

3. Funkce komplexní proměnné

Aplikovaná matematika IV, NMAF074

NMAF074

LS 2019/20

pro přednášku v roce 2017/18 připravil
M. Rokyta

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$$

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,

$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,

$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}} \dots$ goniometrický tvar z

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,

$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z

φ ... **argument** z ($\arg z$)

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z

φ ... **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!)

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z

φ ... **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!)

$z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy$,

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z

φ ... **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!)

$z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z

φ ... **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!)

$z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z|e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z

φ ... **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!)

$z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Moivreova věta:

Opakování, značení \mathbb{C} - komplexní rovina $z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ $z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z $z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z φ ... **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!) $z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ Moivreova věta: $\underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}_{(e^{i\varphi})^n} = \underbrace{\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)}_{e^{in\varphi}}$

Opakování, značení \mathbb{C} - komplexní rovina $z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ $z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z $z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z φ ... **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!) $z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ Moivreova věta: $\underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}_{(e^{i\varphi})^n} = \underbrace{\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)}_{e^{in\varphi}}$
 $\implies |z^n|$

Opakování, značení \mathbb{C} - komplexní rovina $z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z , $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ $z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z $z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z φ ... **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!) $z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ Moivreova věta: $\underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}_{(e^{i\varphi})^n} = \underbrace{\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)}_{e^{in\varphi}}$
 $\implies |z^n| = |(|z| e^{i\varphi})^n|$

Opakování, značení \mathbb{C} - komplexní rovina $z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ $z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z $z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z φ ... **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!) $z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ Moivreova věta: $\underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}_{(e^{i\varphi})^n} = \underbrace{\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)}_{e^{in\varphi}}$
 $\implies |z^n| = |(|z| e^{i\varphi})^n| = |z|^n \underbrace{|e^{in\varphi}|}_{=1}$

Opakování, značení \mathbb{C} - komplexní rovina $z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ $z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z $z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z φ ... **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!) $z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ Moivreova věta: $\underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}_{(e^{i\varphi})^n} = \underbrace{\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)}_{e^{in\varphi}}$
 $\implies |z^n| = |(|z| e^{i\varphi})^n| = |z|^n \underbrace{|e^{in\varphi}|}_{=1} = |z|^n$

Opakování, značení

\mathbb{C} - komplexní rovina

$z \in \mathbb{C} \implies z = x + iy$... algebraický tvar z ,
 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}$... goniometrický tvar z

$z \in \mathbb{C} \implies z = |z| e^{i\varphi}$... exponenciální tvar z

φ ... **argument** z ($\arg z$) (není určen jednoznačně!)

$z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Moivreova věta: $\underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}_{(e^{i\varphi})^n} = \underbrace{\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)}_{e^{in\varphi}}$

$$\implies |z^n| = |(|z| e^{i\varphi})^n| = |z|^n \underbrace{|e^{in\varphi}|}_{=1} = |z|^n$$

$$|e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| = e^{\operatorname{Re} z}$$

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

$$\blacksquare z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty,$$

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

$$\blacksquare z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty, \quad z_n \rightarrow \infty \iff 1/z_n \rightarrow 0$$

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty, \quad z_n \rightarrow \infty \iff 1/z_n \rightarrow 0$
- $z_n = x_n + iy_n \rightarrow a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \rightarrow a \text{ \& } y_n \rightarrow b$

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty, \quad z_n \rightarrow \infty \iff 1/z_n \rightarrow 0$
- $z_n = x_n + iy_n \rightarrow a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \rightarrow a \ \& \ y_n \rightarrow b$

Pozor na zásadní rozdíl:

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty, \quad z_n \rightarrow \infty \iff 1/z_n \rightarrow 0$
- $z_n = x_n + iy_n \rightarrow a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \rightarrow a \ \& \ y_n \rightarrow b$

Pozor na zásadní rozdíl:

Komplexní funkce **reálné proměnné**, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty, \quad z_n \rightarrow \infty \iff 1/z_n \rightarrow 0$
- $z_n = x_n + iy_n \rightarrow a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \rightarrow a \ \& \ y_n \rightarrow b$

Pozor na zásadní rozdíl:

Komplexní funkce **reálné proměnné**, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + i \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty, \quad z_n \rightarrow \infty \iff 1/z_n \rightarrow 0$
- $z_n = x_n + iy_n \rightarrow a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \rightarrow a \ \& \ y_n \rightarrow b$

Pozor na zásadní rozdíl:

Komplexní funkce **reálné proměnné**, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + i \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$
- $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x), \quad \int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx$

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty, \quad z_n \rightarrow \infty \iff 1/z_n \rightarrow 0$
- $z_n = x_n + iy_n \rightarrow a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \rightarrow a \ \& \ y_n \rightarrow b$

Pozor na zásadní rozdíl:

Komplexní funkce **reálné proměnné**, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + i \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$
- $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x), \quad \int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx$

Komplexní funkce **komplexní proměnné**, tj. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty, \quad z_n \rightarrow \infty \iff 1/z_n \rightarrow 0$
- $z_n = x_n + iy_n \rightarrow a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \rightarrow a \ \& \ y_n \rightarrow b$

Pozor na zásadní rozdíl:

Komplexní funkce **reálné proměnné**, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + i \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$
- $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x), \quad \int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx$

Komplexní funkce **komplexní proměnné**, tj. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(z) = f_1(z) + if_2(z), \quad z = x + iy,$

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty, \quad z_n \rightarrow \infty \iff 1/z_n \rightarrow 0$
- $z_n = x_n + iy_n \rightarrow a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \rightarrow a \ \& \ y_n \rightarrow b$

Pozor na zásadní rozdíl:

Komplexní funkce **reálné proměnné**, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + i \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$
- $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x), \quad \int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx$

Komplexní funkce **komplexní proměnné**, tj. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(z) = f_1(z) + if_2(z), \quad z = x + iy, \quad f(z) \approx f_1(x, y) + if_2(x, y)$

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty, \quad z_n \rightarrow \infty \iff 1/z_n \rightarrow 0$
- $z_n = x_n + iy_n \rightarrow a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \rightarrow a \ \& \ y_n \rightarrow b$

Pozor na zásadní rozdíl:

Komplexní funkce **reálné proměnné**, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + i \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$
- $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x), \quad \int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx$

Komplexní funkce **komplexní proměnné**, tj. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(z) = f_1(z) + if_2(z), \quad z = x + iy, \quad f(z) \approx f_1(x, y) + if_2(x, y)$
- Jaký je vztah (například) mezi $f'(z)$ a $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$?

Rozšířená komplexní rovina \equiv sféra: $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Zavádíme **jediné** komplexní nekonečno.

- $z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow +\infty, \quad z_n \rightarrow \infty \iff 1/z_n \rightarrow 0$
- $z_n = x_n + iy_n \rightarrow a + ib \in \mathbb{C} \iff x_n \rightarrow a \ \& \ y_n \rightarrow b$

Pozor na zásadní rozdíl:

Komplexní funkce **reálné proměnné**, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + i \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$
- $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x), \quad \int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx$

Komplexní funkce **komplexní proměnné**, tj. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

- $f(z) = f_1(z) + if_2(z), \quad z = x + iy, \quad f(z) \approx f_1(x, y) + if_2(x, y)$
- Jaký je vztah (například) mezi $f'(z)$ a $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}$? A co integrál? $dz = d(x + iy)$?

(Konec opakování.)

(Konec opakování.)

Definice

Nechť pro $w \in \mathbb{C}$ je funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definována alespoň na nějakém okolí $\mathcal{U}^\delta(w) := \{z \in \mathbb{C}, |z - w| < \delta\}$.

(Konec opakování.)

Definice

Nechť pro $w \in \mathbb{C}$ je funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definována alespoň na nějakém okolí $\mathcal{U}^\delta(w) := \{z \in \mathbb{C}, |z - w| < \delta\}$. Pokud existuje (vlastní) limita

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = A \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

říkáme, že f má v bodě w (komplexní) derivaci A . Značíme $\frac{df}{dz}(w)$ nebo $f'(w)$.

(Konec opakování.)

Definice

Nechť pro $w \in \mathbb{C}$ je funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definována alespoň na nějakém okolí $\mathcal{U}^\delta(w) := \{z \in \mathbb{C}, |z - w| < \delta\}$. Pokud existuje (vlastní) limita

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = A \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

říkáme, že f má v bodě w (komplexní) derivaci A . Značíme $\frac{df}{dz}(w)$ nebo $f'(w)$.

Pozn. Komplexní derivace je komplexní číslo.

(Konec opakování.)

Definice

Nechť pro $w \in \mathbb{C}$ je funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definována alespoň na nějakém okolí $\mathcal{U}^\delta(w) := \{z \in \mathbb{C}, |z - w| < \delta\}$. Pokud existuje (vlastní) limita

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = A \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

říkáme, že f má v bodě w (komplexní) derivaci A . Značíme $\frac{df}{dz}(w)$ nebo $f'(w)$.

Pozn. Komplexní derivace je komplexní číslo. Nekonečnou derivaci nedefinujeme, v \mathbb{C} uvažujeme pouze konečné derivace.

Věta 3.1 (Cauchy-Riemannovy (C-R) podmínky)

- *Necht' existuje $f'(z)$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$.*

Věta 3.1 (Cauchy-Riemannovy (C-R) podmínky)

- *Necht' existuje $f'(z)$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$. Potom v $z = [x, y]$ platí tzv. C-R podmínky:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y). \quad (2)$$

Věta 3.1 (Cauchy-Riemannovy (C-R) podmínky)

- *Necht' existuje $f'(z)$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$. Potom v $z = [x, y]$ platí tzv. C-R podmínky:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y). \quad (2)$$

- *Bud'te $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ funkce třídy C^1 v bodě $[x, y]$, splňující v tomto bodě C-R podmínky (2).*

Věta 3.1 (Cauchy-Riemannovy (C-R) podmínky)

- *Necht' existuje $f'(z)$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$. Potom v $z = [x, y]$ platí tzv. C-R podmínky:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y). \quad (2)$$

- *Bud'te $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ funkce třídy C^1 v bodě $[x, y]$, splňující v tomto bodě C-R podmínky (2). Potom funkce $f(z) := f_1(x, y) + if_2(x, y)$ má v bodě $z = x + iy$ komplexní derivaci a platí*

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)$$

Věta 3.1 (Cauchy-Riemannovy (C-R) podmínky)

- Necht' existuje $f'(z)$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$. Potom v $z = [x, y]$ platí tzv. C-R podmínky:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y). \quad (2)$$

- Bud'te $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ funkce třídy \mathcal{C}^1 v bodě $[x, y]$, splňující v tomto bodě C-R podmínky (2). Potom funkce $f(z) := f_1(x, y) + if_2(x, y)$ má v bodě $z = x + iy$ komplexní derivaci a platí

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y). \quad (3)$$

Definice

- Řeknu, že funkce komplexní proměnné f je **holomorfní** (říkáme též **analytická**) **v bodě** $z \in \mathbb{C}$, pokud existuje okolí $\mathcal{U}(z)$ bodu z takové, že f má komplexní derivaci pro všechna $w \in \mathcal{U}(z)$.

Definice

- Řeknu, že funkce komplexní proměnné f je **holomorfní** (říkáme též **analytická**) **v bodě** $z \in \mathbb{C}$, pokud existuje okolí $\mathcal{U}(z)$ bodu z takové, že f má komplexní derivaci pro všechna $w \in \mathcal{U}(z)$.
- Bud' $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) v Ω** , pokud je f holomorfní v každém bodě Ω .

Definice

- Řeknu, že funkce komplexní proměnné f je **holomorfní** (říkáme též **analytická**) **v bodě** $z \in \mathbb{C}$, pokud existuje okolí $\mathcal{U}(z)$ bodu z takové, že f má komplexní derivaci pro všechna $w \in \mathcal{U}(z)$.
- Bud' $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) v Ω** , pokud je f holomorfní v každém bodě Ω . V takovém případě píšeme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Definice

- Řeknu, že funkce komplexní proměnné f je **holomorfní** (říkáme též **analytická**) **v bodě** $z \in \mathbb{C}$, pokud existuje okolí $\mathcal{U}(z)$ bodu z takové, že f má komplexní derivaci pro všechna $w \in \mathcal{U}(z)$.
- Bud' $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) v Ω** , pokud je f holomorfní v každém bodě Ω . V takovém případě píšeme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- Bud' $M \subset \mathbb{C}$ jakákoli množina.

Definice

- Řeknu, že funkce komplexní proměnné f je **holomorfní** (říkáme též **analytická**) **v bodě** $z \in \mathbb{C}$, pokud existuje okolí $\mathcal{U}(z)$ bodu z takové, že f má komplexní derivaci pro všechna $w \in \mathcal{U}(z)$.
- Bud' $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) v Ω** , pokud je f holomorfní v každém bodě Ω . V takovém případě píšeme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- Bud' $M \subset \mathbb{C}$ jakákoli množina. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) na M** ($f \in \mathcal{H}(M)$),

Definice

- Řeknu, že funkce komplexní proměnné f je **holomorfní** (říkáme též **analytická**) **v bodě** $z \in \mathbb{C}$, pokud existuje okolí $\mathcal{U}(z)$ bodu z takové, že f má komplexní derivaci pro všechna $w \in \mathcal{U}(z)$.
- Bud' $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) v Ω** , pokud je f holomorfní v každém bodě Ω . V takovém případě píšeme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- Bud' $M \subset \mathbb{C}$ jakákoli množina. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) na M** ($f \in \mathcal{H}(M)$), pokud existuje otevřená množina $\Omega \supset M$ taková, že $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Definice

- Řeknu, že funkce komplexní proměnné f je **holomorfní** (říkáme též **analytická**) **v bodě** $z \in \mathbb{C}$, pokud existuje okolí $\mathcal{U}(z)$ bodu z takové, že f má komplexní derivaci pro všechna $w \in \mathcal{U}(z)$.
- Bud' $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) v Ω** , pokud je f holomorfní v každém bodě Ω . V takovém případě píšeme $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- Bud' $M \subset \mathbb{C}$ jakákoli množina. Řeknu, že funkce f je **holomorfní (analytická) na M** ($f \in \mathcal{H}(M)$), pokud existuje otevřená množina $\Omega \supset M$ taková, že $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- Je-li $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, říkáme, že f je **celá** funkce.

Lemma 3.2 (souvislost holomorfních a harmonických funkcí)

- Necht' $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z))$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$,

Lemma 3.2 (souvislost holomorfních a harmonických funkcí)

- Necht' $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z))$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$,
 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$.

Lemma 3.2 (souvislost holomorfních a harmonických funkcí)

- Necht' $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z))$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$,
 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$. Potom

$$\Delta f_1 = 0, \quad \Delta f_2 = 0 \quad \forall \mathcal{U}(x, y),$$

tj. f_1 a f_2 jsou **harmonické** v $\mathcal{U}(x, y)$.

Lemma 3.2 (souvislost holomorfních a harmonických funkcí)

- Necht' $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z))$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$,
 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$. Potom

$$\Delta f_1 = 0, \quad \Delta f_2 = 0 \quad \forall \mathcal{U}(x, y),$$

tj. f_1 a f_2 jsou **harmonické** v $\mathcal{U}(x, y)$.

- Necht' $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$, $\Delta f = 0 \quad \forall \mathcal{U}(x, y)$.

Lemma 3.2 (souvislost holomorfních a harmonických funkcí)

- Necht' $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z))$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$,
 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$. Potom

$$\Delta f_1 = 0, \quad \Delta f_2 = 0 \quad \forall \mathcal{U}(x, y),$$

tj. f_1 a f_2 jsou **harmonické** v $\mathcal{U}(x, y)$.

- Necht' $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$, $\Delta f = 0 \quad \forall \mathcal{U}(x, y)$. Potom existují funkce $g, h \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$ takové, že $\Delta g = 0 = \Delta h \quad \forall \mathcal{U}(x, y)$,

Lemma 3.2 (souvislost holomorfních a harmonických funkcí)

- Necht' $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z))$, $z = x + iy$, $f = f_1 + if_2$,
 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$. Potom

$$\Delta f_1 = 0, \quad \Delta f_2 = 0 \quad \forall \mathcal{U}(x, y),$$

tj. f_1 a f_2 jsou **harmonické** v $\mathcal{U}(x, y)$.

- Necht' $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$, $\Delta f = 0 \quad \forall \mathcal{U}(x, y)$. Potom existují funkce $g, h \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}(x, y))$ takové, že $\Delta g = 0 = \Delta h \quad \forall \mathcal{U}(x, y)$, přičemž funkce $f + ig, h + if \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(z))$, $z = x + iy$.

Definice

Cestou nebo též **po částech hladkou křivkou** v \mathbb{C} rozumíme spojitě zobrazení $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, pro které existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, přičemž pro každé $j = 1, \dots, n$ je funkce φ třídy \mathcal{C}^1 na $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$.

Definice

Cestou nebo též **po částech hladkou křivkou** v \mathbb{C} rozumíme spojitě zobrazení $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, pro které existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, přičemž pro každé $j = 1, \dots, n$ je funkce φ třídy \mathcal{C}^1 na $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$.

Poznámka

Podobně jako v definici křivky v \mathbb{R}^n definujeme pojmy **geometrický obraz křivky** $\langle \varphi \rangle$,

Definice

Cestou nebo též **po částech hladkou křivkou** v \mathbb{C} rozumíme spojitě zobrazení $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, pro které existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, přičemž pro každé $j = 1, \dots, n$ je funkce φ třídy \mathcal{C}^1 na $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$.

Poznámka

Podobně jako v definici křivky v \mathbb{R}^n definujeme pojmy **geometrický obraz křivky** $\langle \varphi \rangle$, **počáteční bod křivky** $\varphi(a)$,

Definice

Cestou nebo též **po částech hladkou křivkou** v \mathbb{C} rozumíme spojitě zobrazení $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, pro které existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, přičemž pro každé $j = 1, \dots, n$ je funkce φ třídy \mathcal{C}^1 na $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$.

Poznámka

Podobně jako v definici křivky v \mathbb{R}^n definujeme pojmy **geometrický obraz křivky** $\langle \varphi \rangle$, **počáteční bod křivky** $\varphi(a)$, **koncový bod křivky** $\varphi(b)$,

Definice

Cestou nebo též **po částech hladkou křivkou** v \mathbb{C} rozumíme spojitě zobrazení $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, pro které existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, přičemž pro každé $j = 1, \dots, n$ je funkce φ třídy \mathcal{C}^1 na $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$.

Poznámka

Podobně jako v definici křivky v \mathbb{R}^n definujeme pojmy **geometrický obraz křivky** $\langle \varphi \rangle$, **počáteční bod křivky** $\varphi(a)$, **koncový bod křivky** $\varphi(b)$, **uzavřená křivka** ($\varphi(a) = \varphi(b)$),

Definice

Cestou nebo též **po částech hladkou křivkou** v \mathbb{C} rozumíme spojitě zobrazení $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, pro které existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, přičemž pro každé $j = 1, \dots, n$ je funkce φ třídy \mathcal{C}^1 na $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$.

Poznámka

Podobně jako v definici křivky v \mathbb{R}^n definujeme pojmy **geometrický obraz křivky** $\langle \varphi \rangle$, **počáteční bod křivky** $\varphi(a)$, **koncový bod křivky** $\varphi(b)$, **uzavřená křivka** ($\varphi(a) = \varphi(b)$), **opačná křivka** $\ominus \varphi$,

Definice

Cestou nebo též **po částech hladkou křivkou** v \mathbb{C} rozumíme spojitě zobrazení $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, pro které existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, přičemž pro každé $j = 1, \dots, n$ je funkce φ třídy \mathcal{C}^1 na $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$.

Poznámka

Podobně jako v definici křivky v \mathbb{R}^n definujeme pojmy **geometrický obraz křivky** $\langle \varphi \rangle$, **počáteční bod křivky** $\varphi(a)$, **koncový bod křivky** $\varphi(b)$, **uzavřená křivka** ($\varphi(a) = \varphi(b)$), **opačná křivka** $\ominus\varphi$, **součet křivek** $\varphi \oplus \psi$.

Příklad 1

Kladně orientovanou kružnicí o středu w a poloměru r nazýváme křivku

Příklad 1

Kladně orientovanou kružnicí o středu w a poloměru r nazýváme křivku $\varphi(t) = w + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Příklad 1

Kladně orientovanou kružnicí o středu w a poloměru r nazýváme křivku $\varphi(t) = w + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. **Orientovanou úsečkou $\langle w, z \rangle$, $w, z \in \mathbb{C}$, nazýváme křivku**

Příklad 1

Kladně orientovanou kružnicí o středu w a poloměru r nazýváme křivku $\varphi(t) = w + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. **Orientovanou úsečkou $\langle w, z \rangle$, $w, z \in \mathbb{C}$, nazýváme křivku $\varphi(t) = w + t(z - w)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.**

Příklad 1

Kladně orientovanou kružnicí o středu w a poloměru r nazýváme křivku $\varphi(t) = w + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. **Orientovanou úsečkou $\langle w, z \rangle$, $w, z \in \mathbb{C}$, nazýváme křivku $\varphi(t) = w + t(z - w)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.**

Definice

Řetězcem v \mathbb{C} nazýváme výraz tvaru $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n$, kde φ_j , $j = 1, \dots, n$, jsou cesty v \mathbb{C} .

Příklad 1

Kladně orientovanou kružnicí o středu w a poloměru r nazýváme křivku $\varphi(t) = w + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. **Orientovanou úsečkou $\langle w, z \rangle$, $w, z \in \mathbb{C}$, nazýváme křivku $\varphi(t) = w + t(z - w)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.**

Definice

Řetězcem v \mathbb{C} nazýváme výraz tvaru $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n$, kde φ_j , $j = 1, \dots, n$, jsou cesty v \mathbb{C} . Jsou-li všechny cesty φ_j , $j = 1, \dots, n$ uzavřené, nazýváme řetězec $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n$ **cyklem** v \mathbb{C} .

Definice (křivkový integrál v \mathbb{C})

Je-li φ cesta v \mathbb{C} a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **(křivkový) integrál funkce f podél φ** předpisem

$$\int_{\varphi} f = \int_{\varphi} f(z) dz := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt, \quad (4)$$

pokud integrál vpravo existuje (např. jako Lebesgueův).

Definice (křivkový integrál v \mathbb{C})

Je-li φ cesta v \mathbb{C} a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **(křivkový) integrál funkce f podél φ** předpisem

$$\int_{\varphi} f = \int_{\varphi} f(z) dz := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt, \quad (4)$$

pokud integrál vpravo existuje (např. jako Lebesgueův). Pro řetězec resp. cykl definujeme křivkový integrál jako součet integrálů přes jednotlivé cesty, které řetězec resp. cykl tvoří, má-li tento součet smysl.

Poznámka

- Je-li φ cesta v \mathbb{C} , je $L(\varphi) := \int_a^b |\varphi'(t)| dt$ číselně rovna její délce.

Poznámka

- Je-li φ cesta v \mathbb{C} , je $L(\varphi) := \int_a^b |\varphi'(t)| dt$ číselně rovna její délce.
- Hodnota křivkového integrálu v \mathbb{C} je komplexní číslo. Je-li φ cesta v \mathbb{C} , a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce, platí

$$\left| \int_{\varphi} f \right| \leq L(\varphi) \cdot \max_{z \in \langle \varphi \rangle} |f(z)|.$$

Poznámka

- Je-li φ cesta v \mathbb{C} , je $L(\varphi) := \int_a^b |\varphi'(t)| dt$ číselně rovna její délce.
- Hodnota křivkového integrálu v \mathbb{C} je komplexní číslo. Je-li φ cesta v \mathbb{C} , a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce, platí

$$\left| \int_{\varphi} f \right| \leq L(\varphi) \cdot \max_{z \in \langle \varphi \rangle} |f(z)|.$$

- Jsou-li níže uvedené integrály definovány, platí:

$$\int_{\ominus \varphi} f = - \int_{\varphi} f, \quad \int_{\varphi \oplus \psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f.$$

Definice

Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená množina a $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce. Funkci $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazvu **primitivní funkcí k f na G** , pokud platí $F'(z) = f(z)$ pro všechna $z \in G$. (Zde F' značí komplexní derivaci F).

Definice

Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená množina a $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce. Funkci $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazvu **primitivní funkcí k f na G** , pokud platí $F'(z) = f(z)$ pro všechna $z \in G$. (Zde F' značí komplexní derivaci F).

Lemma 3.3

Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená množina, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G , pak pro každou cestu $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow G$ platí

$$\int_{\varphi} f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Speciálně, je-li φ uzavřená cesta (resp. cykl), je $\int_{\varphi} f = 0$.

Věta 3.4 (primitivní funkce a křivkový integrál)

Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast v \mathbb{C} a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- *Existuje primitivní funkce k f v **celé** oblasti Ω .*

Věta 3.4 (primitivní funkce a křivkový integrál)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast v \mathbb{C} a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- *Existuje primitivní funkce k f v **celé** oblasti Ω .*
- *Křivkový integrál z f v Ω **nezávisí na cestě**, tj. kdykoli jsou $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \Omega$ a $\psi : \langle c, d \rangle \rightarrow \Omega$ dvě cesty takové, že $\varphi(a) = \psi(c)$, $\varphi(b) = \psi(d)$, pak $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.*

Věta 3.4 (primitivní funkce a křivkový integrál)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast v \mathbb{C} a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- Existuje primitivní funkce k f v **celé** oblasti Ω .
- Křivkový integrál z f v Ω **nezávisí na cestě**, tj. kdykoli jsou $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \Omega$ a $\psi : \langle c, d \rangle \rightarrow \Omega$ dvě cesty takové, že $\varphi(a) = \psi(c)$, $\varphi(b) = \psi(d)$, pak $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.
- Pro každou uzavřenou cestu φ v Ω je $\int_{\varphi} f = 0$.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{C}$ je **hvězdovitá**, pokud existuje takový bod $z \in M$, že pro každé $w \in M$ je úsečka $\langle z, w \rangle$ obsažena celá v M .

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{C}$ je **hvězdovitá**, pokud existuje takový bod $z \in M$, že pro každé $w \in M$ je úsečka $\langle z, w \rangle$ obsažena celá v M .

Věta 3.5 (Cauchyova věta (pro hvězdovitou množinu))

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina a φ uzavřená cesta v Ω . Je-li $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pak $\int_{\varphi} f = 0$, a tedy f má primitivní funkci v Ω .

Věta 3.6 (Cauchyův vzorec)

Bud' $K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ kruh v komplexní rovině a označme $\gamma_{z_0, r}(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ jeho kladně orientovaný obvod.

Věta 3.6 (Cauchyův vzorec)

Bud' $K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ kruh v komplexní rovině a označme $\gamma_{z_0, r}(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ jeho kladně orientovaný obvod. Necht' $f \in \mathcal{H}(\overline{K_r(z_0)})$ (tj. je holomorfní na otevřeném okolí tohoto kruhu).

Věta 3.6 (Cauchyův vzorec)

Bud' $K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ kruh v komplexní rovině a označme $\gamma_{z_0, r}(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ jeho kladně orientovaný obvod. Necht' $f \in \mathcal{H}(\overline{K_r(z_0)})$ (tj. je holomorfní na otevřeném okolí tohoto kruhu). Potom f má v $K_r(z_0)$ derivace všech řádů, a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $z \in K_r(z_0)$ platí

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw. \quad (5)$$

Věta 3.7 (mocninná řada v \mathbb{C})

Bud'te $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \dots$. Potom existuje $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ takové, že komplexní mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- **absolutně konverguje k holomorfní funkci f uvnitř kruhu**
 $K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\}$;

Věta 3.7 (mocninná řada v \mathbb{C})

Bud'te $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \dots$. Potom existuje $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ takové, že komplexní mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- **absolutně konverguje k holomorfní funkci f uvnitř kruhu $K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\}$;**
- **diverguje vně kruhu $K_R(z_0)$.**

Věta 3.7 (mocninná řada v \mathbb{C})

Bud'te $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \dots$. Potom existuje $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ takové, že komplexní mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- **absolutně konverguje k holomorfní funkci f uvnitř kruhu**
 $K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\}$;
- **diverguje vně kruhu $K_R(z_0)$.**

Přitom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ lze uvnitř $K_R(z_0)$ libovolněkrát derivovat člen po členu a platí

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (z - z_0)^{n-k} \quad \text{v } K_R(z_0).$$

Věta 3.8 (Taylorova řada v \mathbb{C})

Bud' $f \in \mathcal{H}(K_R(z_0))$ pro $R > 0$.

Věta 3.8 (Taylorova řada v \mathbb{C})

Bud' $f \in \mathcal{H}(K_R(z_0))$ pro $R > 0$. Potom existují $a_n \in \mathbb{C}$, že

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in K_R(z_0), \quad (6)$$

přičemž řada v (6) absolutně konverguje v $K_R(z_0)$.

Věta 3.8 (Taylorova řada v \mathbb{C})

Bud' $f \in \mathcal{H}(K_R(z_0))$ pro $R > 0$. Potom existují $a_n \in \mathbb{C}$, že

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in K_R(z_0), \quad (6)$$

přičemž řada v (6) absolutně konverguje v $K_R(z_0)$. Navíc je

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

a tedy řada (6) je Taylorovou řadou funkce f na kruhu $K_R(z_0)$.

Definice

- Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n = -1, -2, \dots$, definujeme

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{-1} a_n(z - z_0)^n$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro které existuje limita vpravo.

Definice

- Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n = -1, -2, \dots$, definujeme

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{-1} a_n(z - z_0)^n$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro které existuje limita vpravo.

- Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, definujeme **zobecněnou mocninnou řadu**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro které má součet vpravo smysl.

Definice

Bud'te $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, a bud' $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ zobecněná mocninná řada. Řadu $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$ nazýváme **hlavní část**, a řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ nazýváme **regulární část** zobecněné mocninné řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Věta 3.9 (zobecněná mocninná řada v \mathbb{C})

Bud'te $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Potom existují $r, R \in \langle 0, +\infty \rangle$, taková, že zobecněná mocninná řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

- *absolutně konverguje **k holomorfní funkci f** uvnitř mezikruží $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, r < |z - z_0| < R\}$;*

Věta 3.9 (zobecněná mocninná řada v \mathbb{C})

Bud'te $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Potom existují $r, R \in \langle 0, +\infty \rangle$, taková, že zobecněná mocninná řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

- *absolutně konverguje **k holomorfní funkci f** uvnitř mezikruží $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, r < |z - z_0| < R\}$;*
- *diverguje vně mezikruží $K_{r,R}(z_0)$.*

Věta 3.9 (zobecněná mocninná řada v \mathbb{C})

Bud'te $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Potom existují $r, R \in \langle 0, +\infty \rangle$, taková, že zobecněná mocninná řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

- absolutně konverguje ***k holomorfní funkci f*** uvnitř mezikruží $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, r < |z - z_0| < R\}$;
- diverguje vně mezikruží $K_{r,R}(z_0)$.

Přitom řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ lze uvnitř mezikruží $K_{r,R}(z_0)$ libovolněkrát derivovat člen po členu a platí

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1)(z - z_0)^{n-k} \quad \forall K_{r,R}(z_0).$$

Věta 3.10 (Laurentova řada v \mathbb{C})

Bud' $f \in \mathcal{H}(K_{r,R}(z_0))$ pro $R > r > 0$.

Věta 3.10 (Laurentova řada v \mathbb{C})

Bud' $f \in \mathcal{H}(K_{r,R}(z_0))$ pro $R > r > 0$. Potom existují $a_n \in \mathbb{C}$, že

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in K_{r,R}(z_0), \quad (8)$$

přičemž řada vpravo absolutně konverguje v mezikruží $K_{r,R}(z_0)$.

Věta 3.10 (Laurentova řada v \mathbb{C})

Bud' $f \in \mathcal{H}(K_{r,R}(z_0))$ pro $R > r > 0$. Potom existují $a_n \in \mathbb{C}$, že

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in K_{r,R}(z_0), \quad (8)$$

přičemž řada vpravo absolutně konverguje v mezikruží $K_{r,R}(z_0)$.
Navíc je

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, \varrho}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

kde $\gamma_{z_0, \varrho}(t) = z_0 + \varrho e^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je obvod kruhu o poloměru $\varrho \in (r, R)$.

Věta 3.10 (Laurentova řada v \mathbb{C})

Bud' $f \in \mathcal{H}(K_{r,R}(z_0))$ pro $R > r > 0$. Potom existují $a_n \in \mathbb{C}$, že

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in K_{r,R}(z_0), \quad (8)$$

přičemž řada vpravo absolutně konverguje v mezikruží $K_{r,R}(z_0)$. Navíc je

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, \varrho}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

kde $\gamma_{z_0, \varrho}(t) = z_0 + \varrho e^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je obvod kruhu o poloměru $\varrho \in (r, R)$. Řadu (8) nazýváme **Laurentovou** řadou funkce f na mezikruží $K_{r,R}(z_0)$.

Poznámka

Porovnáním Cauchyova vzorce (5) pro z_0 a $\gamma_{z_0, \rho}$, tj.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, \rho}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

a vzorce pro Laurentovy koeficienty (9). tj.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, \rho}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dostaneme

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Poznámka

Speciálním případem mezikruží je prstencové okolí bodu:

$$\mathcal{P}^r(a) = K_{0,r}(a) = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - a| < r\}.$$

Poznámka

Speciálním případem mezikruží je prstencové okolí bodu:

$\mathcal{P}^r(a) = K_{0,r}(a) = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - a| < r\}$. Je-li tedy

$f \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(a))$, lze ji podle předchozí věty rozvinout do Laurentovy řady na $\mathcal{P}(a)$.

Poznámka

Speciálním případem mezikruží je prstencové okolí bodu: $\mathcal{P}^r(a) = K_{0,r}(a) = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - a| < r\}$. Je-li tedy $f \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(a))$, lze ji podle předchozí věty rozvinout do Laurentovy řady na $\mathcal{P}(a)$. Této situaci tzv. izolované singularity se budeme věnovat v následujícím paragrafu podrobněji.

Definice

Bod $a \in \mathbb{C}$ nazvu **izolovanou singularitou** funkce f , pokud $f \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(a))$.

Definice

Bod $a \in \mathbb{C}$ nazvu **izolovanou singularitou** funkce f , pokud $f \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(a))$.

Definice

Izolovanou singularitu $a \in \mathbb{C}$ funkce f nazvu

Definice

Bod $a \in \mathbb{C}$ nazvu **izolovanou singularitou** funkce f , pokud $f \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(a))$.

Definice

Izolovanou singularitu $a \in \mathbb{C}$ funkce f nazvu

- **odstranitelnou singularitou**, pokud existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$;

Definice

Bod $a \in \mathbb{C}$ nazvu **izolovanou singularitou** funkce f , pokud $f \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(a))$.

Definice

Izolovanou singularitu $a \in \mathbb{C}$ funkce f nazvu

- **odstranitelnou singularitou**, pokud existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$;
- **pólem**, pokud existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$;

Definice

Bod $a \in \mathbb{C}$ nazvu **izolovanou singularitou** funkce f , pokud $f \in \mathcal{H}(\mathcal{P}(a))$.

Definice

Izolovanou singularitu $a \in \mathbb{C}$ funkce f nazvu

- **odstranitelnou singularitou**, pokud existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$;
- **pólem**, pokud existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$;
- **podstatnou singularitou**, pokud neexistuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Věta 3.11 (o odstranitelné singularitě)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Potom následující je ekvivalentní:

- 1 $a \in \mathbb{C}$ je **odstranitelnou singularitou** funkce f ;

Věta 3.11 (o odstranitelné singularitě)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Potom následující je ekvivalentní:

- ❶ $a \in \mathbb{C}$ je **odstranitelnou singularitou** funkce f ;
- ❷ f je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$;

Věta 3.11 (o odstranitelné singularitě)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Potom následující je ekvivalentní:

- ❶ $a \in \mathbb{C}$ je **odstranitelnou singularitou** funkce f ;
- ❷ f je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$;
- ❸ f lze spojitě dodefinovat v bodě $a \in \mathbb{C}$ (limitou), a poté je f holomorní v a ;

Věta 3.11 (o odstranitelné singularitě)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Potom následující je ekvivalentní:

- ① $a \in \mathbb{C}$ je **odstranitelnou singularitou** funkce f ;
- ② f je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$;
- ③ f lze spojitě dodefinovat v bodě $a \in \mathbb{C}$ (limitou), a poté je f holomorní v a ;
- ④ Laurentova řada funkce f v $\mathcal{P}(a)$ má prázdnou hlavní část, je to tedy Taylorova řada, tj. pro $z \in \mathcal{U}(a)$ lze psát

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

Věta 3.12 (o pólech)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Potom následující je ekvivalentní:

- 1 $a \in \mathbb{C}$ je **pólem** funkce f ;

Věta 3.12 (o pólech)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Potom následující je ekvivalentní:

- ❶ $a \in \mathbb{C}$ je **pólem** funkce f ;
- ❷ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^n \in \mathbb{C}$, a přitom $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^{n-1} = \infty$;

Věta 3.12 (o pólech)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Potom následující je ekvivalentní:

- 1 $a \in \mathbb{C}$ je **pólem** funkce f ;
- 2 existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^n \in \mathbb{C}$, a přitom $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^{n-1} = \infty$;
- 3 je-li Laurentova řada funkce f v $\mathcal{P}(a)$ s koeficienty a_k , pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{-n} \neq 0$ a přitom $a_{-k} = 0$ pro všechna $k > n$.

Věta 3.12 (o pólech)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Potom následující je ekvivalentní:

- 1 $a \in \mathbb{C}$ je **pólem** funkce f ;
- 2 existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^n \in \mathbb{C}$, a přitom $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^{n-1} = \infty$;
- 3 je-li Laurentova řada funkce f v $\mathcal{P}(a)$ s koeficienty a_k , pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{-n} \neq 0$ a přitom $a_{-k} = 0$ pro všechna $k > n$. Hlavní část této Laurentovy řady má tedy jen konečný počet nenulových členů, tj. pro $z \in \mathcal{P}(a)$ lze psát

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - a} + a_0 + a_1(z - a) + \cdots$$

Poznámka

- Hodnota čísla $n \in \mathbb{N}$ z druhého o třetího bodu předchozí věty je tatáž — tj. je-li $n \in \mathbb{N}$, pro který je (jako v bodu 2) $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^n \in \mathbb{C}$, a přitom $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^{n-1} = \infty$, pak a_{-n} je i (jako v bodu 3) "poslední nenulový koeficient v hlavní části Laurentovy řady f v $\mathcal{P}(a)$ ", a naopak.

Poznámka

- Hodnota čísla $n \in \mathbb{N}$ z druhého o třetího bodu předchozí věty je tatáž — tj. je-li $n \in \mathbb{N}$, pro který je (jako v bodu 2) $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^n \in \mathbb{C}$, a přitom $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^{n-1} = \infty$, pak a_{-n} je i (jako v bodu 3) "poslední nenulový koeficient v hlavní části Laurentovy řady f v $\mathcal{P}(a)$ ", a naopak.
- V této situaci říkáme, že f má v a **pól násobnosti n** .

Poznámka

- Hodnota čísla $n \in \mathbb{N}$ z druhého o třetího bodu předchozí věty je tatáž — tj. je-li $n \in \mathbb{N}$, pro který je (jako v bodu 2) $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^n \in \mathbb{C}$, a přitom $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^{n-1} = \infty$, pak a_{-n} je i (jako v bodu 3) "poslední nenulový koeficient v hlavní části Laurentovy řady f v $\mathcal{P}(a)$ ", a naopak.
- V této situaci říkáme, že f má v a **pól násobnosti n** .
- Předchozí věta tedy mimo jiné říká, že **každý pól má nějakou násobnost**.

Věta 3.13 (o podstatné singularitě)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Potom následující je ekvivalentní:

- 1 $a \in \mathbb{C}$ je **podstatnou singularitou** funkce f ;

Věta 3.13 (o podstatné singularitě)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Potom následující je ekvivalentní:

- 1 $a \in \mathbb{C}$ je **podstatnou singularitou** funkce f ;
- 2 pro všechna $w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existuje posloupnost $z_n \rightarrow a$ taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$;

Věta 3.13 (o podstatné singularitě)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f . Potom následující je ekvivalentní:

- 1 $a \in \mathbb{C}$ je **podstatnou singularitou** funkce f ;
- 2 pro všechna $w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existuje posloupnost $z_n \rightarrow a$ taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$;
- 3 je-li Laurentova řada funkce f v $\mathcal{P}(a)$ s koeficienty a_k , pak její hlavní část obsahuje nekonečně mnoho nenulových členů, tj. pro $z \in \mathcal{P}(a)$ lze psát

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots .$$

Poznámka

Implikace "(1) \implies (2)" z předchozí věty se nazývá **věta Casorati-Weierstrassova**.

Definice (reziduum)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovaná singularita funkce f , a bud'

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n \quad (10)$$

rozvoj f do Laurentovy řady na $\mathcal{P}(a)$.

Definice (reziduum)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovaná singularita funkce f , a bud'

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad (10)$$

rozvoj f do Laurentovy řady na $\mathcal{P}(a)$. Koeficient a_{-1} této řady nazveme **reziduem funkce f v bodě a** ,

Definice (reziduum)

Bud' $a \in \mathbb{C}$ izolovaná singularita funkce f , a bud'

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad (10)$$

rozvoj f do Laurentovy řady na $\mathcal{P}(a)$. Koeficient a_{-1} této řady nazveme **reziduem funkce f v bodě a** , píšeme

$$\operatorname{Res}_a f(z). \quad (11)$$

Věta 3.14 (pravidla pro výpočet reziduí)

1 Je-li a odstranitelnou singularitou f , je $\text{Res}_a f(z) = 0$.

Věta 3.14 (pravidla pro výpočet reziduí)

- 1 Je-li a odstranitelnou singularitou f , je $\text{Res}_a f(z) = 0$.
- 2 Má-li f v a pól násobnosti 1, a g je holomorfní v a , je $\text{Res}_a(f(z)g(z)) = g(a) \text{Res}_a f(z)$.

Věta 3.14 (pravidla pro výpočet reziduí)

- ① Je-li a odstranitelnou singularitou f , je $\boxed{\operatorname{Res}_a f(z) = 0}$.
- ② Má-li f v a pól násobnosti 1, a g je holomorfní v a , je $\boxed{\operatorname{Res}_a (f(z)g(z)) = g(a) \operatorname{Res}_a f(z)}$.
- ③ Jsou-li f i g holomorfní v a , $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, pak

$$\boxed{\operatorname{Res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}}.$$

Věta 3.14 (pravidla pro výpočet reziduí)

1 Je-li a odstranitelnou singularitou f , je $\text{Res}_a f(z) = 0$.

2 Má-li f v a pól násobnosti 1, a g je holomorfní v a , je

$$\text{Res}_a(f(z)g(z)) = g(a) \text{Res}_a f(z).$$

3 Jsou-li f i g holomorfní v a , $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, pak

$$\text{Res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

4 Má-li f v a pól násobnosti $k \in \mathbb{N}$, je

$$\text{Res}_a f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(f(z)(z-a)^k \right)^{(k-1)}.$$

Věta 3.15 (reziduová věta)

Bud' φ jednoduchá uzavřená křivka v \mathbb{C} , která je orientována kladně vůči svému vnitřku $\text{Int } \varphi$. Bud' $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast obsahující $\text{Int } \varphi \cup \langle \varphi \rangle$. Necht' přitom $\{z_1, \dots, z_n\} \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset$.

Věta 3.15 (reziduová věta)

Bud' φ jednoduchá uzavřená křivka v \mathbb{C} , která je orientována kladně vůči svému vnitřku $\text{Int } \varphi$. Bud' $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast obsahující $\text{Int } \varphi \cup \langle \varphi \rangle$. Necht' přitom $\{z_1, \dots, z_n\} \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset$. Potom

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{Int } \varphi} \text{Res}_{z_k} f(z). \quad (12)$$

Věta 3.15 (reziduová věta)

Bud' φ jednoduchá uzavřená křivka v \mathbb{C} , která je orientována kladně vůči svému vnitřku $\text{Int } \varphi$. Bud' $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast obsahující $\text{Int } \varphi \cup \langle \varphi \rangle$. Necht' přitom $\{z_1, \dots, z_n\} \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset$. Potom

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{Int } \varphi} \text{Res}_{z_k} f(z). \quad (12)$$

Pozn. Křivka je orientovaná kladně vůči $\text{Int } \varphi$, pokud při "pohybu po křivce" leží oblast $\text{Int } \varphi$ "po levé ruce".

Věta 3.15 (reziduová věta)

Bud' φ jednoduchá uzavřená křivka v \mathbb{C} , která je orientována kladně vůči svému vnitřku $\text{Int } \varphi$. Bud' $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast obsahující $\text{Int } \varphi \cup \langle \varphi \rangle$. Necht' přitom $\{z_1, \dots, z_n\} \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset$. Potom

$$\int_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{Int } \varphi} \text{Res}_{z_k} f(z). \quad (12)$$

Pozn. Křivka je orientovaná kladně vůči $\text{Int } \varphi$, pokud při "pohybu po křivce" leží oblast $\text{Int } \varphi$ "po levé ruce". V případě opačně orientované křivky je před sumou na pravé straně (12) znaménko minus.

Reziduová věta je jedním z velmi silných prostředků pro výpočet mnoha typů reálných určitých integrálů. Viz bonusový materiál "Použití reziduové věty k výpočtům".

Reziduová věta je jedním z velmi silných prostředků pro výpočet mnoha typů reálných určitých integrálů. Viz bonusový materiál "Použití reziduové věty k výpočtům".

Pro výpočty pomocí reziduové věty se hodí následující dvě lemmata.

Lemma 3.16 (lemma o velkých obloucích, Jordanovo lemma)

*Nechť $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$, a necht' $f \in \mathcal{C}(A_R)$, kde
 $A_R := \{z \in \mathbb{C}; \arg z \in \langle \alpha, \beta \rangle, |z| \geq R\}$ pro nějaké $R > 0$.*

Lemma 3.16 (lemma o velkých obloucích, Jordanovo lemma)

Nechť $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$, a necht' $f \in \mathcal{C}(A_R)$, kde $A_R := \{z \in \mathbb{C}; \arg z \in \langle \alpha, \beta \rangle, |z| \geq R\}$ pro nějaké $R > 0$. Necht' dále platí $\lim_{A_R \ni z \rightarrow \infty} f(z) = 0$.

Lemma 3.16 (lemma o velkých obloucích, Jordanovo lemma)

Nechť $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$, a necht' $f \in \mathcal{C}(A_R)$, kde $A_R := \{z \in \mathbb{C}; \arg z \in \langle \alpha, \beta \rangle, |z| \geq R\}$ pro nějaké $R > 0$. Necht' dále platí $\lim_{A_R \ni z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Je-li $\varphi_r(t) := re^{it}$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, oblouk kružnice o poloměru $r > 0$, pak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\varphi_r} f(z) e^{iz} dz = 0. \quad (13)$$

Lemma 3.17 (lemma o malých obloucích)

Nechť $a \in \mathbb{C}$ a necht' f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu a , přičemž v bodě a má f nejvýše pól násobnosti 1. Necht' dále $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, a necht' $\varphi_r(t) := a + re^{it}$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, je oblouk kružnice o poloměru $r > 0$.

Lemma 3.17 (lemma o malých obloucích)

Nechť $a \in \mathbb{C}$ a necht' f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu a , přičemž v bodě a má f nejvýše pól násobnosti 1. Necht' dále $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, a necht' $\varphi_r(t) := a + re^{it}$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, je oblouk kružnice o poloměru $r > 0$. Pak

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\varphi_r} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{Res}_a f. \quad (14)$$

Věta 3.18 (o jednoznačnosti)

Bud' $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Bud' $A := \{z \in \Omega; f(z) = g(z)\}$. Pokud A má hromadný bod v Ω , je $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \Omega$.

Věta 3.18 (o jednoznačnosti)

Bud' $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Bud' $A := \{z \in \Omega; f(z) = g(z)\}$. Pokud A má hromadný bod v Ω , je $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \Omega$.

Důsledek 3.19

Bud' $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$. Bud' $f = g$ na neprázdném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Potom $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$.

Příklad 2 (goniometrické funkce v \mathbb{C})

- Pro všechna $y \in \mathbb{R}$ je $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$.

Příklad 2 (goniometrické funkce v \mathbb{C})

- Pro všechna $y \in \mathbb{R}$ je $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$. Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte)
 $\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$.

Příklad 2 (goniometrické funkce v \mathbb{C})

- Pro všechna $y \in \mathbb{R}$ je $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$. Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte)

$$\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y \text{ pro všechna } y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Podobně } \sin(iy) = i \sinh y \text{ pro všechna } y \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2 (goniometrické funkce v \mathbb{C})

- Pro všechna $y \in \mathbb{R}$ je $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$. Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte)
 $\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$.
Podobně $\sin(iy) = i \sinh y$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$.
- Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ je
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

Příklad 2 (goniometrické funkce v \mathbb{C})

- Pro všechna $y \in \mathbb{R}$ je $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$. Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte)

$$\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y \text{ pro všechna } y \in \mathbb{R}.$$

Podobně $\sin(iy) = i \sinh y$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$.

- Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ je

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte)

$\sin(x + w) = \sin x \cos w + \cos x \sin w$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$.

Příklad 2 (goniometrické funkce v \mathbb{C})

- Pro všechna $y \in \mathbb{R}$ je $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$. Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte)

$$\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y \text{ pro všechna } y \in \mathbb{R}.$$

Podobně $\sin(iy) = i \sinh y$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$.

- Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ je

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte)

$\sin(x + w) = \sin x \cos w + \cos x \sin w$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$. Pro $w = iy$, $y \in \mathbb{R}$, dostaneme

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy).$$

Příklad 2 (goniometrické funkce v \mathbb{C})

- Pro všechna $y \in \mathbb{R}$ je $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$. Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte)

$$\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y \text{ pro všechna } y \in \mathbb{R}.$$

Podobně $\sin(iy) = i \sinh y$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$.

- Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ je

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. Z věty o jednoznačnosti plyne (zdůvodněte)

$\sin(x + w) = \sin x \cos w + \cos x \sin w$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$. Pro $w = iy$, $y \in \mathbb{R}$, dostaneme

$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$. S využitím předchozího bodu dostaneme

$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$,
a podobně

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

*Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:*

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

■ $\sqrt{-1}$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

■ $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right)$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
 Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

- $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i)\right)$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
 Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

- $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2} + k\pi i\right)$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
 Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

■ $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2} + k\pi i\right) = i(-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
 Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

- $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2} + k\pi i\right) = i(-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- i^i

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
 Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

- $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2} + k\pi i\right) = i(-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $i^i = \exp(i \ln(i))$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
 Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

- $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2} + k\pi i\right) = i(-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $i^i = \exp(i \ln(i)) = \exp(i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i))$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
 Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

- $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2} + k\pi i\right) = i(-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $i^i = \exp(i \ln(i)) = \exp\left(i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
 Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

- $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2} + k\pi i\right) = i(-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $i^i = \exp(i \ln(i)) = \exp\left(i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $\sqrt[i]{i}$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
 Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

- $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2} + k\pi i\right) = i(-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $i^i = \exp(i \ln(i)) = \exp\left(i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $\sqrt[i]{i} = \exp\left(\frac{1}{i} \ln(i)\right)$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
 Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

- $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2} + k\pi i\right) = i(-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $i^i = \exp(i \ln(i)) = \exp\left(i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $\sqrt[i]{i} = \exp\left(\frac{1}{i} \ln(i)\right) = \exp\left(\frac{1}{i}(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i)\right)$

Příklad 3 (komplexní logaritmus)

Pro $z = |z|e^{i \arg z}$ máme $\ln z = \ln(|z|e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.
 Protože argument ($\arg z$) není jednoznačná funkce, je i komplexní logaritmus víceznačná funkce:

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad (\varphi + 2k\pi = \arg z).$$

Příklad 4 (obecná mocnina)

- $\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi + 2k\pi i)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2} + k\pi i\right) = i(-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $i^i = \exp(i \ln(i)) = \exp\left(i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$
- $\sqrt[i]{i} = \exp\left(\frac{1}{i} \ln(i)\right) = \exp\left(\frac{1}{i}(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i)\right) = \exp\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$