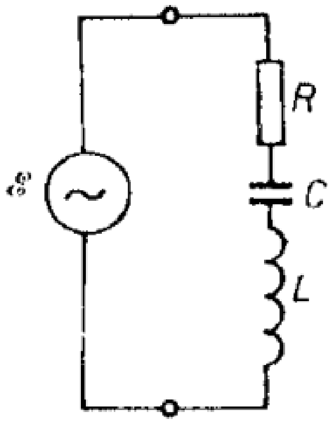
Rekapitulace: energie ve statických a stacionárních soustavách

- Elektrostatické pole: záporně vzatá práci, kterou musely vykonat vnější síly při vytváření konečné konfigurace dané elektrostatické soustavy.
- Veškerá uvedená práce byla vynaložena na překonání elektrostatických sil mezi náboji.
- Tyto síly pak mohou při pohybu nábojů samy konat práci na vrub energie elektrostatického pole.
- Energie elektrostatického pole je ovšem konstanta a elektrostatické pole žádnou práci nekoná.

- Stacionární elektrické pole je popsáno formálně totožnými rovnicemi jako pole elektrostatické, energie stacionárního elektrického pole je rovněž konstantní
- Kvalitativně novou skutečností je však platnost Jouleova zákona
- Stacionární elektrické pole ve vodiči může být trvale udržováno jen působením pole vtištěných sil, které trvale konají práci, jež se spojitě mění v Jouleovo teplo.
- Energie stacionární magnetického pole zatím nebyla řešena.
- Nyní lze zahrnout jev el.-mag. indukce.

Zákon zachování energie v kvazistacionárních soustavách



- Obvod sestávající se ze sériového spojení indukčnosti *L*, kapacity *C* a odporu R_c, ve kterém působí zdroj časově proměnného elektromotorického napětí $\mathcal{E}(t)$.

$$R_c I(t) + U_C(t) = \mathcal{E}(t) - \frac{d\Psi}{dt}$$

- El.-mot napětí přenese náboj d*Q* = *I*(*t*)d*t*

$$\boxed{I(t)d\Psi + U_C dQ + R_C I^2(t)dt = \mathcal{E}(t)\, I(t)dt}$$

- $\mathcal{E}(t)I(t)dt$ práce dodaná do stacionárního obvodu vtištěnými silami v časovém intervalu d*t*
- Okamžitý výkon vtištěných sil: $N_z(t) = \mathcal{E}(t)I(t)$

- $R_C I^2(t)dt$ okamžitý výkon přeměňovaný ve vodičích obvodu na Jouleovo teplo.
- $U_C dQ$ změna energie elektrostatického pole kondenzátoru, spojená se změnou jeho náboje d*Q*.
- $dW_m = Id\Psi$ změna energie magnetického pole.

- *Energie dodávaná polem vtištěných sil se mění jednak na Jouleovo teplo, jednak je vynakládána na změny elektrického a magnetického pole.*

Zákon zachování energie v kvazistacionárních soustavách

- *Energie dodávaná polem vtištěných sil se mění jednak na Jouleovo teplo, jednak je vynakládána na změny elektrického a magnetického pole.*

- Energie mg. pole:
- $dW_m = Id\Psi$ - integrace obecně závisí na vlastnostech prostředí
- Pro lineární prostředí: $\Psi = LI$
- - energie W_m mg. pole buzeného smyčkou (zhotovenou z vodiče o malém průřezu) o vlastní indukčnosti *L*, jíž protéká proud *I* vytvářející celkový magnetický tok *Ψ:*

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} I\Psi = \frac{1}{2} LI^2 .$$

Zobecnění

- N smyček tvořených vodiči zanedbatelného průřezu protékaných proudy $I_1, I_2, \ldots, I_N$.
- δW_m potřebná ke změně celkových magnetických toků $\delta\Psi_1, \delta\Psi_2, \ldots, \delta\Psi_N$ jednotlivými smyčkami

$$\boxed{\delta W_{\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{N} I_i \delta \Psi_i \,.}$$

- pro lineární prostředí integrace od nuly ke konečným hodnotám proudů s využitím vlastních a vzájemných indukčností (pp. L_i, L_{ik} nezávisí na proudech):

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{1}^{N} L_{ik} I_i I_k \qquad \boxed{W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_i \Psi_i}$$

- pro jedinou smyčku:

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} I \Psi = \frac{1}{2} L I^2 .$$

- Platí jen pro smyčky z vodiče zanedbatelného průřezu!!!

Zobecnění 2

- N smyček tvořených vodiči **ne**zanedbatelného průřezu protékaných proudy I_1, I_2, ..., I_N.
- využití vektorového potenciálu (integrace podél smyčky l)

$$\Psi_i = \oint_{l_i} \boldsymbol{A} . \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

- Proud I_i můžeme vyjádřit pomocí proudové hustoty ve tvaru plošného integrálu

$$I_i = \int_{\sigma_i} \boldsymbol{j} . \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},$$

- Integrace je uvažována přes libovolný průřez σ_i vodiče smyčky.
- Dosazení do:

$$\boxed{\delta W_{\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{N} I_i \delta \Psi_i .}$$

$$\delta W_{\mathrm{m}} = \sum_i \int_{\sigma_i} \boldsymbol{j} . \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\, \delta \oint_{l_i} \boldsymbol{A} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_i \int_{\sigma_i} \boldsymbol{j} . \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \oint_{l_i} \delta \boldsymbol{A} . \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

Zobecnění 3

- dV = d$\boldsymbol{\sigma}$ .d$\boldsymbol{l}$, kde dV je element objemu vodiče, integrace přes objem celého vodiče V_0.

$$\boxed{\delta W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_{V_0} \boldsymbol{j}\,.\,\delta \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V\,.}$$

- Pro případ lineárního prostředí, kdy je vektorový potenciál $\boldsymbol{A}(r, t)$ úměrný proudu:

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_{V_0} \boldsymbol{j}\,.\,\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V\,.$$

- Objem integrace hodně libovolný - musí obsahovat celý objem vodičů s $\boldsymbol{j} \neq 0$, okolní prostor bez proudu lze zahrnout libovolně.

Zobecnění 4

- d*V* = d***σ*** .d***l*** , kde d*V* je element objemu vodiče

$$\boxed{\delta W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_{V_0} \boldsymbol{j}\,.\,\delta\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V\,.}$$

- Pro případ lineárního prostředí, kdy je vektorový potenciál A(r, t) úměrný proudu,

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_{V_0} \boldsymbol{j}\,.\,\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V\,.$$

- Ampérův zákon: rot ***H*** = ***j*** **,** identity vektorové analýzy:

$$\delta\boldsymbol{A}\,.\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}\,.\,\mathrm{rot}(\delta\boldsymbol{A}) + \mathrm{div}(\boldsymbol{H}\times\delta\boldsymbol{A})$$

$$\delta\boldsymbol{A}\,.\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}\,.\,\delta\boldsymbol{B} + \mathrm{div}(\boldsymbol{H}\times\delta\boldsymbol{A})$$

$$\delta W_{\mathrm{m}} = \int_V (\boldsymbol{H}\,.\,\delta\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}V + \int_V \mathrm{div}(\boldsymbol{H}\times\delta\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}V$$

Zobecnění 5

$$\delta W_{\mathrm{m}} = \int_V (\boldsymbol{H}.\delta\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}V + \int_V \mathrm{div}(\boldsymbol{H}\times\delta\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}V$$

$$\delta W_{\mathrm{m}} = \int_V (\boldsymbol{H}.\delta\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}V + \oint_S (\boldsymbol{H}\times\delta\boldsymbol{A}).\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

- Objem integrace je opět libovolný - musí zahrnovat objem vodičů s proudem (oba členy se mění, ale součet je konstantní).
- Rozšíření na V $\rightarrow \infty$: druhý člen $\rightarrow$ 0 (integrand klesá s r^3, plocha roste s r^2)

$$\delta W_{\mathrm{m}} = \int_{V_\infty} (\boldsymbol{H}.\delta\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}V.$$

- Pro ideální (lineární) magneticky měkké prostředí popsané permeabilitou:

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} (\boldsymbol{H}.\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}V. \qquad w_{\mathrm{m}} = \frac{\boldsymbol{H}.\boldsymbol{B}}{2}$$

Potenciální energie magnetického tělesa ve vnějším poli

- Potenciální energie magnetického tělesa ve vnějším magnetickém poli $\boldsymbol{B}_0$.
- Řešení obdobné jako v příp. potenciální energie dielektrického tělesa v elektrickém poli.
- Přírůstek hledané potenciální energie δW je dán objemovým integrálem přes objem V_m magnetického tělesa, $\boldsymbol{M}$ je jeho magnetizace:

$$\delta W = -\int_{V_\mathrm{m}} (\boldsymbol{M}.\delta\boldsymbol{B}_0)\mathrm{d}V$$

- Hustota:

$$\delta w = -\boldsymbol{M}.\delta\boldsymbol{B}_0.$$

- Celkovou potenciální energii lze počítat jen v případě, známe-li vzájemnou sou-vislost $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{B}_0$.
- *Ideálně tvrdé magnetikum* o magnetizaci $\boldsymbol{M}_0$

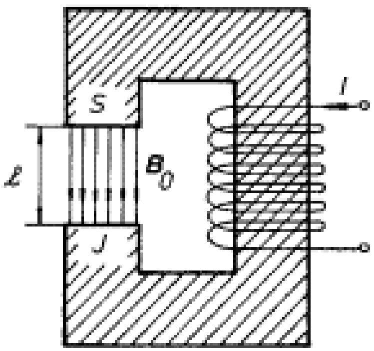
$$W = -\int_{V_\mathrm{m}} (\boldsymbol{M}_0 . \boldsymbol{B}_0)\mathrm{d}V.$$

- *ideálně měkké prostředí*

$$W = -\frac{1}{2}\int_{V_\mathrm{m}} (\boldsymbol{M} . \boldsymbol{B}_0)\mathrm{d}V.$$

- ($\boldsymbol{M}.\boldsymbol{B}_0$) může být kladný i záporný; záporných hodnot nabývá pro diamagnetická tělesa.

Síly mezi póly elektromagnetu



- Elektromagnet, tvořený magnetickým obvodem z feromagnetického materiálu o vysoké relativní permeabilitě μ_r se vzduchovou mezerou délky *l*.
- Proud *I* tekoucí cívkou vybudí v mezeře magnetické pole $\boldsymbol{B}_0$, které lze v prvním přiblížení považovat za homogenní.

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\int_{V_\infty}(\boldsymbol{H}.\boldsymbol{B})\mathrm{d}V.$$

- integruje se obecně přes celý objem mezery i jádra.
- Pro μ_r >> 1 je hustota energie magnetického pole v jádru je mnohem nižší než ve vzduchové mezeře.

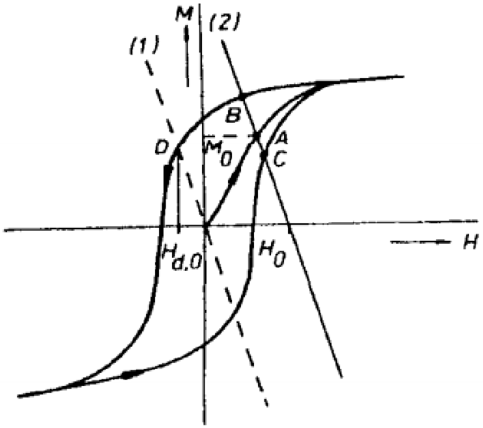
$$w_m = \boldsymbol{H}.\frac{\boldsymbol{B}}{2} = \frac{{B_0}^2}{2\mu_0\mu_r}$$

- Celkovou energii magnetického pole elektromagnetu v prvním přiblížení repre-zentovat jen energií pole v mezeře.
- Plochu pólů magnetu *S.* Pole v mezeře považujeme za homogenní.

$$W_\mathrm{m} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}Sl, \qquad F = -\frac{dW_m}{dl} = -\frac{{B_0}^2}{2\mu_0}S$$

- Póly se přitahují.

Hysterezní ztráty ve feromagnetiku



- Bilance energie W_m spojená se změnou magnetického pole závisí na vlastnostech prostředí vyplňujícího prostor, v němž je magnetické pole vytvořeno.
- Chceme vypočítat energii připadající na jednotkový objem feromagnetika, která je potřebná k jeho přemagnetování po klesající větvi hysterezní smyčky z bodu (*B*) do bodu (*D*)

$$\delta w_m = \frac{\boldsymbol{H}.\delta\boldsymbol{B}}{2}$$

- Integrace *per-partes*:

$$w_{\mathrm{m}} = \int_{B_{(B)}}^{B_{(D)}} \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \left[\boldsymbol{H}_{(D)}.\boldsymbol{B}_{(D)} - \boldsymbol{H}_{(B)}.\boldsymbol{B}_{(B)}\right] - \int_{B_{(B)}}^{B_{(D)}} \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{H}.$$

- Cyklické přemagnetování - např. z výchozího bodu $B_{(B)}$ pracovní bod proběhne postupně celou hysterezní smyčkou zpět do $B_{(B)}$.
- Výchozí a konečné pole totožné.

$$w_{\mathrm{m}} = -\oint \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{H}.$$

Hysterezní ztráty ve feromagnetiku 2

- Cyklické přemagnetování - např. z výchozího bodu $B_{(B)}$ pracovní bod proběhne postupně celou hysterezní smyčkou zpět do $B_{(B)}$.
- Výchozí a konečné pole totožné (první člen nulový).

$$w_{\mathrm{m}} = -\oint \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{H}.$$

- Celá energie w_{m} podle se spotřebovává na přemagnetování feromagnetika a je nevratně přeměněna v teplo.
- Nazývá se *hysterezními ztrátami* daného feromagnetika.
- Z geometrického významu integrálu vyplývá, že hysterezní ztráty jsou dány plochou hysterezní smyčky.

Střední hodnota výkonu ve střídavém obvodu

- Okamžitá hodnota výkonu dodávaného zdroji elektromotorického napětí do kvazistacionárního obvodu: $N_z(t) = \mathcal{E}(t) I(t)$
- Pp.: $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i).$

  $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u).$
- Střední hodnota výkonu za dobu jedné periody $T = 2\pi / \omega$:

$$\bar{N}_Z = \frac{1}{T} \int_0^T I(t)\, \mathcal{E}(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} \cos|\varphi_U - \varphi_I|$$

- *Účiník*: $\cos|\varphi_U - \varphi_i|$
- Efektivní hodnota proudu a napětí: $I_{ef} = I_0/\sqrt{2}$ $\mathcal{E}_{ef} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}$

$$\bar{N}_Z = \mathcal{E}_{ef} I_{ef} cos|\varphi_U - \varphi_I|$$

- Též výkon ztracený na prvcích obvodu.