro ř. $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 6l^2 = 9m^2 \Rightarrow 2l^2 = 3m^2 \Rightarrow l^2$ je děl. 3

$\Rightarrow l$ je děl. 3 Spor. (k a l byla nesoudělná)

Tvrzení: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ je iracionální

Dk sporem: Pp $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je racionální $= \frac{k}{l}$; $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$

Pak $l(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = k \Rightarrow l^2(2 + 2\sqrt{6} + 3) = k^2$

$\Rightarrow 2\sqrt{6} = \frac{k^2}{l^2} - 5 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{l^2} - 5\right)$

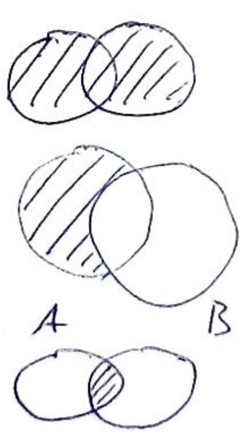
Spor!
($\sqrt{6}$ je iracionální)

3) $f : X \to Y$, $A, B \subset Y$

$A \cup B = \{y \in Y;\ y \in A \vee y \in B\}$

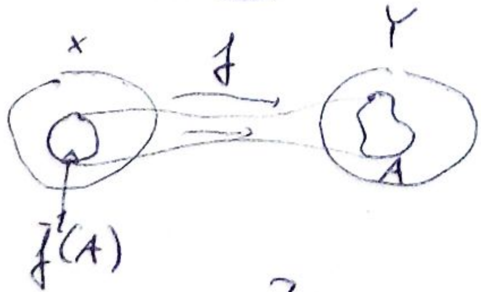
$A \setminus B = \{y \in A;\ y \notin B\}$

$A \cap B = \{y \in Y;\ y \in A \wedge y \in B\}$



$f^{-1}(A) = \{x \in X;\ f(x) \in A\}$

vzor A při zobrazení f



$D \subset X : f(D) = \{y \in Y;\ \exists x \in D : f(x) = y\}$

obraz D při zobrazení f

3 Tvrzení: $f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

Dk: Rovnost množin = 2 inkluze

množiny M, N: $(M = N) \Leftrightarrow (M \subset N \wedge N \subset M)$

Chci: $\forall x \in f^{-1}(A\cup B) : x \in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

"$\subset$"

$\forall x \in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(A) : x \in f^{-1}(A\cup B)$

$x \in f^{-1}(A\cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A\cup B \Leftrightarrow f(x)\in A \vee f(x)\in B$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$ "$\subset$" $\quad \Leftarrow$: "$\supset$"

$\perp$.