Požadavky k ústní části zkoušky
Aplikovaná matematika IV – NMAF074
LS 2017/18

(přednášející M. Rokyta)

Definice

Definujte pojmy z níže uvedeného seznamu. U každé definice se bude posuzovat jak přesnost, tak porozumění (tj. můžu se ptát na různé příklady, které definici ilustrují nebo takové můžu sám dát a ptát se, jestli splňují danou definici apod.)

---

(1) Definujte pojem reálného a komplexního trigonometrického polynomu, reálné a komplexní trigonometrické řady.
(2) Definujte prostory $L^(a, b)$, $\mathcal{P}_p$.
(3) Definujte pojem reálné a komplexní Fourierovy řady, součtu Fourierovy řady.
(4) Definujte pojem po částech hladké funkce z $\mathcal{P}_p$.

---

(5) Definujte pojem cauchyovské posloupnosti v unitárním prostoru, úplnosti unitárního prostoru, definujte pojem Hilbertova prostoru a uveďte příklady.
(6) Definujte Lebesgueovy a váhové Lebesgueovy prostory, definujte pojem váhy.
(7) Definujte pojem úplného a maximálního ortogonálního systému v Hilbertově prostoru.
(8) Popište Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces.
(9) Definujte pojem abstraktní Fourierovy řady podle ortogonálního systému.

---

(10) Definujte pojem komplexní derivace, holomorfní funkce na otevřené množině a na obené množině.
(11) Definujte pojem komplexní primitivní funkce.
(12) Definujte pojmy: mocninná řada, zobecněná mocninná řada, hlavní a regulární část zobecněné mocninné řady, Taylorova a Laurentova řada v $\mathbb{C}$.
(13) Definujte izolovanou singularitu, klasifikujte izolované singularity. Definujte násobnost pólu. Definujte reziduum.

---

(14) Definujte dopřednou a zpětnou Fourierovu transformaci funkce, pojem Fourierova vzoru a obrazu.
(15) Definujte pojem funkce rychle klesající v nekonečnu.
(16) Definujte pojem konvoluce funkcí a uveďte příklad.

---

(17) Definujte pojem derivace podle multiindexu, definujte co je obecná PDR a systém PDR, řád PDR a řád systému PDR.
(18) Definujte pojem stacionární a evoluční PDR, definujte pojem lineární, semilineární, kvazilineární a nelineární PDR.
(19) Napište, jak vypadají tyto PDR: Laplaceova, Laplaceova-Poissonova, Helmholtzova, rovnice vedení tepla, vlnová rovnice, rovnice lineárního transportu.
(20) Definujte, co se rozumí pod pojmem kanonický tvar lineární rovnice PDR 2. řádu, definujte pojem eliptické, hyperbolické a parabolické rovnice 2. řádu.
(21) Definujte pojem Dirichletovy a Neumannovy okrajové podmínky (resp. úlohy) pro rovnici vedení tepla v prvním kvadrantu a na intervalu.
(22) Definujte pojem Dirichletovy, Neumannovy a smíšené okrajové podmínky pro Laplaceovu-Poissonovu rovnici.

Věty a tvrzení

Všechny níže uvedené věty a tvrzení pečlivě zformulujte. Důkazy (**zhruba v rozsahu přednášky**) budu požadovat **pouze u těch vět a tvrzení**, u kterých je to níže výslovně uvedeno. Jinak budu vždy vyžadovat pouze dobré porozumění vět, a situací, na které se věty aplikují.

Za tvrzeními a větami je uvedeno číslo, které odpovídá číslování tvrzení a vět v učebním textu, který je k dispozici na webu. U některých vět a tvrzení vám mohu dát (lehký) příklad, na kterém budete použití dané věty nebo pravidla ilustrovat.

---

(1) Formulujte a **dokažte** lemma o integrálech ze sinů, kosinu a exponenciál (Lemma 16.1)
(2) Formulujte větu o tvaru sinových a kosinových Fourierových koeficientů (Věta 16.2) a **ukažte**, jak se tento tvar odvodí.
(3) Formulujte větu o tvaru exponenciálních Fourierových koeficientů (Věta 16.3) a **ukažte**, jak se tento tvar odvodí.
(4) Formulujte Riemann-Lebesgueovo lemma (Věta 16.6)
(5) Formulujte větu o jednoznačnosti Fourierových řad (Věta 16.8)
(6) Formulujte Carlesonovu větu (Věta 16.9)
(7) Formulujte větu o Fourierově řadě po částech hladké funkce z $\mathcal{P}_p$ (Věta 16.10)
(8) Formulujte větu o Parsevalově rovnosti pro řady sinů, kosinů a exponenciál (Věta 16.11)
(9) Formulujte větu o derivování Fourierových řad (Věta 16.12)
(10) Formulujte větu o integrování Fourierových řad (Věta 16.13)

---

(11) Formulujte větu o tvaru Fourierových koeficientů v Hilbertově prostoru (Věta 17.1) a **naznačte**, jak se odvodí.
(12) Formulujte větu o Besselově nerovnosti a Parsevalově rovnosti (Věta 17.2)
(13) Formulujte větu o ekvivalentních podmínkách, kdy je každý prvek roven součtu své Fourierovy řady a definujte všechny pojmy v ní obsažené (Věta 17.3) [Vynechejte pojem Schauderovy báze a odpovídajícího tvrzení o ní.]
(14) Popište (stručně, v principu) metody, jakými lze získat ortogonální systém polynomů v prostorech s vahou.
(15) Formulujte větu o okrajové úloze a úplném OG systému polynomů (Věta 17.7)

---

(16) Formulujte **a naznačte odvození** Caychy-Riemannových podmínek (Věta 18.1)
(17) Formulujte **a naznačte odvození** lemmatu o souvislosti holomorfních a harmonických funkcí (Lemma 18.2)
(18) Formulujte lemma o integrálu z funkce, která má primitivní funkci (Lemma 18.3)
(19) Formulujte větu o křivkovém integrálu a primitivní funkci (Věta 18.4)
(20) Formulujte Cauchyovu větu pro hvězdovitou množinu (Věta 18.5) včetně definice a příkladů hvězdovité množiny.
(21) Formulujte větu o Cauchyově vzorci (Věta 18.6).
(22) Formulujte větu o mocninné řadě v $\mathbb{C}$ (Věta 18.7) a o Taylorově řadě v $\mathbb{C}$ (Věta 18.8).
(23) Formulujte větu o zobecněné mocninné řadě v $\mathbb{C}$ (Věta 18.9) a o Laurentově řadě v $\mathbb{C}$ (Věta 18.10).
(24) Formulujte větu o odstranitelné singularitě (Věta 18.11).
(25) Formulujte větu o pólech (Věta 18.12).
(26) Formulujte větu o podstatné singularitě (Věta 18.13).
(27) Formulujte **a naznačte odvození** pravidel pro výpočet reziduí (Věta 18.14).
(28) Formulujte reziduovou větu (Věta 18.15).
(29) Formulujte lemma o velkých obloucích (Jordanovo lemma) (Lemma 18.16).
(30) Formulujte lemma o malých obloucích (Lemma 18.17).
(31) Formulujte větu o jednoznačnosti (Věta 18.18) a její důsledek (Důsledek 18.19).
(32) Spočtěte na požádání siny, kosiny, exponenciály, komplexní logaritmus nebo obecnou mocninu či odmocninu v komplexním oboru.

---

(33) Formulujte větu o Fourierově transformaci v $\mathbb{R}^3$ (Věta 19.2).

(34) Formulujte větu o posunutí a škálování ve Fourierově transformaci (Věta 19.3).
(35) Formulujte větu o inverzi pro Fourierovu transformaci č. I (na $\mathscr{S}$ – Věta 19.4)
(36) Formulujte větu o inverzi pro Fourierovu transformaci č. II (na L^1 – Věta 19.5)
(37) Formulujte větu o základní vlastnosti konvoluce (Věta 19.6) a o vztahu F.T. a konvoluce (Věta 19.7).
(38) Formulujte větu o vztahu F.T. a derivace pro funkce (Věta 19.8). **Naznačte důkaz alespoň jednoho ze vzorců.**

---

(39) Formulujte větu o řešení rovnice vedení tepla (Věta 20.1).
(40) Formulujte větu o řešení rovnice vedení tepla na tyči (Věta 20.2).
(41) Formulujte větu o d'Alembertově vzorci (Věta 20.3) a **naznačte odvození alespoň jednoho z členů, obsahujících** g_0**,** g_1.
(42) Formulujte větu o řešení Poissonovy rovnice v $\mathbb{R}^m$ (Věta 20.6).
(43) Formulujte větu o jednoznačnosti řešení Dirichletovy úlohy v Ω (Věta 20.7).
(44) Formulujte větu o řešení Dirichletovy úlohy na horní polorovině (Věta 20.8).
(45) Formulujte alespoň jednu ze čtyř vět o řešení Dirichletovy úlohy na kruhu a na vnějšku kruhu (Věta 20.9, Věta 20.10, Věta 20.11, Věta 20.12).
(46) Formulujte Liouvilleovu větu (Věta 20.13).
(47) Formulujte větu o průměru (Věta 20.16).
(48) Formulujte princip maxima a minima (Věta 20.17).
(49) Formulujte větu o regularitě (Věta 20.18).

M. Rokyta, 21.5.2018