

# Nabitá částice v elektromagnetickém poli

- Uvažujme částici o klidové hmotnosti  $m_0$  nesoucí náboj  $q$ , která se pohybuje ve vakuu v elektromagnetickém poli popsaném intenzitou elektrického pole  $\mathbf{E}$  a magnetickou indukcí  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{p}$  hybnost částice a  $\mathbf{v}$  její rychlost):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$m_0 \ddot{x} = qE_x + q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_x,$$

$$m_0 \ddot{y} = qE_y + q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_y,$$

$$m_0 \ddot{z} = qE_z + q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_z,$$

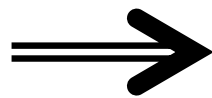
# Energie a hybnost částice

- Práce, kterou elektromagnetické pole dodá pohybující se nabitě částici:
- Během velmi krátkého časového intervalu  $dt$  se částice posune o  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$  a Lorentzova síla  $\mathbf{F}$  vykoná práci  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})dt$ .
- Jelikož platí  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ , je vykonaná práce rovna  $q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})dt$ .
- Okamžitý výkon dodávaný elektromagnetickým polem částici lze tedy vyjádřit jako  $q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$ .
- Pp, že v soustavě nenastávají žádné další přeměny energie  $\Rightarrow$  musí být dodaná práce spotřebována na zvýšení kinetické energie částice. Pro časovou změnu této kinetické energie  $dW_k/dt$  tedy musí platit

$$\frac{dW_k}{dt} = q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}).$$

- zákon zachování energie pro vyšetřovanou soustavu
- časová změna kinetické energie částice nezávisí na magnetickém poli
- Vynásobíme-li pohybovou rovnici skalárně rychlostí  $\mathbf{v}$  a uvědomíme-li si opět, že  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ :

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$$



$$\boxed{\frac{dW_k}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}}$$

# Pohyb v časově neproměnném homogenním **e**l. poli

- na počátku působení elektrického pole polohu  $\mathbf{r}_0$  a rychlost  $\mathbf{v}_0$ , lze postupnou integrací pohybových rovnic vyjádřit obecnou časovou závislost rychlosti  $\mathbf{v}(t)$  a polohy  $\mathbf{r}(t)$  částice:

$$m_0\ddot{x} = qE_x$$

$$m_0\ddot{y} = qE_y$$

$$m_0\ddot{z} = qE_z$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{m_0}\mathbf{E}t + \mathbf{v}_0 \qquad \mathbf{r}(t) = \frac{q}{2m_0}\mathbf{E}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0.$$

- Speciálně, je-li intenzita elektrického pole orientována ve směru počáteční rychlosti, je pohyb částice přímočarý a částice je rovnoměrně urychlována (či zpomalována) se zrychlením  $q\mathbf{E}/m_0$ .
- Je-li naopak počáteční rychlost  $\mathbf{v}_0$  kolmá k  $\mathbf{E}$ , je dráhou částice parabola.

# Pohyb v časově neproměnném homogenním **mg.** poli

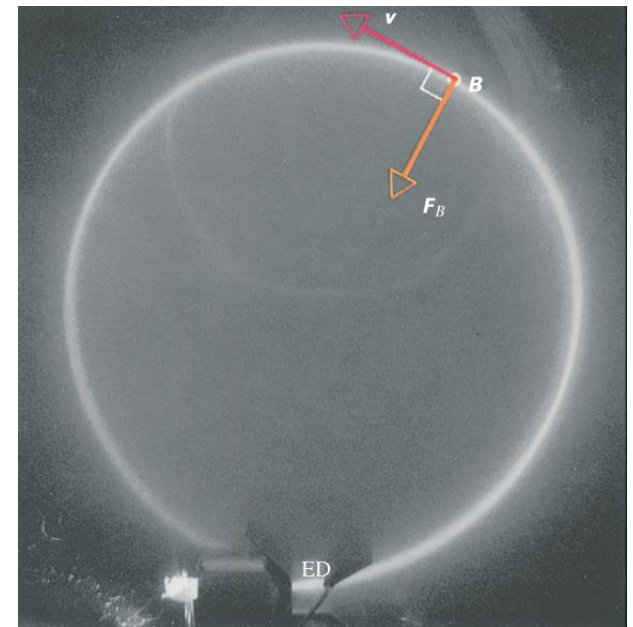
- Magnetické pole nechť je orientováno ve směru osy  $z$ , počáteční rychlost částice  $\mathbf{v}_0$ , mnohem menší než rychlost světla  $c$ , je kolmá ke směru  $z$ , tj. leží v rovině  $xy$ .
- Lorentzova síla bude mít konstantní velikost  $qv_0B$  a bude stále kolmá ke směru rychlosti.
- Magnetické pole nebude tedy měnit velikost rychlosti částice, ale bude její dráhu zakřivovat konstantním dostředivým zrychlením  $a = (qv_0B)/m_0$ .
- Částice tedy bude konat rovnoměrný kruhový pohyb v rovině  $xy$  s úhlovou frekvencí

$$\omega_c = \frac{q}{m_0} B$$

*cyklotronová frekvence*

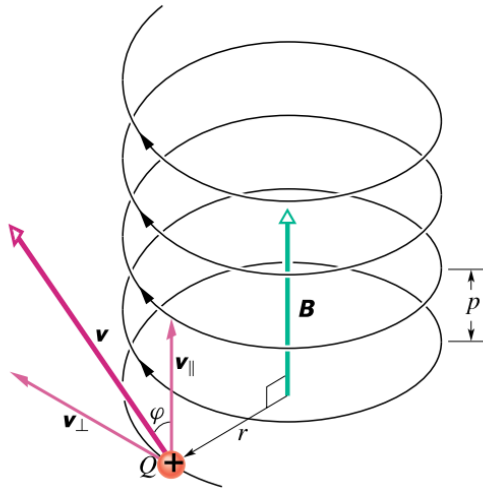
- Poloměr kružnice  $r$ , po které se částice bude pohybovat, tzv. *cyklotronový poloměr*:

$$r = \frac{v_0}{\omega_c}$$



# Pohyb v časově neproměnném homogenním **mg.** poli

- V případě libovolné orientace počáteční rychlosti  $\mathbf{v}_0$  bude Lorentzova síla  $\mathbf{F}$  dána jen složkou  $v_{0,\perp}$  do roviny  $xy$  kolmé ke směru magnetického pole;  $F = v_{\perp} B$ .
- Částice tedy bude v rovině  $xy$  konat rovnoměrný kruhový pohyb se stejnou cyklotronovou frekvencí  $\omega_c$  a poloměrem  $a$  a současně rovnoměrný přímočarý pohyb ve směru osy  $z$  s rychlostí  $v_{\parallel}$ .
- Výsledkem bude pohyb po šroubovici.



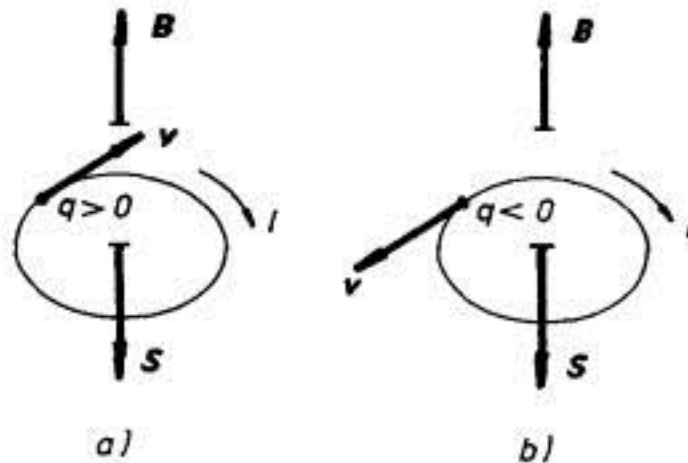
$$v_{\parallel} = v \cos \varphi \quad \text{a} \quad v_{\perp} = v \sin \varphi$$

- $v_{\parallel}$  určuje stoupání šroubovice  $p$  za 1 periodu.  
 $p = v_{\parallel} T$
- $v_{\perp}$  určuje poloměr šroubovice.

$$r = \frac{m v_{\perp}}{QB} \quad (\text{poloměr})$$

# Pohyb v časově neproměnném homogenním **mg.** poli

- Směr rotace nabité částice:
- Nezávisle na znamení náboje  $q$  částice rotuje v takovém smyslu, že orientujeme-li plochu  $\mathbf{S}$  opisované smyčky podle pravidla pravotočivého šroubu vzhledem ke směru proudu  $I$  reprezentovaného částicí, bude směr vektoru  $\mathbf{S}$  mířit proti směru magnetického pole  $\mathbf{B}$ .
- Opačně vůči směru magnetického pole tedy bude orientován i vektor magnetického momentu  $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$ , který rotující částici reprezentuje.



# Pohyb v nehomogenním osově symetrickém mg. poli

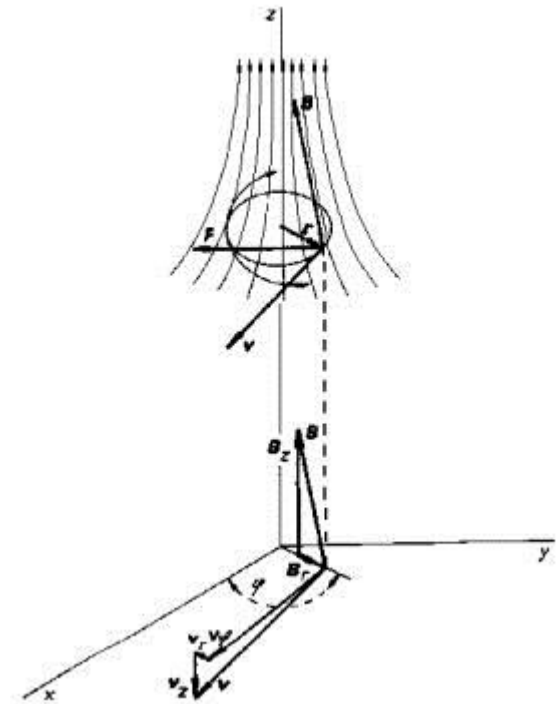
- Pp. osově symetrické magnetické pole, jehož osou symetrie je osa z.
- Pole má nenulovou jen podélnou složku  $B_z$  a radiální složku  $B_r$ .
- Lze využít předchozí výsledky, pokud nehomogenita pole není příliš velká.
- Částice se pohybuje po šroubovici s proměnným stoupáním i poloměrem.
- Má nenulovou: podélnou složku rychlosti  $v_z = dz/dt$   
radiální složku  $v_r = dr/dt$   
cirkulační složku  $v_\varphi = r d\varphi/dt$
- 2. impulsová věta: moment hybnosti  $L_z = m_0 \omega r^2$

$$\frac{d}{dt}(m_0 \omega r^2) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z$$

- radiální složka rychlosti  $v_r = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi$
- radiální složka magnetické indukce  $B_r = B_x \cos\varphi + B_y \sin\varphi$

$$\frac{d}{dt}(m_0 \omega r^2) = qr(v_z B_r - v_r B_z)$$

- Pravou stranou poslední rovnice lze vyjádřit pomocí magnetického toku  $\Phi$  tekoucího plochou ohraničenou dráhou částice.



# Pohyb v nehomogenním osově symetrickém mg. poli

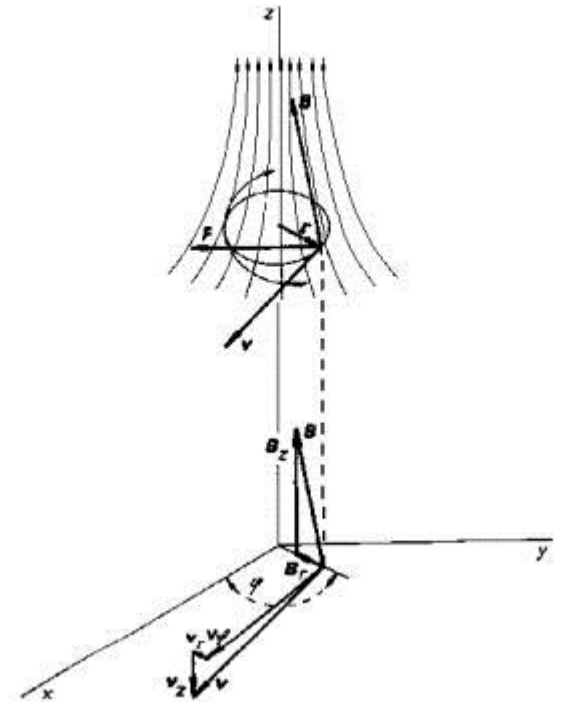
- S využitím vektorového potenciálu (cirkulační složka  $A_\varphi$ , nezávislá na úhlu  $\varphi$ ):

$$\Phi = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r A_\varphi.$$

- Rotace A ve válcových souřadnicích:

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), \quad B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_0 \omega r^2 &= -q \left[ v_r \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right] \\ &= -q \left[ \frac{dr}{dt} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} (r A_\varphi) \right] \\ &= -q \frac{d}{dt} (r A_\varphi) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned}$$



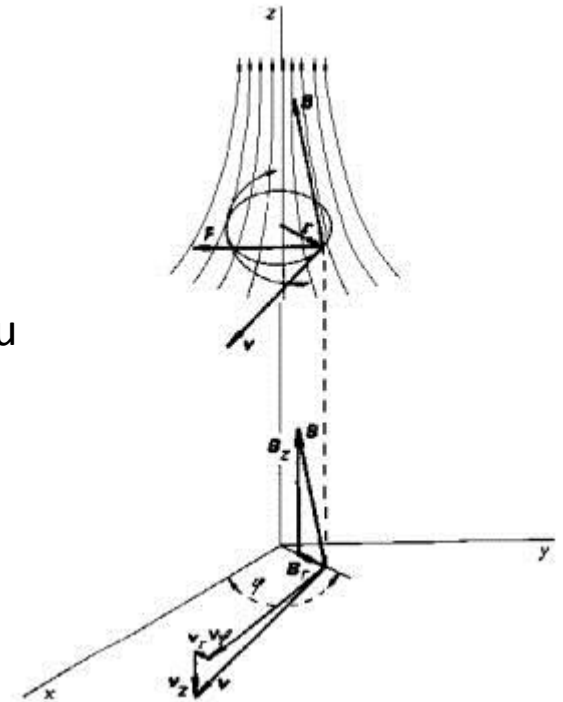
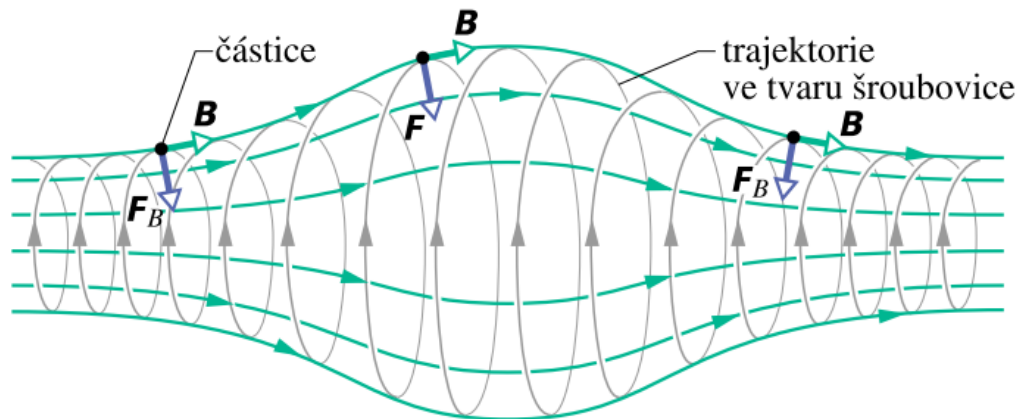


# Pohyb v nehomogenním osově symetrickém mg. poli

- časová změna součtu momentu hybnosti částice a magnetického toku vymezeného její dráhou je nulová. Hodnota této veličiny zůstává tedy při pohybu částice konstantní (Buschova věta).

$$m_0 \omega r^2 + \frac{q}{2\pi} \Phi = \text{konst.}$$

- magnetická past v nehomogenním poli - mg. síla má složku směřující do středu pasti.



# Vzájemně kolmá elektrické a magnetické pole

- současné působení homogenního elektrického pole  $\mathbf{E} \equiv (0, E, 0)$  a homogenního magnetického pole  $\mathbf{B} \equiv (0, 0, B)$ :

$$m_0 \frac{dv_x}{dt} = qBv_x$$

$$m_0 \frac{dv_y}{dt} = qE - qBv_x$$

$$m_0 \frac{dv_z}{dt} = 0$$

- Pp., že počáteční rychlost  $\mathbf{v}_0$  bude mít nulovou složku do směru osy  $z \Rightarrow$  pohyb částice pouze v rovině  $xy \Rightarrow$  potřebné jen první 2 rovnice
- zavedení komplexní rychlosti  $u = v_x + iv_y$

$$\frac{d}{dt}u + i\frac{q}{m_0}Bu = i\frac{q}{m_0}E.$$

# Pohyb v časově neproměnném homogenním poli

- nehomogenní lineární diferenciální rovnice, jejíž obecné řešení získáme jako součet obecného řešení příslušné homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení celé rovnice.
- Obecné řešení homogenní rovnice hledáme ve tvaru:

$$u = C e^{\alpha t}$$

- Po dosazení do rovnice dostaneme pro konstantu

$$\alpha = -i \frac{q}{m_0} B = -i \omega_c.$$

- Triviálním partikulárním řešením rovnice je  $u = E/B$
- Obecné řešení:

$$u = C e^{-i\omega_c t} + \frac{E}{B}$$

- kde  $C$  je obecně komplexní konstanta. Lze ji vyjádřit pomocí reálných konstant  $D$ ,  $\delta$  ve tvaru  $C = D \exp(i\delta)$  a výsledek má pak tvar:

$$v_x = D \cos(\omega_c t + \delta) + \frac{E}{B},$$

$$v_y = -D \sin(\omega_c t + \delta).$$

# Pohyb v časově neproměnném homogenním poli

- konkrétní průběh dráhy pro speciální tvar počátečních podmínek, kdy v čase  $t = 0$  je částice v počátku s nulovou rychlostí, tj. platí  $x_0 = y_0 = z_0$  a  $v_{x,0} = v_{y,0} = 0$

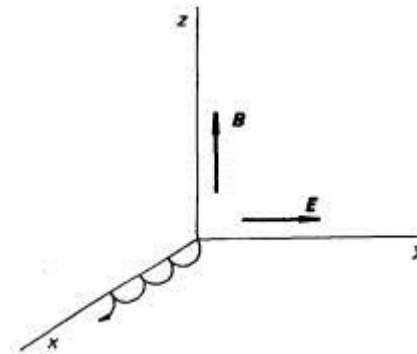
$$v_x = \frac{E}{B}(1 - \cos \omega_c t),$$

$$v_y = \frac{E}{B} \sin \omega_c t$$

- a po další integraci a uplatnění počátečních podmínek dostaneme pro časovou závislost souřadnic - *cykloida*

$$x = \frac{E}{\omega_c B}(\omega_c t - \sin \omega_c t),$$

$$y = \frac{E}{\omega_c B}(1 - \cos \omega_c t).$$



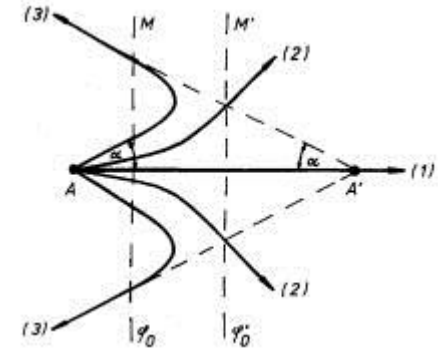
- Driftová rychlost: nezávisle na počátečních rychlostech  $v_{x,0}$ ,  $v_{y,0}$  je střední hodnota rychlosti  $v_D$  ve směru osy  $x$ , tj. ve směru kolmém k  $\mathbf{E}$ :  $v_D = E/B$
- $v_D$  nezávisí na  $q$

# Principy částicové optiky

- Studium struktury svazků nabitých částic při jejich interakci s makroskopickými elektrickými a magnetickými poli.
- Fokuse a ovládání svazků částic
- Typická aplikace - elektronová mikroskopie a elektronová difrakce

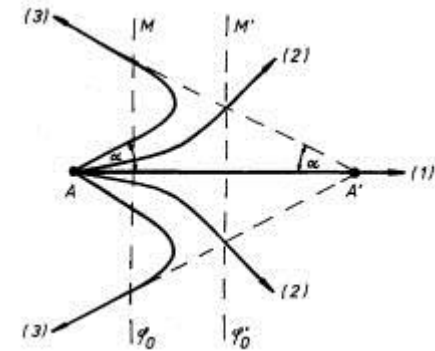
# Elektrostatické zrcadlo

- Elektrostatické pole tvořené dvojicí rovnoběžných mřížek  $M, M'$  udržovaných na potenciálech  $\varphi_0$  a  $\varphi_0'$ ,  $\varphi_0 > \varphi_0'$ .
- Elektrony vycházející z bodu  $A$  jsou elektrickým polem vytvořeným v prostoru mezi mřížkami odchylovány.
- Charakter dráhy závisí ovšem na velikosti počáteční rychlosti  $v_0$ , i na jejím směru.
- Např. elektrony (1) vyletující kolmo k rovině mřížek se pohybují po přímých drahách a jsou elektrickým polem jen brzděny. V závislosti na velikosti počáteční rychlosti jsou buď navraceny zpět, nebo prolétávají do prostoru za mřížkou  $M'$ .



# Elektrostatické zrcadlo

- Dráhy elektronů vyletujících šikmo jsou naproti tomu zakřivovány. V závislosti na velikosti a směru počáteční rychlosti mohou buď elektrickým polem prolétnout (2), nebo jsou navraceny zpět (3).
- Trajektorie odražených elektronů s danými počátečními parametry  $v_0$ ,  $\alpha$  leží na kuželové ploše s vrcholem v bodě A a vrcholovým úhlem  $2\alpha$ .
- V analogii se světelnou geometrickou optikou můžeme bod A považovat za neskutečný obraz bodu A vytvořený uvažovanými elektrony.
- Poloha obrazu A závisí ovšem jak na úhlu  $\alpha$ , tak na velikosti počáteční rychlosti  $v_0$ .
- Uvedené závislosti představují postupně analogie kulové a barevné vady zrcadla.

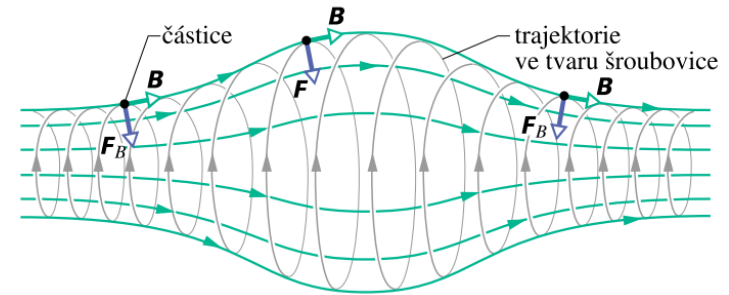


# Magnetické zrcadlo

- Osově symetrického mg. pole.
- Částice vlétuvší do takového magnetického pole se pohybuje po šroubovici. Vzhledem k nenulové radiální složce pole je však nenulová i složka síly ve směru šroubovice.

$$F_x = -v_\phi B_r$$

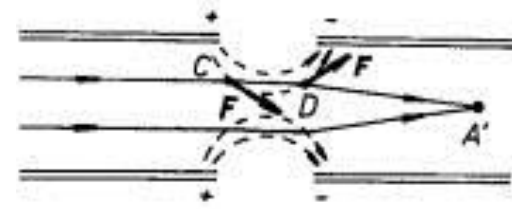
- podélná rychlost částice zmenšuje.
- Šroubovice se tedy postupně zhušťuje a za vhodných podmínek může rychlost částice v podélném směru změnit i znamení, takže šroubovice začne postupovat opačným směrem.
- Částice je tedy vytlačována do míst s méně intenzivním magnetickým polem.
- Magnetická zrcadla založená na uvedeném jevu se často užívají ve fyzice plazmatu k odizolování vysoce energetických částic od stěn daného zařízení.





# Fokusace svazků částic

- **Podélné** el. pole mezi dvojicí válcových elektrod částice jednak urychluje v podélném směru, jednak je odchyluje ve směru příčném;
- Nejdříve směrem k ose soustavy (např. v bodě  $C$ ), později směrem od osy (např. v bodě  $D$ ).
- Díky urychlovacímu účinku však síly mířící **od osy** působí **kratší dobu**, takže převažuje účinek sil zakřivujících dráhu částice **k ose** soustavy. Původně rovnoběžný svazek monorychlostních částic bude tedy fokusován do určitého bodu  $A'$  na ose.

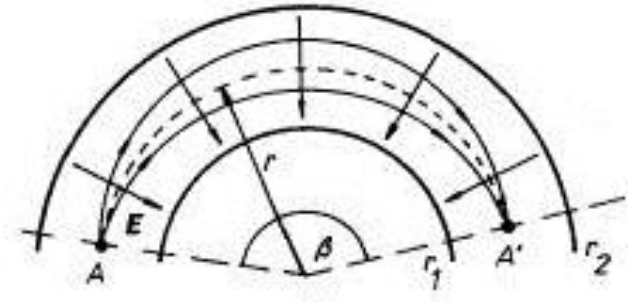


# Fokusace svazků částic el. polem

- Ve válcovém kondenzátoru podle, mezi jehož elektrodami o poloměrech  $r_1$  a  $r_2$  je napětí  $U$ , existuje radiální elektrické pole.

$$r \leq r_0: \quad E = 0, \quad \varphi = C_1,$$

$$r > r_0: \quad E = \frac{\sigma r_0}{\varepsilon_0 r}, \quad \varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} r_0 \ln r + C_2$$



- Dráha částice nesoucí náboj  $q < 0$ , vstoupivši do prostoru kondenzátoru v bodě A s tangenciální rychlostí  $v_0$ , je tímto polem zakřivována.
- V případě, že radiální elektrická síla  $qE$  je rovna odstředivé síle:

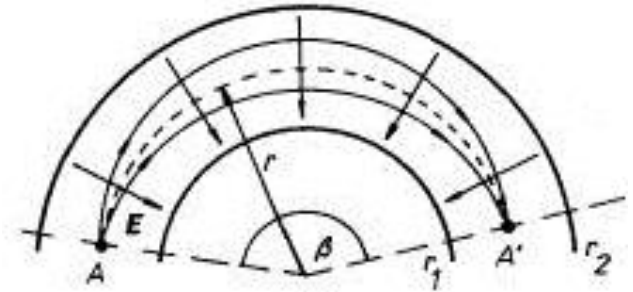
$$qE = \frac{m_0 v_0^2}{r},$$

- Částice se pohybuje po souosé kružnici o poloměru  $r$  a může tedy bez obtíží proletět celým prostorem kondenzátoru.
- Naopak dráhy částic s menší počáteční rychlostí budou zakřivovány více a dráhy částic s rychlostí větší budou zakřivovány méně.

# Fokusace svazků částic el. polem

- Umístíme-li tedy například v okolí bodu  $A'$  vhodnou clonu, může válcový kondenzátor sloužit jako filtr částic.
- Volbou napětí elektrod je možné vytvořit filtr částic s danou kinetickou energií  $W_k$ , reprezentovanou urychlovacím napětím  $U_a$  podle vztahu  $qU_a = W_k$ ;

$$U = 2U_a \ln \frac{r_1}{r_2}$$

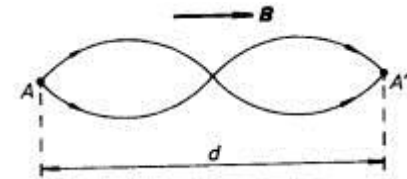


$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

- Radiální pole válcového kondenzátoru může i fokusovat sbíhavý svazek nabitých částic.
- Dráhy částic vstupujících do elektrického pole v bodu  $A$  s kinetickou energií vyhovující podmínce, jejichž směr rychlostí má jisté odchylky od tangenciálního směru, se po opsání určitého oblouku opět ocitnou v bodě  $A'$ .
- Kvantitativní analýza je komplikovaná
- Délka oblouku mezi body  $A$  a  $A'$  je nezávislá na parametrech částic. Pro úhel  $\beta$  platí obecně  $\beta = 127^\circ$ .

# Fokusace svazků částic mg. polem

- **Podélné pole**
- Cyklotronová frekvence  $\omega_c$ , a tudíž ani doba oběhu částice po šroubovici nezávisí na její počáteční rychlosti.
- Postupná rychlost částice ve směru pole je dána průmětem počáteční rychlosti do tohoto směru.
- **Rozbíhavý svazek částic**, které vstupují do podélného magnetického pole v bodě A se stejnou absolutní hodnotou rychlosti  $v_0$ , jejíž směr se málo odchyľuje od směru pole, se po jednom oběhu spirály opět setká v bodě A' ležícím ve vzdálenosti d.



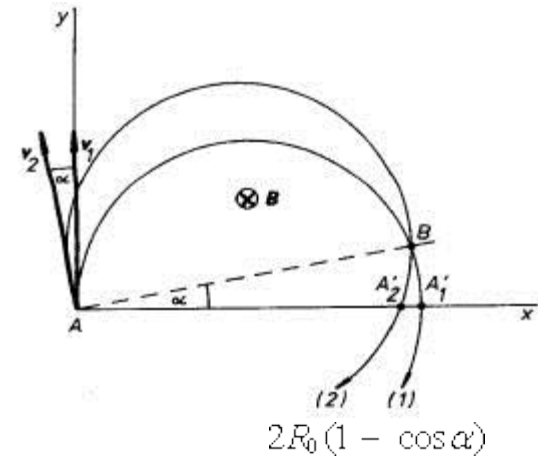
$$d \doteq \frac{2\pi v_0}{\omega_c}.$$

- Podélné magnetické pole se často užívá ke konstrukci čoček v částicové optice. Obvykle se užívá osově symetrické nehomogenní magnetické pole vytvářené prstencovými pólovými nastavci magnetu.

# Fokusace svazků částic mg. polem

- Příčné pole
- Částice vstupující do homogenního magnetického pole počáteční rychlostí  $v_0$ , ležící v rovině kolmé k magnetickému poli, se pohybuje po kružnici s úhlovou frekvencí  $\omega_c$

$$\omega_c = \frac{q}{m_0} B \quad R_0 = \frac{v_0}{\omega_c}$$



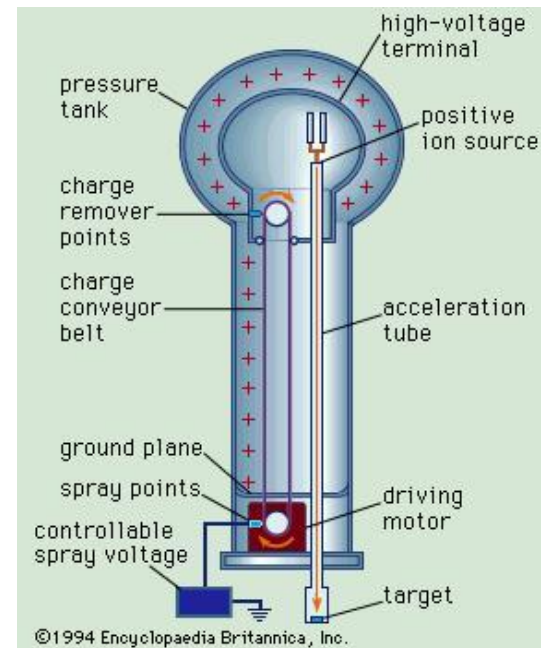
- Příčné mg. pole může (podobně jako příčné elektrické pole) sloužit jako filtr částic v závislosti na jejich rychlosti.
- 2 stejné částice, které vstupují do magnetického pole v bodě  $A$  s počátečními rychlostmi stejné velikosti  $v_0$ , jejichž směr se však liší o malý úhel  $\alpha$ .
- Obě částice se budou pohybovat po cyklotronových kružnicích stejného poloměru  $R_0 = v_0/\omega_c$ , jež se zřejmě protnou bodě  $B$  a osu  $x$  protnou v bodech  $A_1'$  a  $A_2'$ .
- Pro malý úhel  $\alpha$  oba body, přibližně splývají v jediný bod, který může být považován za obraz bodu  $A$ .
- Příčné homogenní mg. pole se tedy chová podobně jako válcová čočka, zcela analogicky jako radiální el. pole ve válcovém kondenzátoru.

# Urychlovače nabitých částic

- Zařízení umožňující urychlit nabité částice daného druhu (elektrony, protony, ionty) na požadovanou energii.
- Aplikace ve fyzice vysokých energií, v jaderné fyzice, příprava radioaktivních izotopů.
- Menší urychlovače iontů slouží např. pro implantaci definovaného množství příměsí při výrobě elektronických prvků, pro studium a analýzu povrchů látek.
- Významné je i využívání urychlených částic k získávám krátkovlnného záření (například v rentgenových lampách, ale i v cyklických urychlovačích).

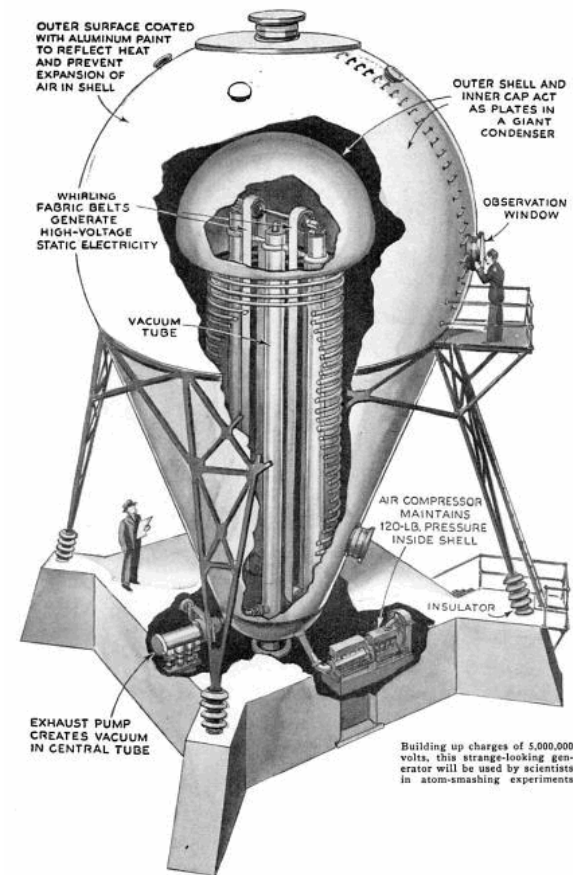
# Elektrostatický urychlovač - van de Graafův generátor

- V malých zařízeních se potřebné elektrické pole získává pomocí běžných elektronických zdrojů a částice se urychlují průchodem určitým potenciálním rozdílem. Takové zdroje jsou schopné dosáhnout napětí do  $10^6$  V.
- van de Graafův generátor.
- Lze nabíjet teoreticky nekonečně. Ve skutečnosti je mez tohoto napětí dána elektrickou pevností okolního prostředí.
- Proto se generátor plní vhodným plynem (například dusíkem) pod zvýšeným tlakem.
- Dosahované napětí generátoru činí několik megavoltů.



# Elektrostatický urychlovač - van de Graafův generátor

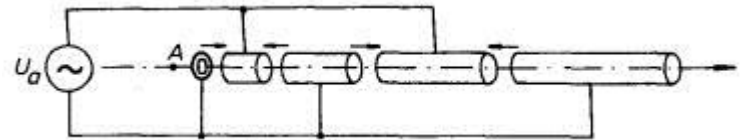
- V malých zařízeních se potřebné elektrické pole získává pomocí běžných elektronických zdrojů a částice se urychlují průchodem určitým potenciálním rozdílem. Takové zdroje jsou schopné dosáhnout napětí do  $10^6$  V.
- van de Graafův generátor.
- Lze nabíjet teoreticky nekonečně. Ve skutečnosti je mez tohoto napětí dána elektrickou pevností okolního prostředí.
- Proto se generátor plní vhodným plynem (například dusíkem) pod zvýšeným tlakem.
- Dosahované napětí generátoru činí několik megavoltů.





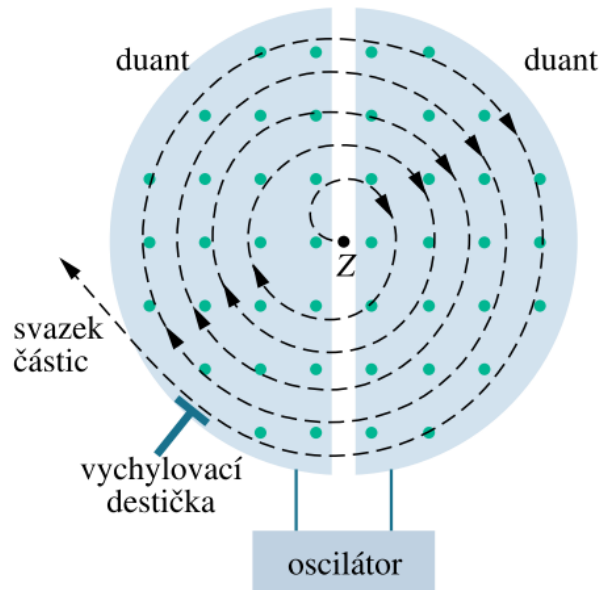
# Lineární (rezonační) urychlovač

- Nabité částice se urychlují střídavým elektrickým polem.
- Je tvořen soustavou vodivých elektrod ve tvaru trubic, které jsou připojeny ke společnému zdroji střídavého napětí  $U_a$
- Napětí  $U_a$  vytvoří v prostoru mezi sousedními elektrodami elektrické pole, jehož směr se v daném okamžiku střídá, jak je znázorněno na obrázku šipkami.
- Uvnitř elektrod je pole v podstatě nulové. Urychlovaná částice se pohybuje danou počáteční rychlostí z bodu  $A$  ve směru společné osy elektrod. Délka jednotlivých elektrod je volena tak, aby se za dobu průletu částice jejich vnitřkem vždy změnila polarita napětí zdroje  $U_a$ . Elektrické pole mezi elektrodami tedy částici vždy urychluje.
- Při daném počtu elektrod  $n$  je celkové urychlovací napětí rovno  $nU_a$ . Urychlovací elektrické pole se navíc využívá k fokusaci svazku.
- Obvykle se k jejich konstrukci využívá mikrovlnné techniky a urychlovací elektrické pole se budí v rezonátorech či vlnovodech. Konstruují se urychlovače jak pro elektrony, tak pro těžké částice (například protony).
- Dosahované energie jsou až řádu  $10^4$  MeV (délka urychlovače až km).



# Cyklotron

- Urychlení nabitých částic.
- Dva duté půlválce ve tvaru písmene D, otevřené na rovné straně, jsou vyrobeny z neferomagnetického, elektricky vodivého materiálu (např. měděných plechů).
- Tzv. duanty jsou části elektrického oscilátoru, který vytváří střídavé napětí ve štěrbině mezi nimi.
- Celá komora je mezi póli silného magnetu - např. 1.5 T.
- Oscilující elektrické pole vždy přitahuje elektron k protilehlému duantu.
- Uvnitř duantu je el. pole odstíněno, elektron se pohybuje po kružnici v důsledku působení magnetické síly.



$$f = f_{osc} \quad (\text{rezonanční podmínka})$$

$$QB = 2\pi m f_{osc}$$

- nastavíme  $B$

# Cyklotron

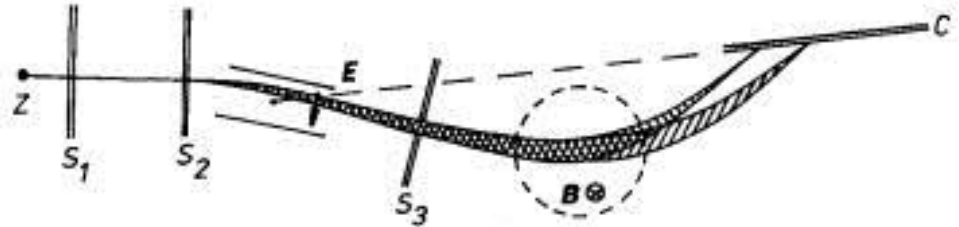
- Cyklotrony se zpravidla užívají k urychlování těžkých částic (protonů či iontů).
- V základním uspořádání s konstantními hodnotami  $B_0$ ,  $U_{a,\max}$ ,  $\omega_a$  je činnost cyklotronu omezena na energie, při nichž se zdatelně neuplatní relativistický vzrůst hybnosti částice, neboť v takové situaci závisí cyklotronová frekvence na rychlosti.
- Dosahovaná energie protonů činí několik desítek MeV.
- Postupným snižováním frekvence  $\omega_a$  v procesu urychlování je možné udržovat urychlovací napětí ve fázi s průletem částice a dosáhnout tak řádově vyšších energií. Urychlovače těžkých částic pracující v impulsním režimu s proměnnou frekvencí urychlovacího napětí se nazývají *fázotrony*.

# Synchrotron

- Větší energie -  $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$
- Lze měnit  $B$  i  $f$ .
- Magnety jsou podél kružnice s velkým poloměrem (např. 1 km).
- Např. Fermilab v Illinios.

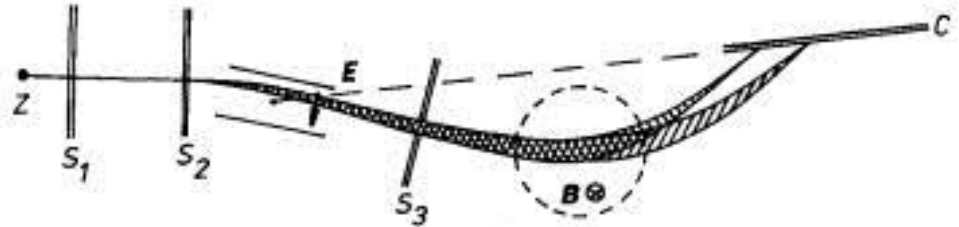


# Hmotnostní spektroskopie



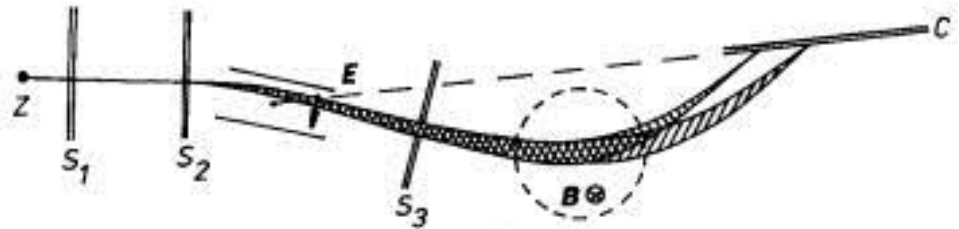
- F. W. Aston, 1917.
- Separace částic podle náboje, a v případě souboru částic se stejným nábojem, též k jejich separaci podle hmotnosti.
- Původně studium izotopového složení prvků.
- Nyní zejména chemická analýza.
  
- Soubor studovaných iontů vycházejících ze zdroje  $Z$  je nejdříve kolimován pomocí dvojice štěrbin  $S_1$  a  $S_2$ .
- Svazek pak dále prochází homogenním příčným polem  $E$  a pak, po vyčlenění jeho určité části štěrbinou  $S_3$ , k němu kolmým homogenním magnetickým polem  $B$ .
- Obě vzájemně kolmá pole odklání částice v jedné rovině, přičemž orientace polí je volena tak, aby zakřivení dráhy elektrickým a magnetickým polem mělo opačný směr.

# Hmotnostní spektroskopie



- F. W. Aston, 1917.
- Separace částic podle náboje, a v případě souboru částic se stejným nábojem, též k jejich separaci podle hmotnosti.
- Původně studium izotopového složení prvků.
- Nyní zejména chemická analýza.
  
- Soubor studovaných iontů vycházejících ze zdroje  $Z$  je nejdříve kolimován pomocí dvojice štěrbin  $S_1$  a  $S_2$ .
- Svazek pak dále prochází homogenním příčným polem  $E$  a pak, po vyčlenění jeho určité části štěrbinou  $S_3$ , k němu kolmým homogenním magnetickým polem  $B$ .
- Obě vzájemně kolmá pole odklání částice v jedné rovině, přičemž orientace polí je volena tak, aby zakřivení dráhy elektrickým a magnetickým polem mělo opačný směr.

# Hmotnostní spektroskopie



- Částice se v elektrickém poli pohybují po parabolických drahách a jsou separovány podle veličiny  $q/m_0v^2$ . V magnetickém poli se částice pohybují po kružnicích o poloměru  $R_0$ :  $R_0 = m_0v / qB$ .
- Tedy částice, které byly elektrickým polem více odkloněny, se v magnetickém poli pohybují po kružnici s menším poloměrem.
- Magnetické pole je tedy schopno fokusovat původně rozbíhavý svazek v určité rovině C.
- V různých místech roviny C se fokusují částice s různým měrným nábojem  $q/m_0$ . Spektrometr je schopen s určitou rozlišovací schopností tyto částice separovat.
- Analytické účely:
- Řada způsobů ionizace - Elektronová, chemická, elektrosprejová, Matricí Asistovaná LASERová desorpce (MALDI), Indukčně vázané plazma (ICP).
- Různé způsoby ovlivnění dráhy vč. měření doby letu (tzv. sektor)

# Pohyb gyromagnetické částice v magnetickém poli

$$\mathbf{m} = \gamma \mathbf{L}.$$

- Magneticky aktivní soustava vytvářející magnetické pole, jež je možné popsat polem magnetického dipólu  $\mathbf{m}$ , má rovněž určitý moment hybnosti  $\mathbf{L}$ .
- $\gamma$  je gyromagnetický poměr
- Např. nabitá částice konající rovnoměrný kruhový pohyb nebo rotující nabitá koule.0

Moment síly  $\mathbf{M}$  působící na částici o magnetickém momentu  $\mathbf{m}$ :  $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ .

- 2. impulsová věty - pohybová rovnice:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma(\mathbf{m} \times \mathbf{B}).$$

- Časová změna magnetického momentu  $d\mathbf{m}/dt$  je vždy kolmá k oběma vektorům  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{B}$ . Ve speciálním případě nulového magnetického pole plyne z pohybové rovnice  $\mathbf{m} = \text{konst.}$  Magnetický moment je tedy v dané inerciální soustavě nehybný.



# Pohyb gyromagnetické částice v magnetickém poli

## Larmorova precese

- Řešení pohybové rovnice pro případ homogenního, časově neproměnného magnetického pole  $\mathbf{B}_0$ , které nechť je orientováno v kladném směru osy  $z$  kartézské soustavy souřadné, která je inerciální. Platí tedy  $\mathbf{B}_0 \equiv (0, 0, B_0)$ .
- Řešení přechodem k neinerciální soustavě  $S' \equiv (x', y', z')$  rotující konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem osy  $z$ .
- Označíme-li  $\delta\mathbf{m}(t)/\delta t$  derivaci veličiny  $\mathbf{m}(t)$  vztaženou k soustavě  $S'$ , platí:

$$\frac{d\mathbf{m}(t)}{dt} = \frac{\delta\mathbf{m}(t)}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}.$$

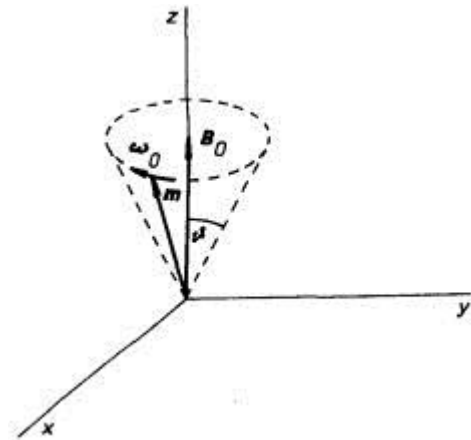
# Pohyb gyromagnetické částice v magnetickém poli

## Larmorova precese

- Pohybovou rovnicí lze vyjádřit v rotující soustavě  $S'$  (změna značení  $\delta \rightarrow d$ ):

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma(\mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\text{ef}}), \quad \mathbf{B}_{\text{ef}} = \mathbf{B}_0 + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\gamma}.$$

- Zvolíme  $\boldsymbol{\omega}$ , aby  $\mathbf{B}_{\text{ef}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_0 = -\gamma\mathbf{B}_0$



- $\Rightarrow$  magnetický moment je v soustavě  $S'$  nehybný,  $\mathbf{m} = \text{konst.}$
- V inerciální soustavě  $S$ :  
Pp., že  $\mathbf{m}$  svírá s osou  $z$  jistý úhel  $\theta$ .  
Vektor magnetického momentu  $\mathbf{m}$  bude v této soustavě opisovat kuželovou plochu s vrcholovým úhlem  $2\theta$ ; bude tedy konat precesní pohyb s úhlovou frekvencí  $\omega_0$ .
- Tento typ pohybu se nazývá *Larmorova precese* a frekvence  $\omega_0$  se nazývá *Larmonova frekvence*.

# Magnetická rezonance

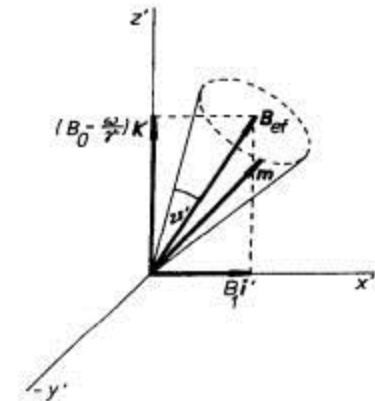
- Na gyromagnetickou částici působí (vedle stacionárního magnetického pole  $\mathbf{B}_0$ ) v kolmé rovině ještě střídavé (kruhově polarizované) magnetické pole  $\mathbf{B}_1$ , jehož frekvence  $\omega$  je blízká Larmorově frekvenci částice  $\omega_0 = \gamma \mathbf{B}_0$  ve statickém poli  $\mathbf{B}_0$ .
- Výsledné pole  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$  tedy vykonává precesní pohyb s úhlovou rychlostí  $\omega_1$  kolem osy  $z$ , přičemž pro úhel precese platí  $\text{tg} \delta = B_1/B_0$

- Rotující soustava souřadná na frekv.  $\omega$ , kde  $\mathbf{i}'$  a  $\mathbf{k}'$  značí jednotkové vektory ve směru os  $x'$  a  $z'$ .

$$\mathbf{B}_{\text{ef}} = \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \mathbf{k}' + B_1 \mathbf{i}'$$

- Částice v soustavě  $S'$  koná precesní pohyb kolem směru pole  $\mathbf{B}_{\text{ef}}$  s novou Larmorovou frekvencí  $\omega'_0 = \gamma \mathbf{B}_{\text{ef}}$ .

- V původní inerciální (laboratorní) soustavě je výsledkem precesní pohyb doplněný nutací, který se vyskytuje rovněž při pohybu setrvačníků.

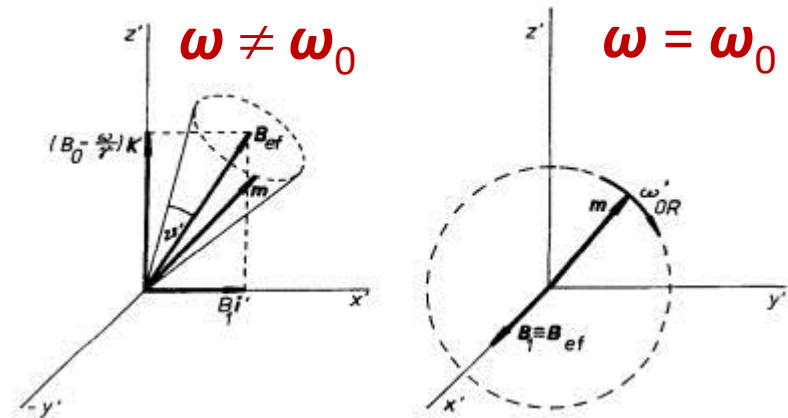


# Magnetická rezonance

- *Rezonance:*

$$\omega = \omega_0$$

$$\mathbf{B}_{ef} = \mathbf{B}_1$$



- V této rotující soustavě bude magnetický moment konat precesi kolem směru pole  $\mathbf{B}_1$ , tj. kolem osy  $x'$ , s úhlovou frekvencí

$$\omega_1 = \gamma B_1$$

- Je-li např.  $m$  orientován podél  $z'$  v  $t = 0$ , dojde k otočení do  $y'$  (o  $\pi/2$ ) za:  $t = \pi/(2\gamma B_1)$
- Střídavé pole o frekvenci  $\omega_0 = -\gamma B_0$  má maximální vliv na chování částice.
- Střídavé pole  $\mathbf{B}_1$  libovolně malé amplitudy může výrazně měnit orientaci mg. momentu částice vůči libovolně velkému poli  $\mathbf{B}_0$ .
- I. I. Rabi -1938 - pro měření magnetických momentů atomových jader ve svazcích atomů a molekul.
- E. Purcell, F. Bloch - 1946 - pozorování jader v kondenzované fázi, J. K. Zavojskij 1944 - elektrony
- Vlastní moment hybnosti - spin - jeho existenci vysvětluje relativistická kvantová mechanika - není spojen se skutečným pohybem

# Magnetická rezonance

- Nukleární magnetická rezonance:
- Využívá jádra nesoucí spin pro získání informací o struktuře a vnitřní dynamice látek.
- Zobrazování - magnetická rezonanční tomografie (P. Lauterbur, P. Mansfield)
- Nejčastěji jádra  $^1\text{H}$ , využití „pulzních“ gradientů mg. pole (tj. zapínaných na přesně určenou dobu).
- Zde uvedený popis lze použít na celkovou jadernou (elektronovou) magnetizaci. Chování jednotlivých jader/elektronů je nutné popisovat kvantově mechanicky.

