Vyzařování elektromagnetických vln

- K vyzařování elektromagnetických vln dochází při nestacionárním pohybu elektrických nábojů.
- Dáno řešením

$$\Delta\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\Delta\boldsymbol{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\,\boldsymbol{j}.$$

- Nejjednodušší řešení - *dipólové záření* ve *vlnové zóně.*
- K popisu využijeme časově proměnný dipól $\boldsymbol{p}(t\text{-}r/v)$ v přiblížení první mocniny 1/r:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}.\ddot{\boldsymbol{p}}) - \ddot{\boldsymbol{p}}}{4\pi\varepsilon v^2 r},$$

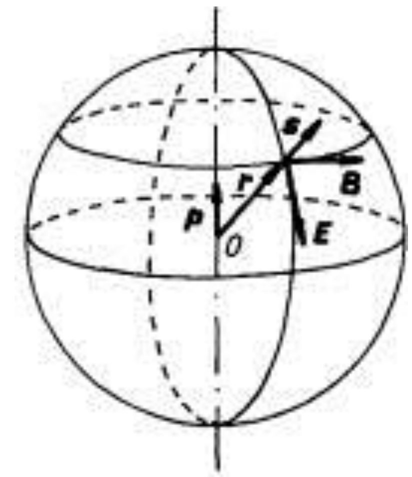
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\mu}{4\pi}\frac{\boldsymbol{s}\times\ddot{\boldsymbol{p}}}{v r},$$

- Vlnová zóna - oblast „dostatečně“ daleko od počátku - r >> λ
- $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}/r$ jednotkový vektor ve směru šíření
- Je důležitá druhá derivace dipólu v dřívějším čase o *r*/*v* - vzhledem ke konečné rychlosti šíření.

Vyzařování elektromagnetických vln

- Elektromagnetické pole ve vlnové zóně má tvar rozbíhavé kulové (sférické) vlny, neboť plochy konstantní fáze vyhovují rovnici

$$\tau = t - \frac{r}{v} = \text{konst}$$



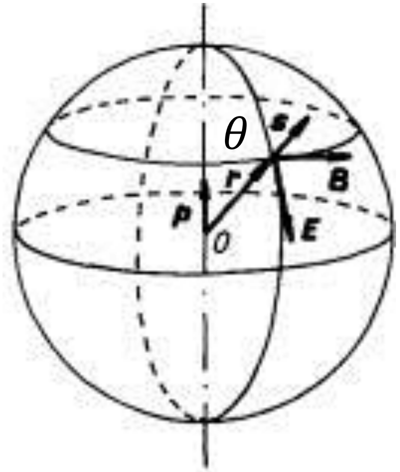
- Ve vlnové zóně má pole podobné vlastnosti jako rovinná vlna.
- Je příčné vzhledem ke směru šíření ***s*** (snadno si ověříme, že ***s*** . ***E*** = 0, ***s*** . ***B*** = 0)
- Platí pro ně $\mathbf{s} \times \mathbf{E} = v\,\mathbf{B}, \qquad E = vB$

- Vyzařování elektromagnetických vln do prostoru dochází tehdy, je-li druhá derivace časově proměnného elektrického dipólového momentu ***p*** nenulová.
- Směr vektoru ***p*** určuje také charakter polarizace vlny.
- Protože je pole ***E*** kolmé ke směru ***s*** , je možné ho vyjádřit pomocí složky , tedy projekce vektoru do roviny tečné k vlnoploše:

Vyzařování elektromagnetických vln

- Protože je pole ***E*** kolmé ke směru ***s*** , je možné ho vyjádřit pomocí kolmé složky, tedy projekce vektoru do roviny tečné k vlnoploše $p_{\perp} = p\sin\theta$:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\ddot{\boldsymbol{p}}_{\perp}(\tau)}{4\pi\varepsilon v^2 r}$$



- Hustota toku energie ve vlnové zóně:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu v}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}) = \frac{1}{Z}E^2\boldsymbol{s}$$

- Za pomoci:

$$Z = \frac{E}{H} = \mu v = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

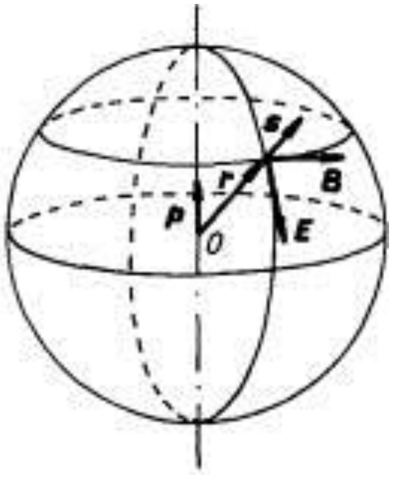
$$\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E} = v\boldsymbol{B}, \qquad E = vB$$

- Tok energie tedy míří směrem ***s*** , jeho hustota má velikost:

$$S(\boldsymbol{r},t) = \frac{\left|\ddot{\boldsymbol{p}}_{\perp}(\tau)\right|^2}{16\pi^2\varepsilon^2 v^4 Z r^2}$$

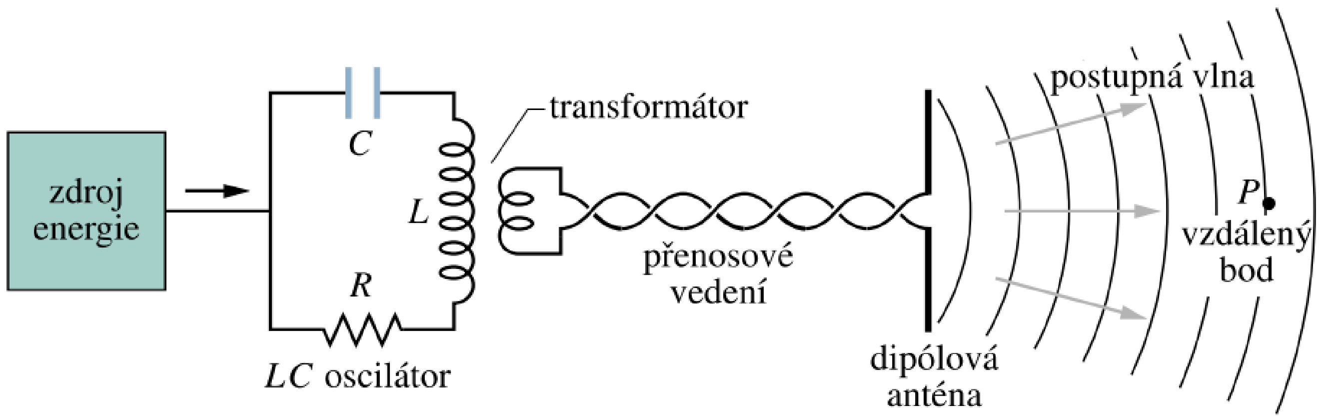
Vyzařování elektromagnetických vln

- Hustota toku energie klesá se čtvercem vzdálenosti.
- Energie procházející každým okamžikem kulovou plochou o velkém poloměru *r* nezávisí tedy na *r.*
- Tato energie generovaná dipólem ***p*** je elektromagnetickým polem unášena nenávratně pryč.
- Právě takové pole nazýváme *elektromagnetickým zářením.*



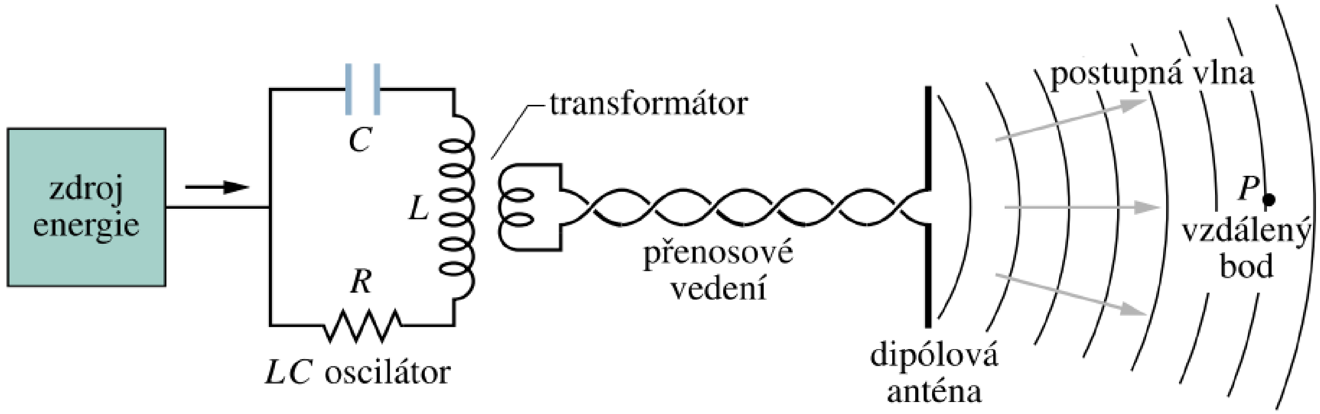
Generace postupné el.-mg. vlny

- Oblast spektra s vlnovými délkami kolem 1 m, kde zdroj záření (emitovaných vln) je makroskopický a má dobře ovladatelné rozměry.
- Vlny krátkých vlnových délek jsou generovány malými objekty, které je nutné popisovat kvantovou mechanikou.



- Nejpodstatnější částí je zde LC oscilátor s úhlovou frekvenci $\omega = 1/\sqrt{LC}$.
- K obvodu musí být připojen vnější zdroj, např. generátor střídavého napětí.
- Dodává energii pro kompenzaci tepelných ztrát v obvodu a energie odnášené generovanými elektromagnetickými vlnami.
- Oscilátor LC je spojen pomocí transformátoru a přenosového vedení s anténou, která se v principu skládá ze dvou tenkých vodivých tyček.

Generace postupné el.-mg. vlny



- Harmonický proud oscilátoru způsobí v tyčkách antény sinové kmity náboje s úhlovou frekvencí ω.
- Proud v tyčkách (vytvořený pohybem náboje) se mění též sinově s touž úhlovou frekvencí ω.
- Anténa se chová jako elektrický dipól, jehož elektrický dipólový moment se mění co do velikosti sinově a má směr podél antény.
- Oscilující pole tvoří dohromady elektromagnetickou vlnu, která se šíří od antény rychlostí c. Její úhlová frekvence je táž jako frekvence oscilátoru, tj. ω.

Časový průběh změny elektrického dipólu

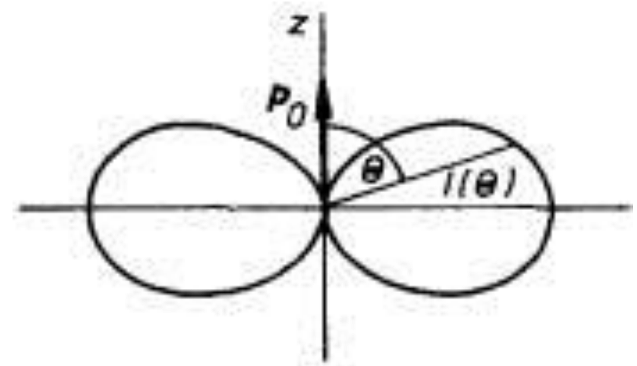
- Nechť je dipól lineárně polarizován (má konstantní směr $\boldsymbol{p}_0$, jímž proložíme osu *z*) a mění se v čase harmonicky. $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 \cos \omega t$
- Potom $\ddot{\boldsymbol{p}}_\perp^2 = \omega^4 \, p_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \omega t$
- kde θ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{p}_0$ a $\boldsymbol{s}$.
- Poyntingův vektor :

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 (\omega t - kr)}{16\pi^2 \varepsilon^2 \upsilon^4 Z r^2} \boldsymbol{s} = \frac{\upsilon k^4 p_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 (\omega t - kr)}{16\pi^2 \varepsilon r^2} \boldsymbol{s}$$

- Časová střední hodnota: $$\boxed{\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{\upsilon k^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \varepsilon r^2} \boldsymbol{s} .}$$
- Abs. hodnota $\langle S \rangle = I(\theta)$ - intenzita záření v daném směru.
- Je vyjádřena vyzařovacím diagramem.

Časový průběh změny elektrického dipólu

- Úhlové rozložení je vyjádřena vyzařovacím diagramem.
- Dipól vyzařuje s maximální intenzitou ve směru $\theta = \pi/2$, zatímco ve směrech $\theta = 0, \pi$ je intenzita záření nulová.



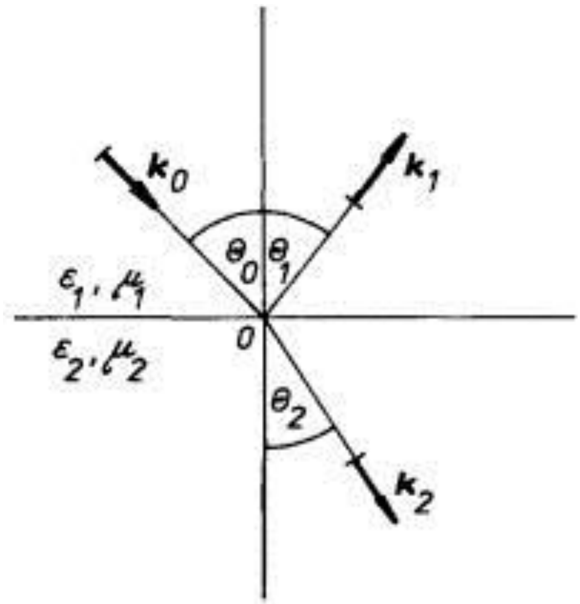
- Celkový časově střední výkon vyzařovaný dipólem do prostoru najdeme integrováním intenzity záření $I(\theta)$ ve sférických souřadnicích r, φ , θ přes celý prostorový úhel 4π :

$$\boxed{\langle P\rangle = \int_{4\pi} I(\theta) r^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{\nu k^4 p_0^2}{32\pi^2\varepsilon}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\nu k^4 p_0^2}{12\pi\varepsilon}}$$

- Platí: $$\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = 4/3$$

Odraz a lom elektromagnetických vln

- Monochromatická lineárně polarizovaná rovinná el.-mg. vlna dopadá na rozhraní dvou nevodivých prostředí charakterizovaných materiálovými konstantami ε_1, μ_1 a ε_2, μ_2 či indexy lomu n_1, n_2.
- Označme vlnové vektory dopadající, odražené a lomené vlny $\boldsymbol{k}_0$, $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$.
- Rovinu určenou normálou k rozhraní $\boldsymbol{n}$ a vektorem $\boldsymbol{k}_0$ nazvěme *rovinou dopadu*.
- Z důvodu symetrie budou všechny tři vlny budou rovinné a vektory $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$ budou ležet v *rovině dopadu*.



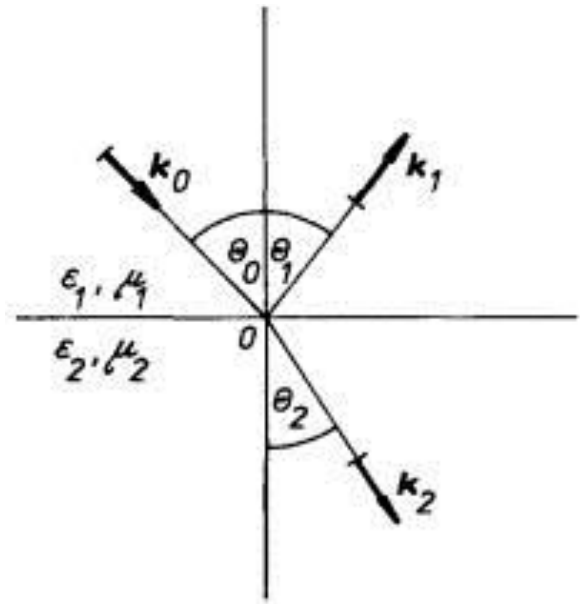
- Tečné složky el. pole $\boldsymbol{E}$ na rozhraní musí být spojité
- Pro libovolné t a $\boldsymbol{r}$ musí pro body rozhraní platit:

$$E_{0t}\cos\left(\omega_0 t-\boldsymbol{k}_0 .\boldsymbol{r}+\alpha_0\right)+E_{1t}\cos\left(\omega_1 t-\boldsymbol{k}_1 .\boldsymbol{r}+\alpha_1\right)=E_{2t}\cos\left(\omega_2 t-\boldsymbol{k}_2 .\boldsymbol{r}+\alpha_2\right)$$

- To lze splnit jen tak, že:

$$\omega_0=\omega_1=\omega_2=\omega\ , \qquad k_{0t}=k_{1t}=k_{2t}\ , \qquad \alpha_0=\alpha_1=\alpha_2$$

Odraz a lom elektromagnetických vln



- takže: $k_0 \sin\theta_0 = k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$
- s použitím disperzních vztahů:

$$\omega = \upsilon_1 k_0 = \upsilon_1 k_1$$

- **Zákon odrazu**: $\theta_0 = \theta_1$

- **Snellův zákon lomu**:

$$\boxed{\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}.}$$

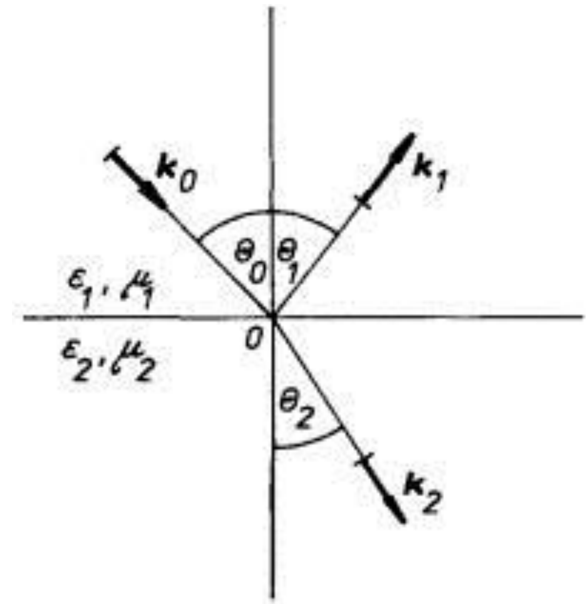
- Poměr amplitud dopadající, odražené a lomené vlny:
- Musí být spojité tečné složky ***E*** a normálové složky ***D*** (obecný vztah, zde indexy neodpovídají tomuto příkladu): $E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$, $D_1 \cos\theta_1 = D_2 \cos\theta_2$

Odraz a lom elektromagnetických vln

- Takže platí pro amplitudy dopadající, odražené a lomené vlny:

$$\boldsymbol{n}\,.\left[\varepsilon_1\left(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1\right)-\varepsilon_2\,\boldsymbol{E}_2\right]=0$$

$$\boldsymbol{n}\times\left[\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\right]=\boldsymbol{0}$$



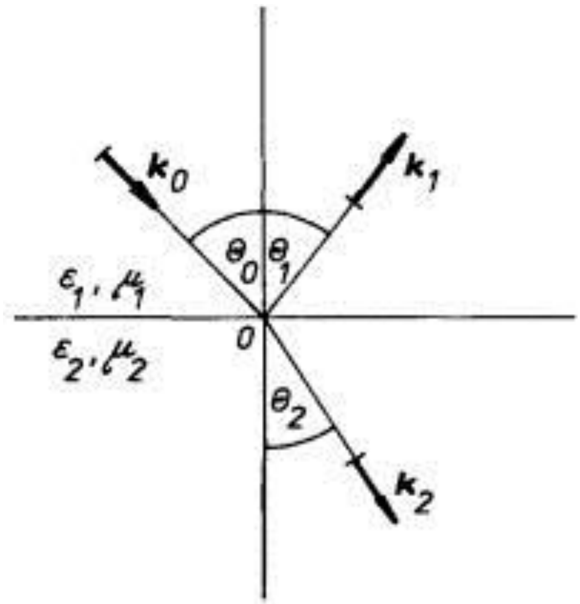
- A ze spojitosti tečných složek H a normálových složek B (nemáme žádné plošné proudy) a $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}=\upsilon\,\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{n}.\left[\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\left(\boldsymbol{s}_0\times\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{E}_1\right)-\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{E}_2\right]=0$$

$$\boldsymbol{n}\times\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(\boldsymbol{s}_0\times\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{E}_1\right)-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\,\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{E}_2\right]=\boldsymbol{0}$$

- kde $\boldsymbol{s_i}=\boldsymbol{k_i}/k_i$ pro i = 0,1,2

Odraz a lom elektromagnetických vln



- Případ vlny polarizované kolmo k rovině dopadu

$$\boldsymbol{n}\,.\left[\varepsilon_1\left(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1\right)-\varepsilon_2\,\boldsymbol{E}_2\right]=0$$

- Vztah výše splněn identicky.

$$\boldsymbol{n}\times\left[\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\right]=\boldsymbol{0}$$

$$\frac{E_2}{E_0}=\frac{E_1}{E_0}+1$$

- Totéž plyne i ze vztahu $\boldsymbol{n}.\left[\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\left(\boldsymbol{s}_0\times\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{E}_1\right)-\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{E}_2\right]=0$

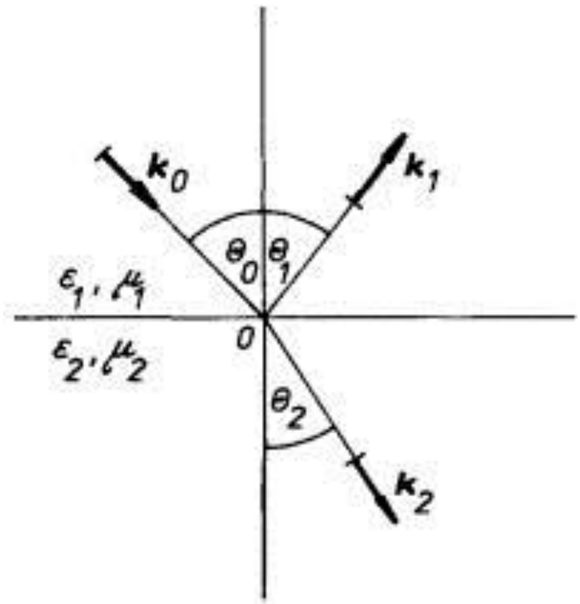
$$\boldsymbol{n}\times\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(\boldsymbol{s}_0\times\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{E}_1\right)-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\,\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{E}_2\right]=\boldsymbol{0}$$

- s uvážením $\boldsymbol{n}.\boldsymbol{s}_0=-\boldsymbol{n}.\boldsymbol{s}_1=-\cos\theta_1,\ \boldsymbol{n}.\boldsymbol{s}_2=\cos\theta_2$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(\frac{E_1}{E_0}-1\right)\cos\theta_1+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\,\frac{E_2}{E_0}\cos\theta_2=0$$

Odraz a lom elektromagnetických vln

$$\boldsymbol{n} \times \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \left(\boldsymbol{s}_0 \times \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{E}_1 \right) - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \boldsymbol{s}_2 \times \boldsymbol{E}_2 \right] = \boldsymbol{0}$$



- s uvážením

$$\boldsymbol{n}.\boldsymbol{s}_0 = -\boldsymbol{n}.\boldsymbol{s}_1 = -\cos\theta_1,\ \boldsymbol{n}.\boldsymbol{s}_2 = \cos\theta_2$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \left(\frac{E_1}{E_0} - 1 \right) \cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{E_2}{E_0} \cos\theta_2 = 0$$

- k tomu $$\frac{E_2}{E_0} = \frac{E_1}{E_0} + 1$$

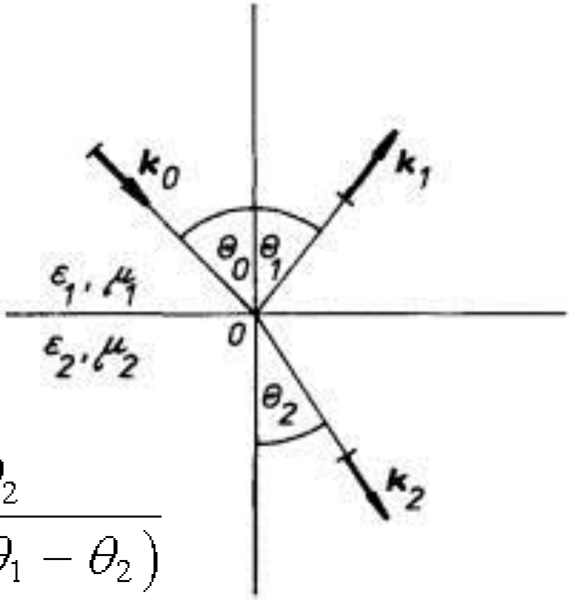
- V elektrických prostředích můžeme aproximovat $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, a výsledek se tím podstatně zjednoduší:

$$\left(\frac{E_1}{E_0} \right)_\perp = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}, \qquad \left(\frac{E_2}{E_0} \right)_\perp = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$

Odraz a lom elektromagnetických vln

- Fresnelovy vzorce
- Případ vlny polarizované kolmo k rovině dopadu

$$\left(\frac{E_1}{E_0}\right)_{\perp} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}, \qquad \left(\frac{E_2}{E_0}\right)_{\perp} = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$



- Případ vlny polarizované rovnoběžně s rovinou dopadu

$$\left(\frac{E_1}{E_0}\right)_{||} = \frac{\mathrm{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\mathrm{tg}(\theta_1 + \theta_2)}, \qquad \left(\frac{E_2}{E_0}\right)_{||} = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Pro případ kolmého dopadu (tedy bez ohledu na polarizaci vlny)

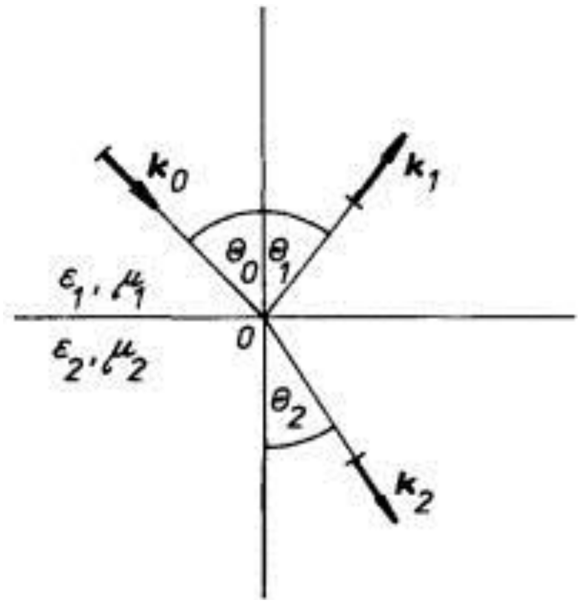
$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \qquad \frac{E_2}{E_0} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Odraz a lom elektromagnetických vln

- V praxi se obyčejně používá jak koeficient odrazu *R* i koeficient propustnosti *T* úměrný čtverci amplitud.

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}, \qquad R_{\parallel} = \frac{\mathrm{tg}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\mathrm{tg}^2(\theta_1 + \theta_2)}.$$

$$T_{\perp} = 1 - R_{\perp} \qquad\qquad T_{\parallel} = 1 - R_{\parallel}$$



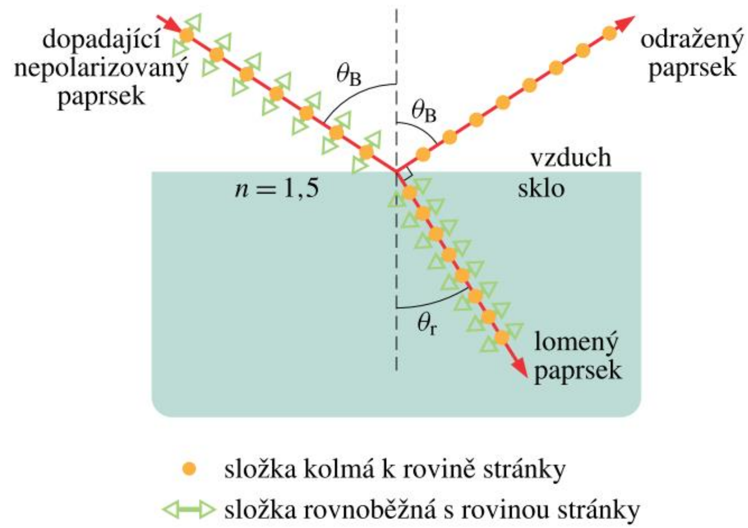
- Zajímavé důsledky:
- Pro $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2 \Rightarrow R_{\parallel} = 0$, tečně polarizovaná vlna prochází bez odrazu.
- Nastává to pro $\theta_0 = \theta_B$ takový, že $\mathrm{tg}\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$

  - Brewsterův úhel
- Odražené světlo je polarizováno kolmo k rovině dopadu.

$$n_1 \sin\theta_{\mathrm{B}} = n_2 \sin\theta_{\mathrm{r}}$$

$$\theta_{\mathrm{B}} + \theta_{\mathrm{r}} = 90^\circ$$

$$n_1 \sin\theta_{\mathrm{B}} = n_2 \sin(90^\circ - \theta_{\mathrm{B}}) = n_2 \cos\theta_{\mathrm{B}}$$



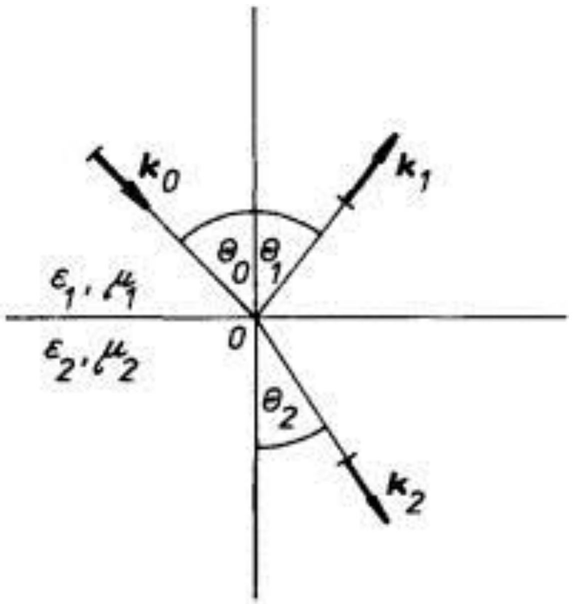
- D. Brewster, 1812

Odraz a lom elektromagnetických vln

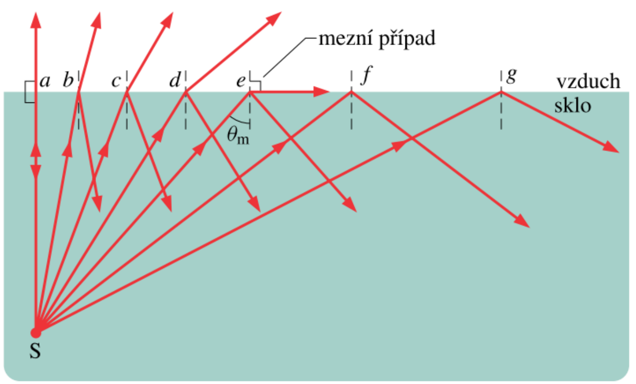
- V praxi se obyčejně používá jak koeficient odrazu *R* i koeficient propustnosti *T* úměrný čtverci amplitud.

$$R_\perp = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}\ , \qquad R_\parallel = \frac{\mathrm{tg}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\mathrm{tg}^2(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$T_\perp = 1 - R_\perp \qquad\qquad T_\parallel = 1 - R_\parallel$$



- Zajímavé důsledky:
- Pro $\theta_2 \geq \pi/2 \Rightarrow$ totální odraz vlny na rozhraní.
- Mezní úhel $\theta_0 = \theta_T$, takový, že $\sin\theta_T = \frac{n_2}{n_1}$



- K totálnímu odrazu může dojít jen při přechodu z prostředí o větším indexu lomu do prostředí s menším indexem lomu, a to při libovolné polarizaci vlny.