$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\, \partial_{x_i} \partial_{x_j} u \qquad = f \qquad u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,,\ d = 2$$

$$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$$

$$a_{xx}\, \partial_x^2 u + \underbrace{a_{xy}\, \partial_x \partial_y u + a_{yx}\, \partial_y \partial_x u}_{\substack{\parallel\ a_{xy} = a_{yx} \\ 2 a_{xy}\, \partial_x \partial_y u}} + a_{yy}\, \partial_y^2 u \quad = \dots$$

$$a\, \partial_x^2 u + b\, \partial_x \partial_y u + c\, \partial_y^2 u \qquad = \dots$$

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$ reálná, symetrická $\Rightarrow$ diagonalizovatelná

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - \lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - \frac{b^2}{4} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4}$$

má reálné kořeny označme je λ_1, λ_2

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 = ac - \frac{b^2}{4} \quad \left(= \frac{1}{4}(4ac - b^2) \right)$$

Pokud: $4ac - b^2 > 0$ pak λ_1 a λ_2 mají stejná znaménka

$\longrightarrow$ rce je eliptická

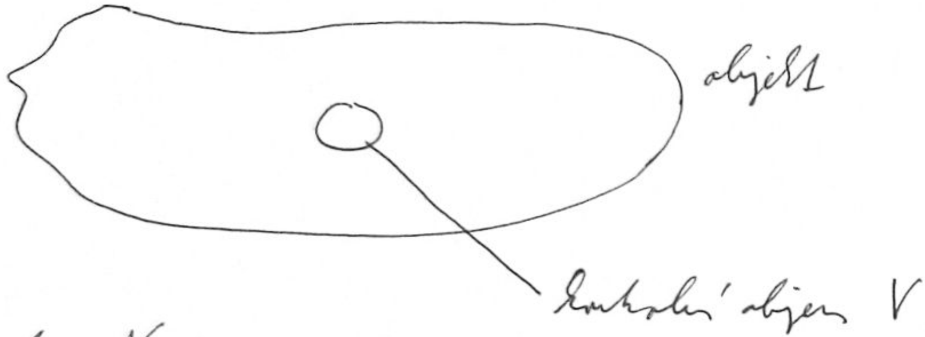
$4ac - b^2 < 0$ λ_1 a λ_2 mají opačná znaménka

$\longrightarrow$ rce hyperbolická

$4ac - b^2 = 0$ $\longrightarrow$ buď λ_1 nebo λ_2 je nula

$\longrightarrow$ rce je parabolická

Rovnice vedení tepla



bilance tepla v V

teplo ve V v čase t : $\int_V c(x)\rho(x)u(x,t)\,dx$

změna tepla ve V v čase t : $\frac{d}{dt}\int_V c(x)\rho(x)u(x,t)\,dx$

$$= \int_V c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx$$

jaké mechanismy mění teplo ve V:

→ vznik tepla – např. chemické reakce – popsáno pomocí $f(x)$

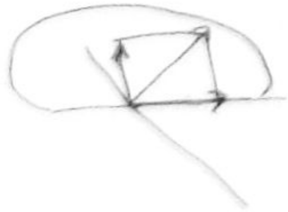
→ $\int_V f(x,t)\,dx$

→ odtok (přítok) tepla hranicí V

tok tepla $q(x,t)$

$$\int_{\partial V} q(x,t)\cdot n(x)\,dS(x)$$

vnější normála k V



$$\frac{d}{dt}\int_V c(x)\rho(x)u(x,t)\,dx = -\int_{\partial V} q(x,t)n(x)\,dS(x) + \int_V f(x,t)\,dx$$

$$\int_{\partial V} q(x,t)n(x)\,dS(x) = \int_V \operatorname{div} q(x,t)\,dx$$

$q(x,t) = -k(x,t,u)\nabla u(x,t)$ | $-\int_V \operatorname{div} q(x,t)\,dx$

Význam ∇u:

směrové derivace u ve směru $V \in \mathbb{S}^d$: $\|V\| = 1$:

$$D_V u = (\nabla u, V) \quad \text{je max.} \quad V = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$$

$$\Rightarrow \int_V c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx = \int_V \operatorname{div}\left(k(x,t,u(x,t))\nabla u(x,t)\right)dx + \int_V f(x,t)\,dx$$

$\forall V$ libovolný objem

$$\Rightarrow \quad c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \operatorname{div}\left(k(x,t,u(x,t))\nabla u(x,t)\right) + f(x,t)$$

$k(15)$: $\operatorname{div}\nabla u = \Delta u$

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$$

fundamentální řešení RVT

Odvození fundamentálního řešení RVT

v x: $\partial_t u - a^2 \Delta u = f$ aplikujeme FT v $x \in \mathbb{R}^m$

g_0 poč. podm. $U = \hat{u}$; $U = U(\xi, t)$

$$\partial_t U + a^2 4\pi^2 |\xi|^2 U = \hat{f} \qquad \widehat{\Delta u} = \sum_j \widehat{\partial_{x_j}\partial_{x_j} u} = \sum_j (2\pi i \xi_j)^2 U$$

V 4.8

v t: $\partial_t U + a^2 4\pi^2 |\xi|^2 U = \hat{f}$ Integrační faktor:

$$\exp\left(\int a^2 4\pi^2 |\xi|^2 \, dt\right) = e^{4\pi^2 a^2 |\xi|^2 t}$$

$$\partial_t \left(U e^{4\pi^2 a^2 |\xi|^2 t}\right) = \hat{f}(\xi, t)\, e^{4\pi^2 a^2 |\xi|^2 t}$$

$$U(\xi, t)\, e^{4\pi^2 a^2 |\xi|^2 t} - \underbrace{U(\xi, 0)}\, \underbrace{e^{4\pi^2 a^2 |\xi|^2 \cdot 0}}_{1} = \int_0^t \hat{f}(\xi, s)\, e^{4\pi^2 a^2 |\xi|^2 s} \, ds$$

lze spočítat z poč. podm.

$= \hat{u}(\xi, 0) = \hat{g}_0(\xi)$ .... my $g_0 = 0 \Rightarrow U(\xi, 0) = 0$.

$$U(\xi, t) = \int_0^t \hat{f}(\xi, s)\, e^{4\pi^2 a^2 |\xi|^2 (s-t)} \, ds$$

v ξ: $u(x, t) = \check{U}(x, t) = \int_0^t \left(\hat{f}(\xi, s) \cdot e^{4\pi^2 a^2 |\xi|^2 (s-t)}\right)^{\vee} ds$

$$= \int_0^t f *_x \left(e^{4\pi^2 a^2 |\xi|^2 (s-t)}\right)^{\vee} (x, s) \, ds$$

$$\left(e^{4\pi^2 a^2|\xi|^2(s-t)}\right)^{\vee} = \left(e^{4\pi^2 a^2|\xi|^2(s-t)}\right)^{\wedge} =$$

$$\left(e^{-\pi\left(2\sqrt{\pi}a|\xi|\right)^2\left(\sqrt{t-s}\right)^2}\right)^{\wedge} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-s)}^{\,m}}\, e^{-\pi\frac{|x|^2}{4\pi a^2(t-s)}} = (*)$$

Pozn: $$\widehat{f(\alpha x)}(\xi) = \frac{1}{|\alpha|^m}\,\hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$$

$$\alpha := 2\sqrt{\pi}a\sqrt{t-s} = \sqrt{4\pi a^2(t-s)}$$

$$f(X) = e^{-\pi|X|^2}$$

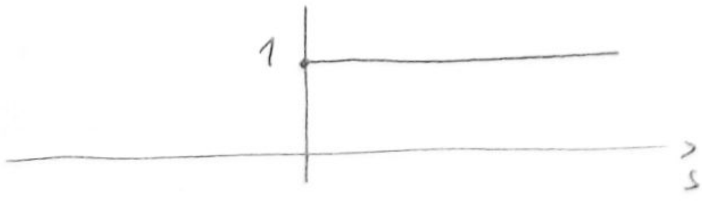
$$(*) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-s)}^{\,m}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4a^2(t-s)}}$$

$\overline{v}(x,t)$:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} f(y,s)\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-s)}^{\,m}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}}\,dy\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^m} f(y,s)\,Y(s)\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-s)}^{\,m}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}}\,Y(t-s)\,dy\,ds$$

kde $Y(s) := \chi_{(0,+\infty)}(s)$



$$u(x,t) = \left(fY *_{x,t} G\right)(x,t), \text{ kde } G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}^{\,m}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.$$

Řešení pro $f \equiv 0$ a g_0 nenulové!

$$U(\xi,t) = \hat{g}_0(\xi)\, e^{-4\pi^2 a^2 |\xi|^2 t} \qquad (\text{aplikujeme } \mathcal{F}^{-1})$$

$$u(x,t) = (g_0 * G)(x,t), \quad t > 0.$$

Řešení RVT pro f, g_0 nenulové napíšeme jako součet

$u = u_1 + u_2$; kde u_1 řeší RVT s f a poč. podm. $= 0$

u_2 řeší RVT s pravou stranou $= 0$ a g_0

$$\partial_t u - \Delta u = \underbrace{\partial_t u_1 - \Delta u_1}_{= f} + \underbrace{\partial_t u_2 - \Delta u_2}_{= 0} = f$$

$$u(x,0) = \underbrace{u_1(x,0)}_{= 0} + \underbrace{u_2(x_2,0)}_{g_0} = g_0$$

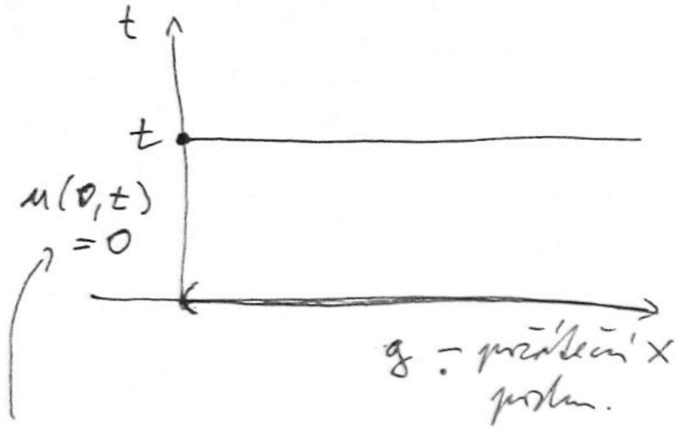
$\to$ princip superpozice

DÚ: Ukažte, že $\int_{\mathbb{R}^n} G(x,t)\,dx = 0 \quad \forall t > 0$

Nápověda: Víme: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$; $\xrightarrow{\text{Fubini}}$ $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = (\sqrt{\pi})^n$

a pak věta o substituci.

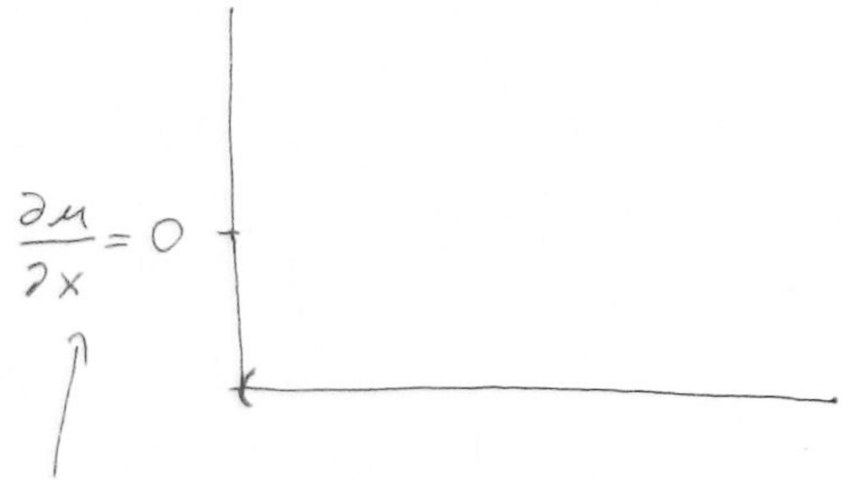
$$u_t - a^2 \Delta u = g$$



v bodě x = 0 regulujeme teplotu na u = 0

homogenní Dirichletova okrajová podm.

řešení: liché rozšíření



v bodě x = 0: izolujeme tepelně materiál

Neumannova okrajová podm.

řešení: sudé rozšíření g

řešíme na $x \in [a,b]$