1.3. Krátký výlet do nekonečna

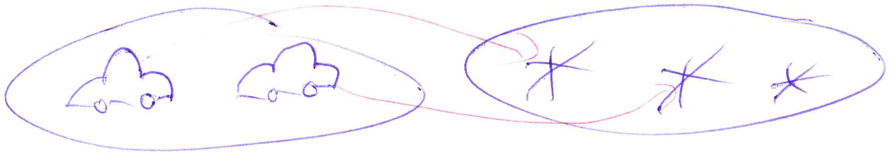
Def. Řekneme, že množiny A, B mají stejnou mohutnost, pokud existuje bijekce A na B. Značíme $A \approx B$.

Řekneme, že množina A má mohutnost menší nebo rovnu mohutnosti B, pokud existuje prosté zobrazení A do B. Značíme $A \preceq B$.

$\cancel{\le}$

Řekneme, že množina A má menší mohutnost než B, pokud $A \preceq B$, ale neplatí $B \preceq A$. Značíme $A \prec B$.

Příklady:



1) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{N} \preceq \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{cccccccccc} \dots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & \dots & \mathbb{Z} \\ & 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & & \mathbb{N} \end{array}$$

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$

2) $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$

$\cap \{x > 0\}$

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$

1 $\frac{1}{1}$	3 $\frac{2}{1}$	6 $\frac{3}{1}$	10 $\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	…
2 $\frac{1}{2}$	5 $\frac{2}{2}$	9 $\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	…
4 $\frac{1}{3}$	8 $\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	…	
7 $\frac{1}{4}$	12 $\frac{2}{4}$	…			
11					

$\mathbb{Q} \cap \{x > 0\}$

Tvrzení (viz proseminář)

$A \preceq B$ a $B \preceq A$. Pak $A \approx B$.

3) $\mathbb{N} < \mathbb{R}$ neexistuje očíslování $\mathbb{R}$ pomocí $\mathbb{N}$.

důkaz sporem:

$\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekce

1 $\longrightarrow \varphi(1) = a_{11}, a_{12}\ a_{13}\ a_{14}$

2 $\longrightarrow a_{21}, a_{22}\ a_{23}\ a_{24}$

3 $a_{31}, a_{32}\ a_{33}\ a_{34}$

4 $a_{41}, a_{42} \ldots$

$a_{11} \in \mathbb{Z}$ 3-2

$a_{12} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

a_{13} ⋯

$\varphi(1) = 5{,}347$

P ~~...~~ Položme: $r = 0{,}(a_{12}+1)(a_{23}+1)(a_{34}+1)\ldots \in \mathbb{R}$

r není na 1. řádku

r není na 2. řádku

$\Big\}$ r tam není $\lightning$

Def Řekneme, že množina A je konečná, má-li konečný počet prvků.

Řekneme, že A je spočetná, jestliže $A \approx \mathbb{N}$, nebo je A konečná.

Řekneme, že A je nespočetná, jestliže $\mathbb{N} < A$.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ spočetná

$\mathbb{R}$ . . nespočetná

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ (Cantor) Nechť X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$, kde $\mathcal{P}(X)$ značí množinu všech podmnožin X. 3-3

$\vdash$ $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R} \prec \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Dk: Zobrazení $\varphi: X \to \mathcal{P}(X)$ definované $\varphi(x) = \{x\}$ je prosté.

Tvrdím, že neplatí $X \approx \mathcal{P}(X)$.

Důkaz sporem: Nechť existuje bijekce $\varphi: X \to \mathcal{P}(X)$

Označme $A = \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$

φ je bijekce $\Rightarrow \exists a \in X \quad \varphi(a) = A$.

Nyní a) $a \in A \overset{\text{def} A}{\Longrightarrow} a \notin \varphi(a) = A$. spor

b) $a \notin A \overset{\text{def} A}{\Longrightarrow} a \in \varphi(a) = A$ spor $\quad \lightning$

$\square$

Hypotéza kontinua: $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$

Otázka: Existuje $A \subset \mathbb{R}$, že $\mathbb{N} \prec A$ a $A \prec \mathbb{R}$?

Teorie Množin

TE MNO

Tvrzení) Nechť $A_n, n \in \mathbb{N}$, jsou spočetné množiny, pak $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots$ je spočetná.

Idea dk:

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots\}$

$A_2 = \{\cancel{a_{1}}\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \ldots\}$

$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\}$

$f: \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$A_4 = \{a_{41}, \ldots$

$\square$

Příklady. 1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{[n_1, n_2] : n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$ je spočetná

$\parallel$

$\bigcup_{n_2=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{N} \times \{n_2\}}_{\text{spočetná}}$

2) $\mathbb{Q}^k = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}$ je spočetná pro $k \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{Q}^3 = \{[q_1, q_2, q_3], q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q}\}$ MI přes k

$k \rightsquigarrow k+1$

$\mathbb{Q}^k \times \mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}^k \times \{q_i\}$ spočetné.

$\{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$

2. Posloupnosti

2.1. Úvod

Definice Jestliže ke každému $n \in \mathbb{N}$ je přiřazeno $a_n \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ je posloupnost reálných čísel.

Příklady: (i) $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\}$

(ii) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 8, \dots\}$

(iii) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$

rekurentně zadaná posloupnost.

Def Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je:

neklesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_{n+1}$,

nerostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq a_{n+1}$,

klesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n > a_{n+1}$,

rostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n < a_{n+1}$.

Př: $\{\frac{1}{n}\}$

$\{2^n\}$

3-6

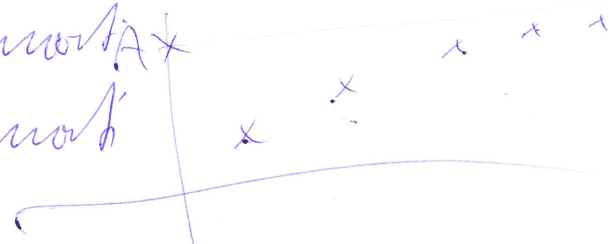
Definice Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, jestliže množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Analogicky definujeme omezenost shora a omezenost zdola.

$\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$

$\{2^n\}$

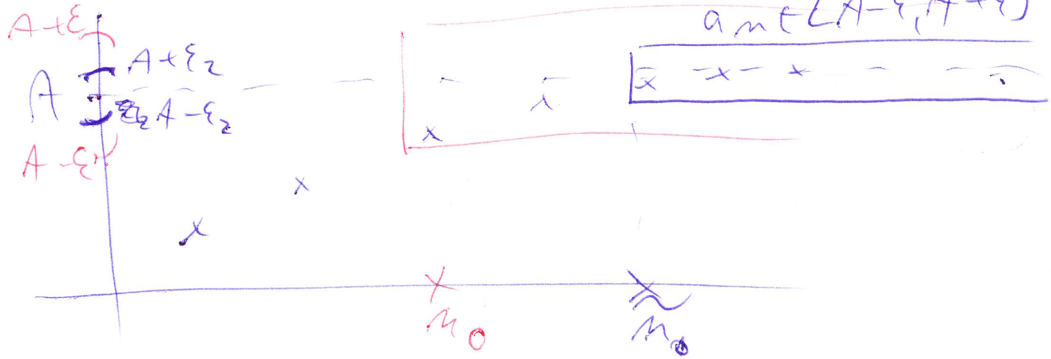
2.2. Vlastní limita ~~posloupnosti~~ posloupnosti

Def Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekneme, že A je (vlastní) limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže



$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$$

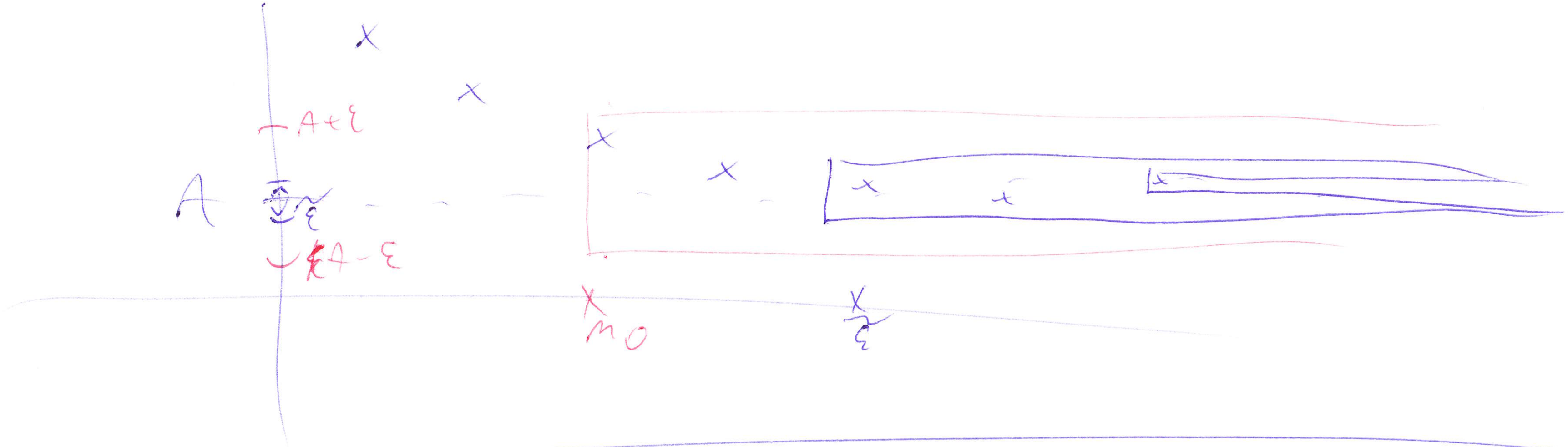
Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.



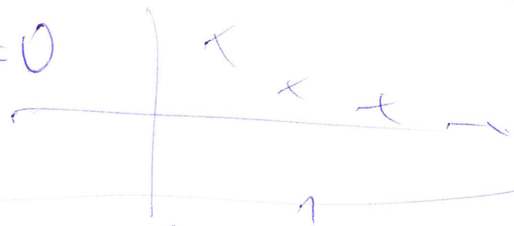
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \quad \ldots \quad \forall \varepsilon > 0 \ (\cancel{\varepsilon\in\mathbb{R}}) \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}: \ |a_n - A| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$



Příklad: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad a_n = \frac{1}{n}, \ A = 0$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0: \ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

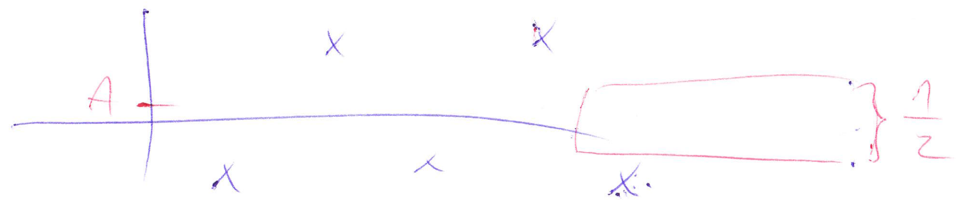
$\boxed{\Updownarrow \ \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n}$

K zadanému $\varepsilon > 0$ volme $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \qquad [x] \leq x < [x] + 1$

Pak $\forall n \geq n_0$ platí $\quad n \geq \underbrace{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1}_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \underline{\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon}$

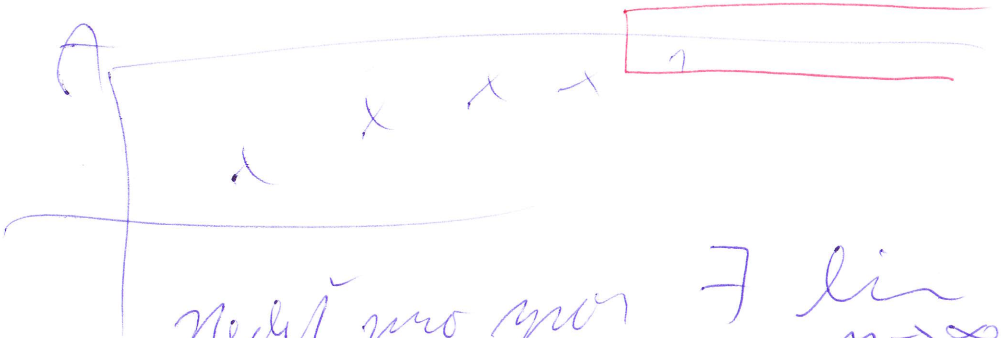
2) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$

nemá limitu



$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0: |a_n-A|<\varepsilon$

$\exists \varepsilon>0\ \forall n_0\in\mathbb{N}\ \exists n\ge n_0$ $\quad |a_n-A|\ge\varepsilon$



Nechť pro spor $\exists \lim_{n\to\infty}(-1)^n = A$

BÚNO $A\ge 0$. (pro $A\le 0$ analogicky)

Nechť $\varepsilon=\frac{1}{4}$ a nechť $n_0\in\mathbb{N}$. Zvolme $n\ge n_0$ liché

pak $a_n=(-1)^n=-1$ a $|a_n-A|=$

$=|A-a_n|=|A-(-1)|=|A+1|=A+1\overset{A\ge 0}{\ge}\frac{1}{4}=\varepsilon$