Rovinná elektromagnetická vlna

- Pp., že celý prostor je vyplněn homogenním nevodivým prostředím o permitivitě ε a permeabilitě μ , ve kterém nejsou přítomny žádné volné náboje.
- M. r.:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0 \,, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \,, \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \,,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \,, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \,, \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \,.$$

- 2x aplikace rotace na 2. a 3. M. r.:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \,,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{D} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \,.$$

- rot rot$\boldsymbol{F}$ = grad div$\boldsymbol{F}$ - $\Delta\boldsymbol{F}$; div$\boldsymbol{E}$ = div$\boldsymbol{B}$ = 0:

Rovinná elektromagnetická vlna

$$\Delta \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0}\,, \qquad \Delta \boldsymbol{B} - \varepsilon\,\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0}\,.$$

- vlnová rovnice pro ***E*** i ***B***. Zapíšeme rci obecně pro *f* = ***E, B***.

$$\Delta f - \varepsilon\,\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0\,.$$

- dosadíme obecný vztah pro rovinnou vlnou: $f(\xi) = f(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{r} - \upsilon\, t)$
- dostaneme: $$\left(1 - \varepsilon\,\mu\upsilon^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0\,.$$
- rovnice bude splněna pro jakékoliv f, pokud $$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}$$

- Rovinná vlna je řešením vlnové rovnice.
- Jedná se jen o jedno z nekonečně mnoha možných řešení vlnové rovnice.
- Řešením je i libovolná lineární kombinace rovinných vln.

Rovinná elektromagnetická vlna

- ***E*** a ***B*** se mohou šířit prostředím jako rovinné vlny. Zapíšeme rci obecně pro f = ***E, B***.
- Fázová rychlost $$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$
- Ve vakuu je fázová rychlost *c*.
- Maxwell: souvislost fázové rychlosti vyplývající z rovnic elektromagnetického pole, s rychlostí světla ve vakuu není náhodná
- Hypotéza o *elektromagnetické povaze světla.*
- Šíření elektromagnetických vln (světla) v látkovém prostředí se obvykle charakterizuje (absolutním) **indexem lomu** *n* :

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \quad .$$

- Protože pro většinu látek $\mu_r \approx 1$, $\varepsilon_r \geq 1$, je $n \geq 1$ a **elektromagnetické vlny se šíří v látkovém prostředí pomaleji než ve vakuu**.

Rovinná elektromagnetická vlna

- Libovolné funkce $\boldsymbol{E}(\xi)$ a $\boldsymbol{B}(\xi)$ teoreticky nemusí vyhovovat celé soustavě M. r..
- Mezi prostorovými derivacemi a časovou derivací funkce $\boldsymbol{E}(\xi)$ platí vztahy:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = -\frac{s_x}{v}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} = -\frac{s_y}{v}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z} = -\frac{s_z}{v}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

- Můžeme rot $\boldsymbol{E}$ vyjádřit pomocí časové derivace:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{v}\left(\boldsymbol{s}\times\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E})$$

- Porovnání se 3. M.r.: $$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}) = v\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

- Integrace (int. konstanta = 0), analogicky pro $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$:

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \frac{1}{v}(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E}).} \qquad \boxed{\boldsymbol{E} = -v(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{B}).}$$

Rovinná elektromagnetická vlna

- Rovinná elektromagnetická vlna *příčná, transverzální.*
- Vektory ***s*** , ***E*** , ***B*** tvoří v napsaném pořadí pravotočivý ortogonální systém (v pravotočivém vztažném systému).
- ***B*** je pseudovektor - nemění znaménko při inverzi souřadnic takže v levotočivém souřadném systému budou vektory tvořit levotočivý systém, a tedy fyzikální realita zůstane stejná.

- *Charakteristická impedance prostředí*:

$$Z = \frac{E}{H} = \mu \upsilon = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

- Charakteristická impedance vakua:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0\, c = 120\pi\,(\Omega) = 377(\Omega)$$

- Prostředí šíření vln lze popisovat fázovou rychlostí *v* (respektive indexem lomu *n*) a charakteristickou impedancí *Z*.
- Hustota energie *w* a hustota toku energie ***S:***

$$w = \frac{E^2}{\mu \upsilon^2}, \quad \mathbf{S} = \frac{E^2}{\mu \upsilon}\mathbf{s} = w\upsilon\,\mathbf{s}$$

Monochromatická rovinná elektromagnetická vlna

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\mathbf{t}) = E_0\cos(\xi + \alpha) = E_0\cos(k\boldsymbol{s}.\boldsymbol{r} - kvt + \alpha)$$

- ***k*** = *k**s*** vlnový vektor (*k* - vlnové číslo, úhlový vlnočet)
- ω = *kv* úhlová frekvence (*v* -fázová rychlost)
- α fázová konstanta (počáteční fáze)
- můžeme zavést různé fázové konstanty pro různé složky ***E*** - *polarizace* vlny

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\mathbf{t}) = E_0\cos(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t + \alpha)$$

- přehled vztahů (ν kmitočet, frekvence; σ vlnočet):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad\qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$$

- ω = *kv* *disperzní vztah* pro rovinnou monochromatickou el.-mg. vlnu a vyjadřuje souvislost časového a prostorového průběhu vlny.
- Pro jiné typy vln může disperzní vztah nabývat složitější podoby, zejména může fázová rychlost *v = ω/k* být funkcí úhlového kmitočtu *ω* nebo vlnového čísla *k, tj. nemusí být konstantní.*
- V takových případech mluvíme o *časové a prostorové disperzi* vlny.

Monochromatická rovinná elektromagnetická vlna

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\mathbf{t}) = E_0\cos(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t + \alpha)$$

- Najdeme odpovídající vztah pro B:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{v\,k}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{B}_0\cos(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t + \alpha)$$

$$\boldsymbol{B}_0 = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0$$

- ***E*** a ***B*** se mění v každém okamžiku a v každém bodě prostoru s touž fází, vektory ***E*** a ***B*** zůstávají **navzájem kolmé** a **společně kolmé ke směru šíření vlny**.
- Poměr amplitud i velikostí v každém okamžiku:

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{E}{B} = v$$

- **ve vakuu** $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

Monochromatická rovinná elektromagnetická vlna

- Zvolme kartézskou osu *z* ve směru šíření vlny ***k*** . Vektory ***E*** a ***B*** leží tedy v rovině *xy.* Při splnění všech dosud odvozených obecných vztahů zůstává ještě neurčitost v poloze vektoru ***E*** vůči osám *x, y.*
- Složky vektoru ***E*** do směru os *x* a *y* můžeme obecně vyjádřit:

$$E_x = E_{x0} \cos(kz - \omega t + \alpha_1), \qquad E_y = E_{y0} \cos(kz - \omega t + \alpha_2)$$

- E_{x0} a E_{y0} jsou amplitudy kmitů ve směru souřadných os, α_1 a α_2 **obecně různé** fázové konstanty.
- Označíme:

$$\varphi = kz - \omega t + \alpha_1$$

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1$$

- Potom:

$$E_x = E_{x0} \cos\varphi, \ E_y = E_{y0} \cos(\varphi + \delta) = E_{y0} (\cos\varphi \cos\delta - \sin\varphi \sin\delta)$$

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

Monochromatická rovinná elektromagnetická vlna

$$E_x = E_{x0}\cos\varphi,\ E_y = E_{y0}\cos(\varphi+\delta) = E_{y0}(\cos\varphi\cos\delta - \sin\varphi\sin\delta)$$

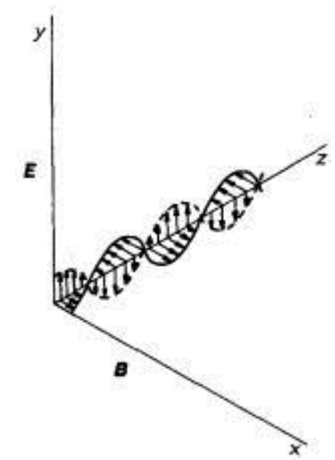
$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - \frac{2E_x E_y}{E_{x0}E_{y0}}\cos\delta = \sin^2\delta$$

- Proměnné E_x a E_y nám v této rovnici udávají trajektorii pohybu koncového bodu vektoru ***E*** v rovině *xy.*
- Rovnice představuje rovnici elipsy se středem v počátku souřadnic.
- Monochromatická vlna je obecně *elipticky polarizována.*
- Bude-li $\delta = n\pi$, kde *n* je celé číslo:

$$E_y = \frac{E_{y0}}{E_{x0}} E_x$$

- ***E*** bude oscilovat podél přímky daného směru vzhledem k osám souřadnic. Říkáme, že taková vlna je *lineárně polarizována.*



Monochromatická rovinná elektromagnetická vlna

$$E_x = E_{x0}\cos\varphi,\ E_y = E_{y0}\cos(\varphi+\delta) = E_{y0}(\cos\varphi\cos\delta - \sin\varphi\sin\delta)$$

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

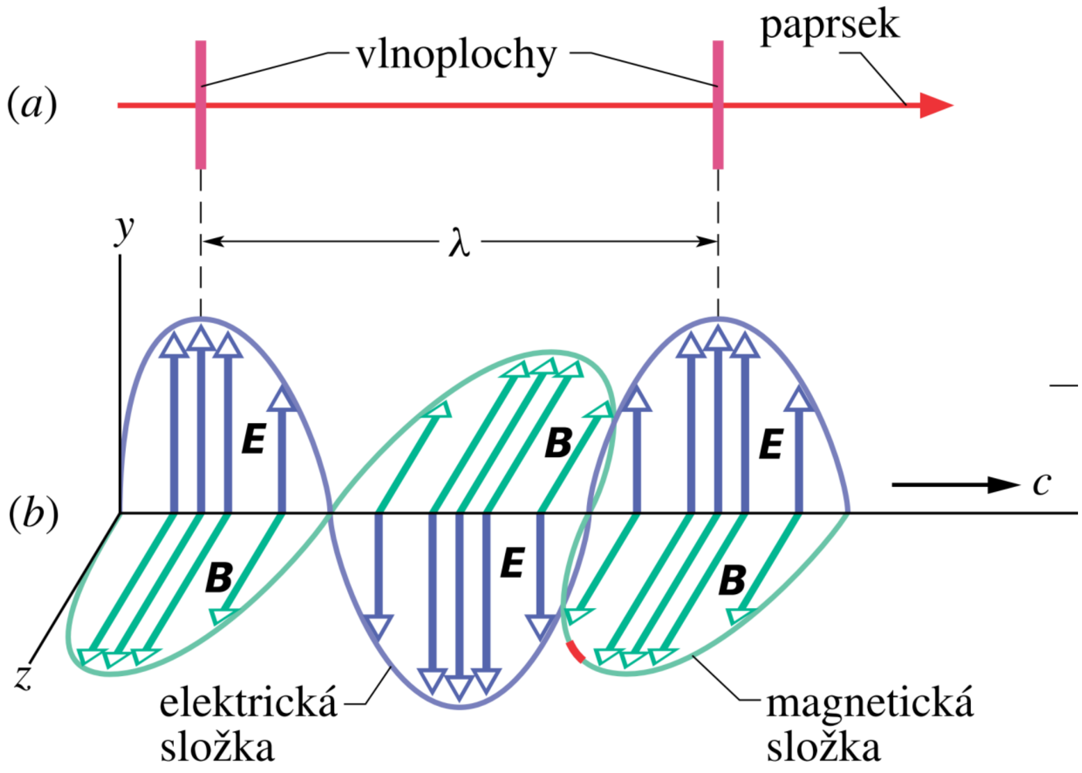
$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - \frac{2E_x E_y}{E_{x0}E_{y0}}\cos\delta = \sin^2\delta$$

- Proměnné E_x a E_y nám v této rovnici udávají trajektorii pohybu koncového bodu vektoru ***E*** v rovině *xy.*
- Rovnice představuje rovnici elipsy se středem v počátku souřadnic.
- Monochromatická vlna je obecně *elipticky polarizována.*
- Bude-li $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$, kde *n* je celé číslo:

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 = 1$$

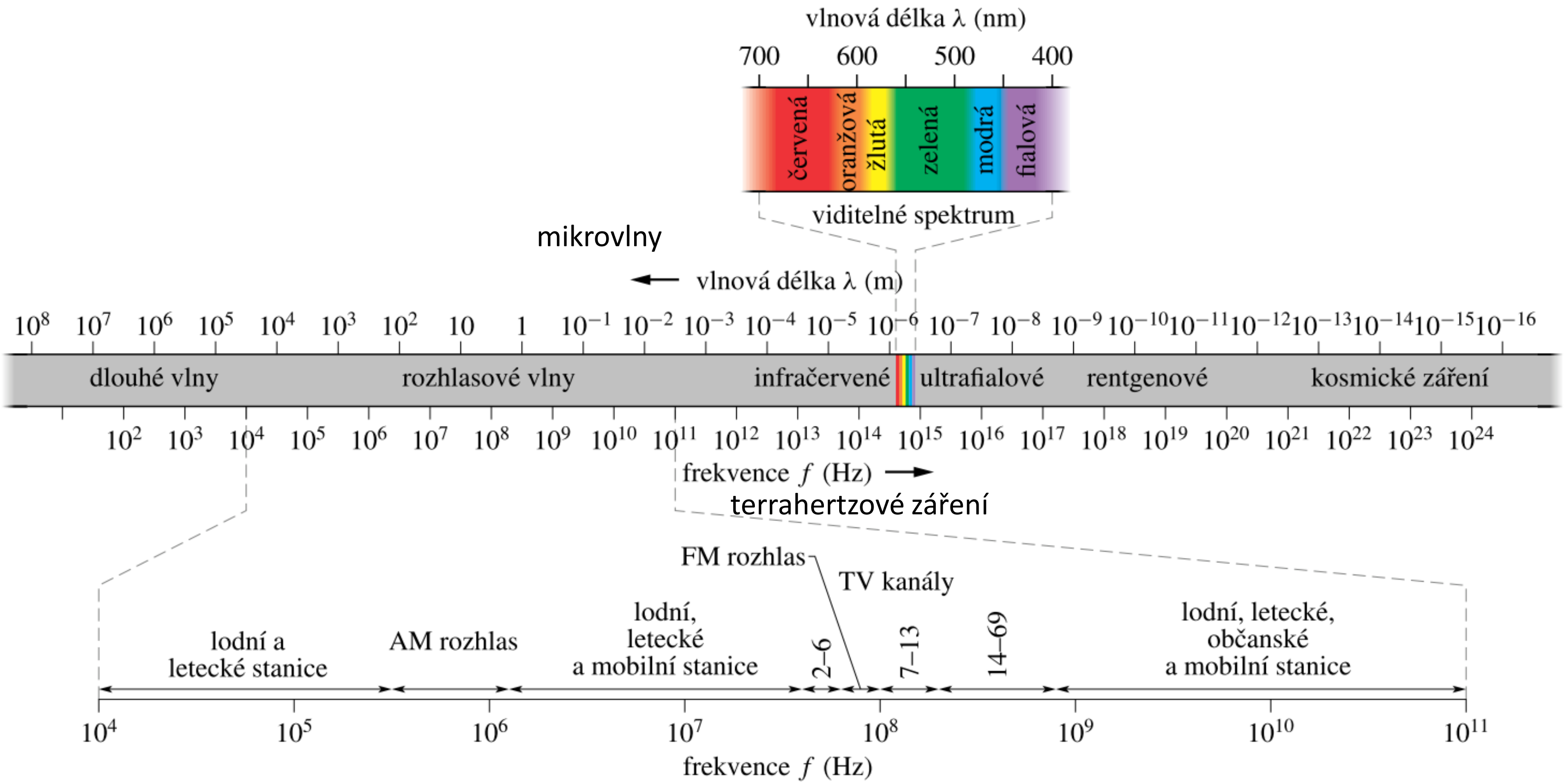
- Bude-li navíc $E_{x0} = E_{y0}$, bude koncový bod vektoru ***E*** opisovat kružnici a vlna bude *kruhově polarizována.* Může být přitom jak pravotočivá, tak levotočivá.

Monochromatická rovinná elektromagnetická vlna

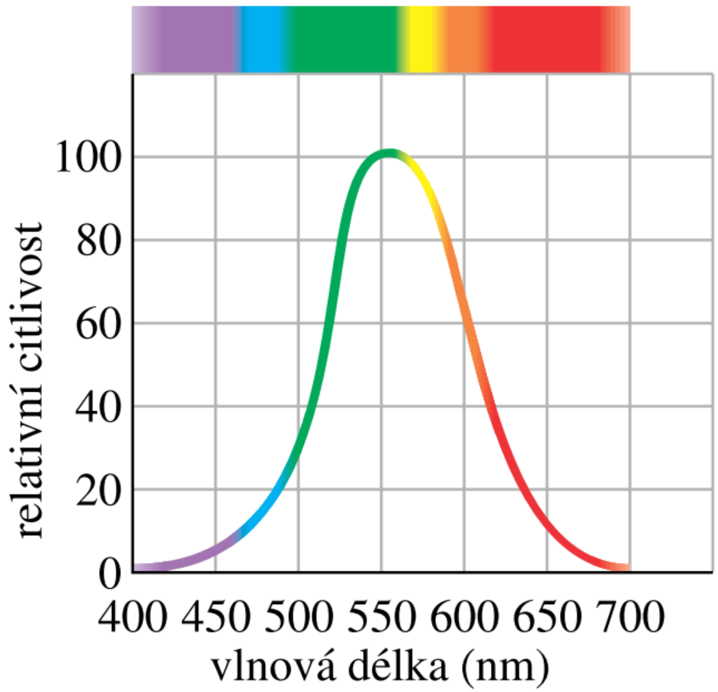


- *Lineárně polarizovaná* monochromatická vlna.

Spektrum elektromagnetických vln



Spektrum elektromagnetických vln



- Relativní citlivost lidského oka k elektromagnetickým vlnám různých vlnových délek (cca 430 - 690 nm). Tato část spektra je tvořena viditelným zářením.

Energie elektromagnetických vln (ve vakuu)

- Poyntingův vektor ***S***

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}$$

- velikost S:

$$S = \frac{1}{\mu_0} E B,$$

- okamžitý tok energie:

$$S = \frac{1}{c\mu_0} E^2$$

$$E = E_\mathrm{m} \sin(kx - \omega t)$$

- časová střední hodnota toku energie: $I = \overline{S} = \frac{1}{c\mu_0} E_\mathrm{m}^2 \overline{\sin^2(kx - \omega t)}$

$$\bar{S} = \frac{1}{2c\mu_0} {E_m}^2$$

- efektivní intenzita záření:

$$E_\mathrm{ef} = \frac{E_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \qquad I = \frac{1}{c\mu_0} E_\mathrm{ef}^2$$

Energie elektromagnetických vln

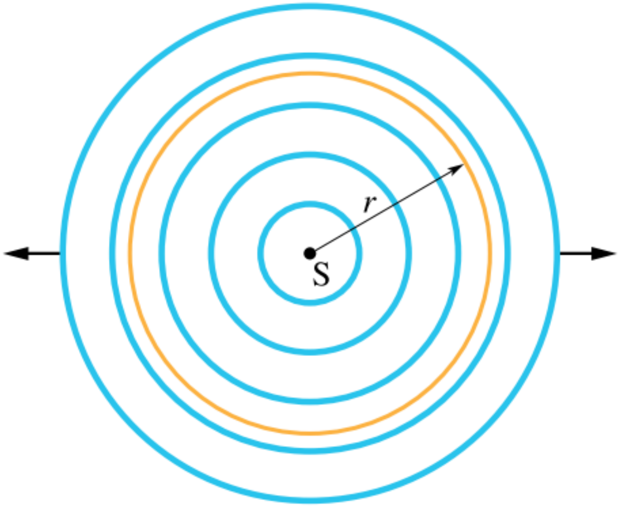
- Hustota energie elektrického a magnetického pole vlny je stejná:

$$w_{\mathrm{el}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 (cB)^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} B^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Energie elektromagnetických vln

- Změna intenzity záření se vzdáleností - obecně složitý problém
- Pp. bodový zdroj vln, vyzařující izotropně - kulové vlnoplochy.
- Výkon zdroje P_s.
- Veškerá energie musí protéct příslušnou kulovou plochou.

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2}$$

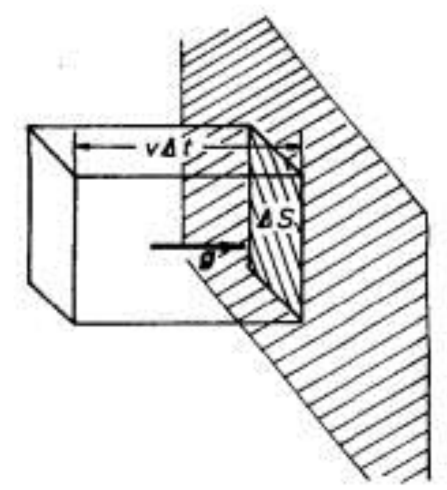


- Intenzita záření vysílaného izotropním bodovým zdrojem klesá kvadraticky.

Tlak záření

- El.-mg. poli přísluší objemová hustota energie *w* a hustota hybnosti ***g:***

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{S}}{v^2} = \frac{w}{v}\,\boldsymbol{s}$$



- el.-mg. záření dopadá kolmo na povrch látkového tělesa, v němž se toto záření zcela pohltí.
- Záření odevzdá za dobu Δt na části povrchu tělesa ΔS hybnost obsaženou v objemu

  $\Delta V = \mathrm{v}\Delta t\Delta S$

$$\Delta \boldsymbol{G} = \boldsymbol{g}\,\Delta V = w\,\Delta t\,\Delta S\,\boldsymbol{s}$$

- Odpovídající síla působící na těleso:

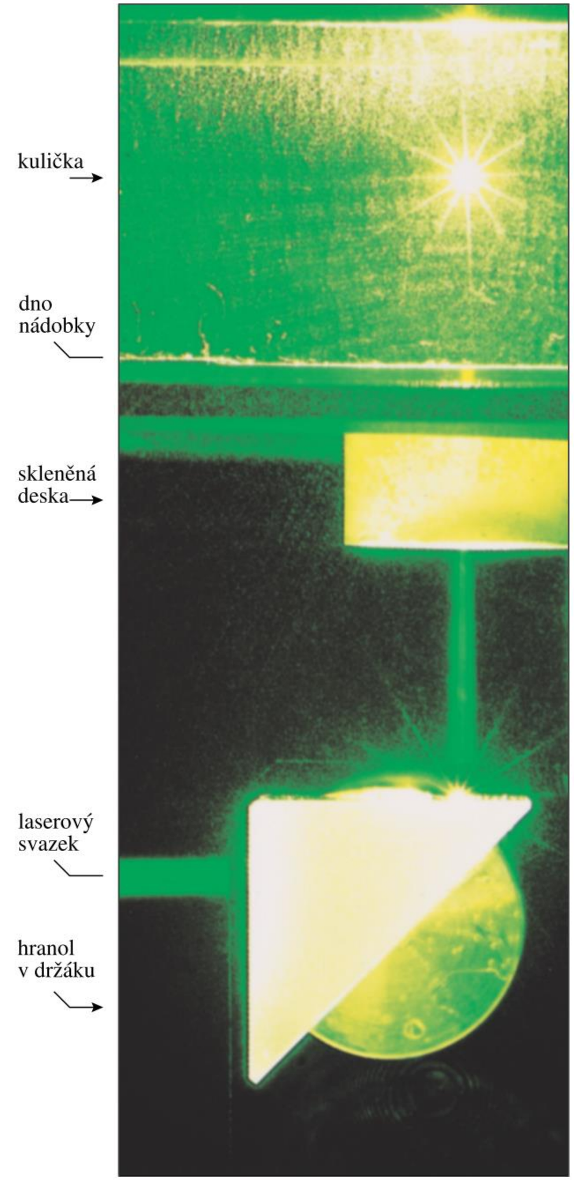
$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} = w\,\Delta S\,\boldsymbol{s}$$

- Tlak síly: $p = \dfrac{F}{\Delta S} = w$

Tlak záření

- Záření vyvíjí na jednotku plochy povrchu tělesa tlak rovný hustotě energie rovinné vlny *w.*
- Je-li **povrch tělesa dokonale odrazivý**, změní se hybnost záření při odrazu na opačnou a tlak se zdvojnásobí.
- Je-li koeficient odrazu povrchu *R*, bude tento tlak roven $(1 + R)w$.
- Experimentální důkaz existence tlaku světla podal P. N. Lebeděv v r. 1899.
- Sluneční záření dopadající na povrch Země přináší výkon o plošné hustotě kolem $1\ \mathrm{kW/m^2}$ (velikost Poyntingova vektoru), což odpovídá tlaku 3.10^{-6} Pa.
- Současné výkonné lasery - okamžitá plošná hustota výkonu až $10^{19}\ \mathrm{W/m^2}$, a tedy tlak záření 3.10^{10} Pa.

$$S = wc = pc$$



Povrchový jev (skinefekt)

- Šíření el.-mg. vln ve vodivém prostředí.
- Má-li prostředí vodivost $\gamma \neq 0$, Ohmův zákon $\boldsymbol{j} = \gamma \boldsymbol{E}$, 2. M.r.:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \gamma \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

- Stejné odvození jako pro vlnové rovnice: $\Delta \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0}$, $\Delta \boldsymbol{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0}$.

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0}$$

- Zobecněná vlnová rovnice.
- Popisuje šíření tlumené elektromagnetické vlny.
- Vzhledem k vodivosti prostředí mění se část energie vlny v Jouleovo teplo a amplituda vlny postupně slábne.

Povrchový jev (skinefekt)

- Pro velmi dobré vodiče a nepříliš vysoké kmitočty ($\omega << \gamma\, \varepsilon$) můžeme v rovnici zanedbat posuvný proud.
- Potom z rovnic $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \gamma \boldsymbol{E}$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
- s uvážením toho, že uvnitř vodiče div***E*** = 0:

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

- Pro harmonický průběh vlny: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$
- Získáme rovnici pro časově nezávislý vektor $\boldsymbol{E}_0$: $\Delta \boldsymbol{E}_0 - \mathrm{i}\,\omega\,\mu\,\gamma\,\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{0}$
- Nechť se pole šíří ve směru osy z a vektor $\boldsymbol{E}_0$ míří podél osy x.
- Obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu.

Povrchový jev (skinefekt)

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_0}{\mathrm{d}\, z^2} - \mathrm{i}\,\omega\,\mu\,\gamma\, E_0 = 0$$

- řešení: $$E_0 = C_1\, \mathrm{e}^{\alpha_1 t} + C_2\, \mathrm{e}^{\alpha_2 t}$$

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\mathrm{i}\,\omega\,\mu\,\gamma} = \pm\sqrt{\frac{\omega\,\mu\,\gamma}{2}}\left(1+\mathrm{i}\right) = \pm\left(1+\mathrm{i}\right)\delta$$

$$E_0 = C_1\, \mathrm{e}^{\delta z}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\delta z} + C_2\, \mathrm{e}^{-\delta z}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\delta z}$$

- Aby pole nenarůstalo do nekonečna, musíme položit $C_1 = 0$

$$E_x = C_2\, \mathrm{e}^{-\delta z}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \delta z\right)}$$

- Proudová hustota

$$j_x = \gamma\, E_x = j_0\, \mathrm{e}^{-\delta z}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \delta z\right)}$$

Povrchový jev (skinefekt)

- Při kolmém dopadu el.-mg. monochromatické rovinné vlny na hranici polopro-storu zaplněného vodivým prostředím bude složka elektrického pole rovnoběžná s rozhraním při pronikání do vodiče zmenšovat svou amplitudu s koeficientem útlumu:

$$\delta = \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}}$$

- Při protékání střídavého elektrického proudu vodičem v kvazistacionárním přiblížení bude velikost proudové hustoty klesat exponenciálně v závislosti na vzdálenosti od povrchu vodiče. Převážná část proudu poteče tedy v povrchové vrstvě tloušťky $1/\delta$.
- Jde o takzvaný *povrchový jev* (*skinefekt*, z angl. skin = kůže) a projevuje se tím výrazněji, čím vyšší je kmitočet pole (v rámci použitého přiblížení) a vodivost vodiče.