Střídavé obvody - úvod

- Speciálním případ kvazistacionárních obvodů.
- Obsahují zdroj harmonického střídavého elektromotorického napětí.
- Je připojena lib. kombinace rezistorů, cívek a kondenzátorů, jejichž parametry jsou konstantní, nezávislé na protékajícím proudu (tj. vylučujeme např. cívky s feromagnetickými jádry).
- Lze ukázat, že po dostatečně dlouhé době bude mít proud protékající prvky harmonický průběh (*ustálený stav* obvodu).

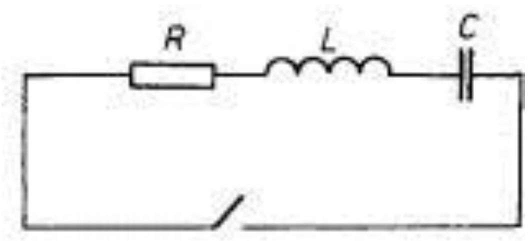
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i).$$

- Okamžitá hodnota napětí na daném prvku:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u).$$

- Impedance Z: $$I_0 = \frac{U_0}{Z}.$$
- Vztah mezi amplitudami - neřeší fáze.
- [*Z*] = Ω Ohm

Oscilační obvod



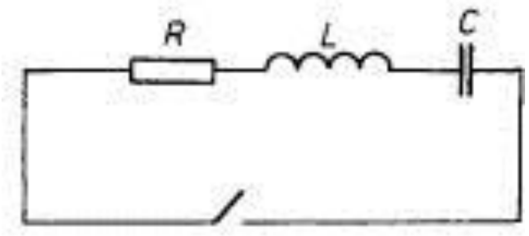
- Vlastní kmity v obvodu s indukčností, odporem a kapacitou.
- Ve výchozím okamžiku $t = 0$, kdy zapneme spínač, je kondenzátor C nabit na napětí $U_{C,0}$.
- Po zapnutí spínače se kondenzátor počne vybíjet přes odpor R a indukčnost L, takže obvodem poteče proud $I(t)$.
- V obvodu nepůsobí žádné elektromotorické napětí.

$$\mathcal{E}(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = 0.$$

- Obecné řešení: $I(t) = K_1\,\mathrm{e}^{\alpha_1 t} + K_2\,\mathrm{e}^{\alpha_2 t}$,
- K_1, K_2 jsou integrační konstanty, α_1, α_2 kořeny kvadratické rovnice

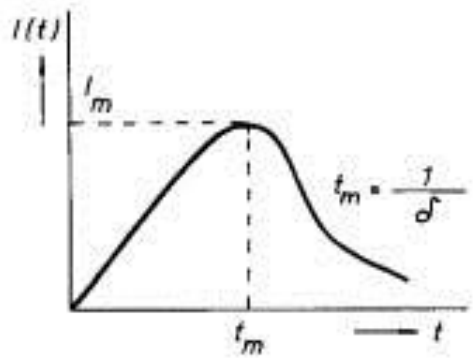
$$\alpha_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - (4L)/C}}{2L}$$

Oscilační obvod



$$D = \sqrt{R^2 - 4L/C}$$

- Řešení pro $D \geq 0$ - aperiodický stav obvodu

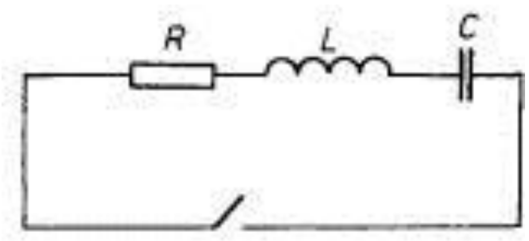


- Řešení pro $D < 0$:
- Zavedeme $\delta = \frac{R}{2L}, \omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}, \omega_V = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = -\delta \pm \mathrm{i}\omega_V$

$$I(t) = K\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega_\mathrm{v} t + \varphi).$$

- ω_V - kruhová frekvence vlastních kmitů
- K, φ - nové integrační konstanty.

Oscilační obvod

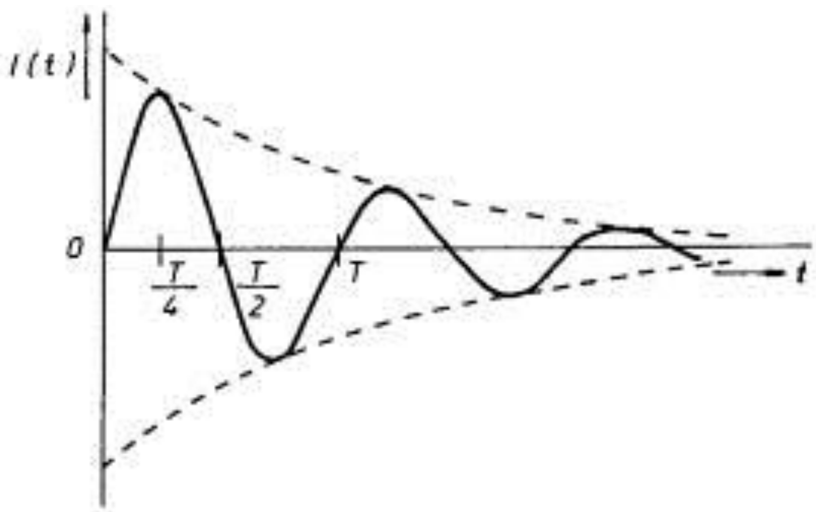


$$I(t) = K\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega_v t + \varphi).$$

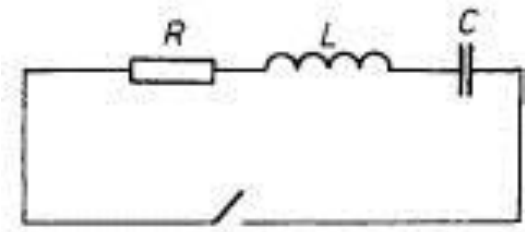
- Proud v obvodu může mít charakter tlumených harmonických kmitů, které nazýváme *vlastními kmity obvodu.*
- δ - *konstanta útlumu* - za dobu t = 1/δ poklesne amplituda kmitů *e*-krát.

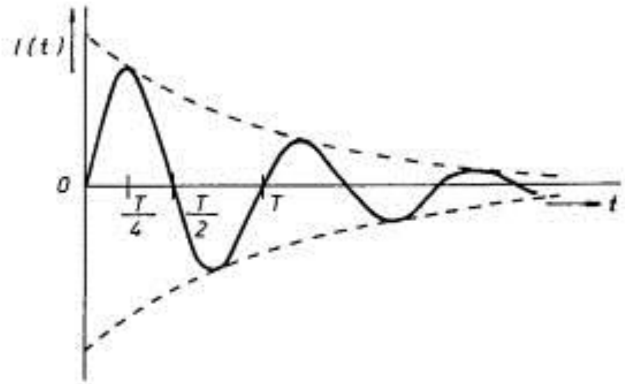
- Počáteční podmínky: $I(0) = 0$, $U_{C,0} + L(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)_{t=0} = 0$,

$$\boxed{I(t) = \frac{U_{C,0}}{\omega_v L}\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega_v t - \pi/2) = \frac{U_{C,0}}{\omega_v L}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega_v t,}$$



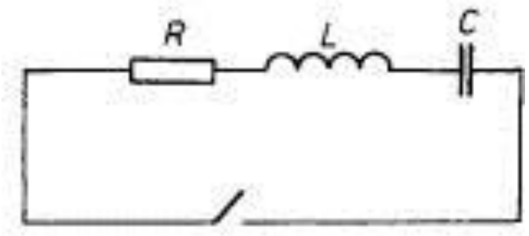
Oscilační obvod

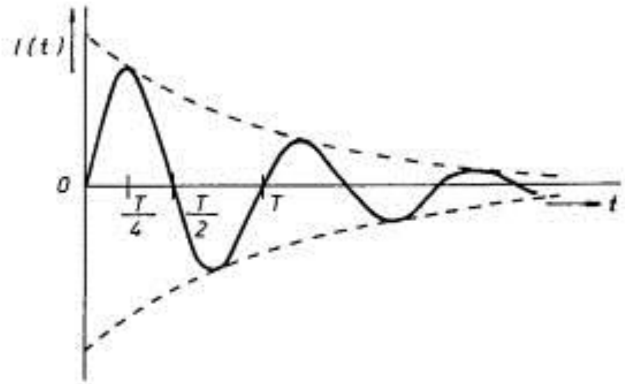




- Kondenzátor, který je ve výchozím stavu nabitý na napětí $U_{C,0}$, se počne po zapojení spínače vybíjet a proud tekoucí obvodem rychle vzrůstá.
- S postupujícím vybíjením kondenzátoru klesá energie jeho elektrického pole a současně vzrůstá energie magnetického pole cívky.
- Po uplynutí čtvrtiny periody proud dosáhne maximální hodnoty.
- Kondenzátor je téměř vybitý a téměř všechna energie obvodu je soustředěna v magnetickém poli cívky.
- Jelikož je v tomto stavu $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = 0$, je napětí na cívce nulové.
- Od tohoto okamžiku počne proud klesat, čímž se v cívce indukuje elektromotorické napětí, které postupně nabíjí kondenzátor na opačnou polaritu.
- Po uplynutí poloviny periody je proud v obvodu nulový a všechna energie je opět soustředěna v elektrickém poli kondenzátoru.
- Oscilační obvod, kterém jsou doplňovány energ. ztráty, může být použit jako zdroj střídavého proudu - např. skrze indukční vazbu.

Oscilační obvod





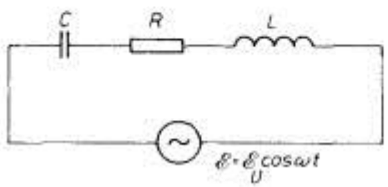
- Pokles amplitudy je důsledkem rezistivních ztrát - přeměny elekromagnetické energie na Jouleovo teplo.

- Oscilační obvod, kterém jsou doplňovány energ. ztráty, může být použit jako zdroj střídavého elektromotorického napětí - např. skrze indukční vazbu.

- Činitel tlumení $\delta = \frac{R}{2L}$

- Pro $\delta << \omega_0$ - vlastní kmity $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Thomsonův vzorec

Sériový rezonanční obvod



- Spojení odporu *R*, indukčnosti *L* a kapacity *C*, vše je připojeno k ideálnímu zdroji *střídavého* elektromotorického napětí frekvence *ω*.

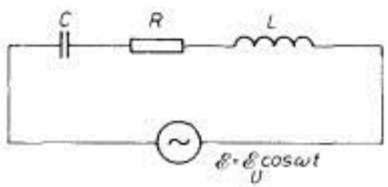
$$L\frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{I(t)}{C} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

- Obecné řešení lze vyjádřit jako sumu partikulárního řešení celé rovnice a obecného řešení příslušné homogenní rovnice. To má tvar:

$$I(t) = K_1\,\mathrm{e}^{\alpha_1 t} + K_2\,\mathrm{e}^{\alpha_2 t}$$

- Konkrétní poměry v obvodu závisí jednak na charakteru kořenů α_1, α_2 charakteristické kvadratické rovnice a jednak na hodnotách integračních konstant K_1, K_2, jež jsou dány počátečními podmínkami, např. ve kterém bodě periody elektromotorického napětí je zdroj k obvodu připojen.
- V každém případě: $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$, tj. obecné řešení se v dostatečně dlouhém čase neuplatní.
- Ustálený stav obvodu je tudíž určen jen partikulárním řešením celé nehomogenní rovnice

Sériový rezonanční obvod



- Partikulární řešení hledáme ve tvaru:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i),$$

$$L \frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} + R \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{I(t)}{C} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

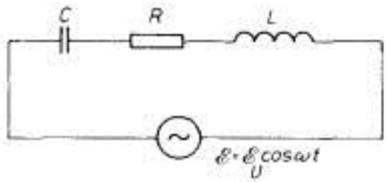
- I_0 a φ_i musí vyhovovat rovnici:

$$I_0 \left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \cos \varphi_i - R \sin \varphi_i \right] \cos \omega t +$$

$$+ \left[I_0 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \varphi_i - R I_0 \cos \varphi_i + \mathcal{E}_0 \right] \sin \omega t = 0.$$

- Má-li být tato podmínka splněna v libovolném okamžiku, musí být koeficienty u cos ωt a sin ωt rovny nule.

Sériový rezonanční obvod



$$\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)\cos\varphi_i - R\sin\varphi_i = 0,$$

$$I_0\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\sin\varphi_i - RI_0\cos\varphi_i + \mathcal{E}_0 = 0,$$

- Řešení:

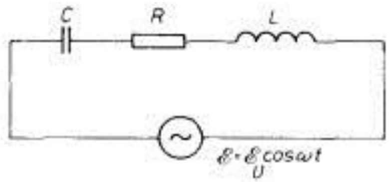
$$\operatorname{tg}\varphi_i = \frac{\frac{1}{\omega C}-\omega L}{R}$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\cos\varphi_i$$

- Anebo s využitím $\cos\varphi_i = (1+\operatorname{tg}^2\varphi_i)^{\frac{1}{2}}$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Sériový rezonanční obvod

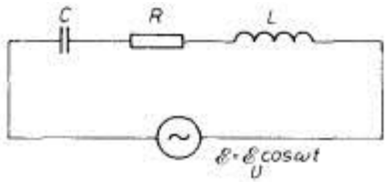


- Impedance: $$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$
- $Z_{min} = R$ pro $\omega L = 1/\omega C$
- Je-li frekvence proudu $\omega = \omega_0$, I_0 je maximální.

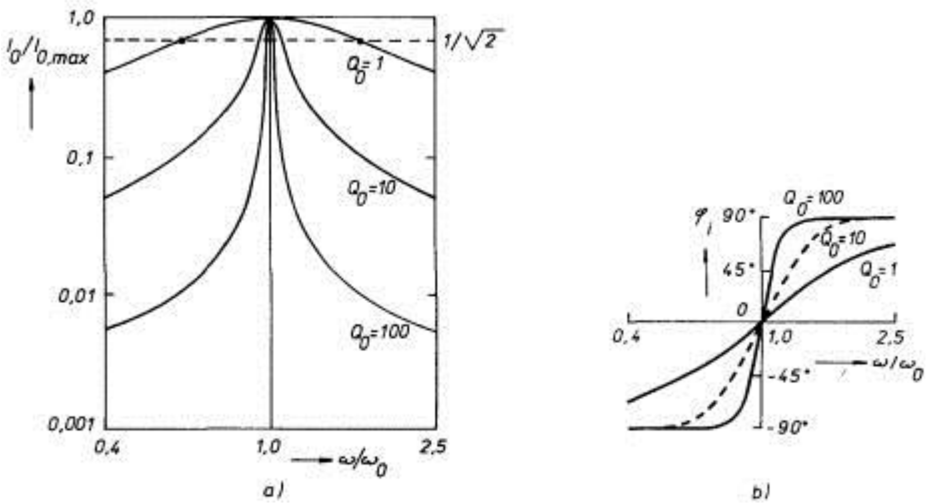
$$I_{0,\,\max} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

- Závislost amplitudy proudu na frekvenci zdroje se nazývá *rezonanční křivkou obvodu.*
- Obvod je v rezonanci ⇔ $$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

Sériový rezonanční obvod

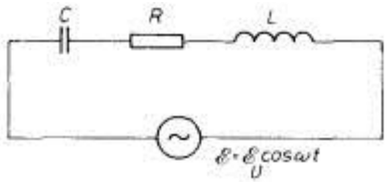


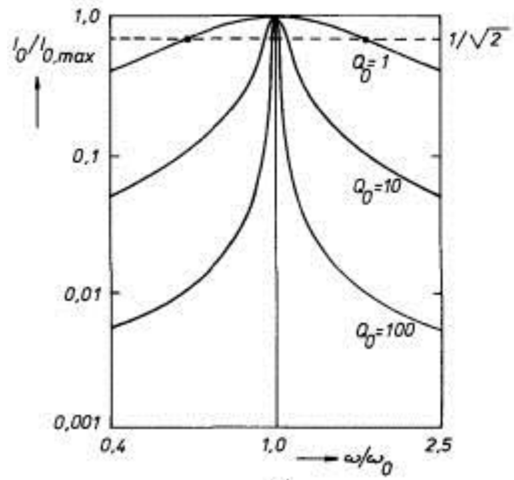
- *Redukované* rezonanční křivky sériového rezonančního obvodu:
- a) redukovaná frekvenční závislost amplitudy napětí a proudu,
- b) redukovaná frekvenční závislost fázového úhlu.



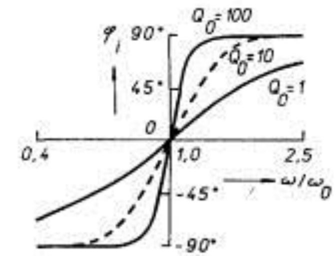
Pološířka rezonanční křivky $\Delta\omega$ - absolutní hodnota rozdílu frekvencí ω_1 a ω_2, při nichž má proud hodnotu $I_0 = I_{0,max}/\sqrt{2}$

Sériový rezonanční obvod





a)



b)

- Pro frekvence ω_1 a ω_2 platí:

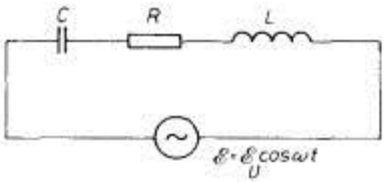
$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = R,$$

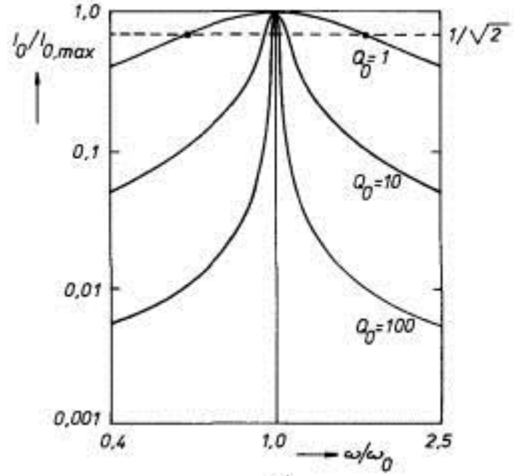
$$\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L = R,$$

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

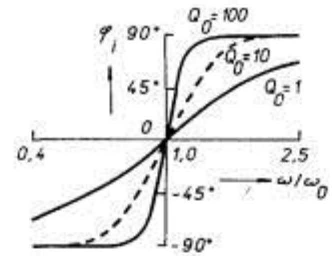
$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} \qquad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q_0}.$$

Sériový rezonanční obvod





a)



b)

- (vlastní) činitel jakosti obvodu: $$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R}$$

  - Obvod v rezonanci: φ_i = 0. Se vzdalováním od rezonance se konstanta φ_i, charakterizující fázový posuv proudu vůči elektromotorickému napětí zdroje, blíží hodnotám ± π /2.

Stabilita obvodů

Stabilní obvody

- Obvod je *asymptoticky* stabilní, pokud po odeznění budících veličin se postupně vrátí zpět do stabilního stavu neboli pokud odezní přechodná složka. Přechodný děj má aperiodický průběh - veličiny se přibližují ke svým ustáleným hodnotám (*asymptotám*).

- všechny kořeny charakteristické rovnice obvodu reálné záporné nebo komplexní se zápornou reálnou částí.

Nestabilní obvody

- po odeznění budících veličin se nevrátí zpět do stabilního stavu neboli přechodná složka neodezní. Přechodný děj má periodický průběh - obvod kmitá vlastními kmity, jejichž amplituda může narůstat nade všechny meze.

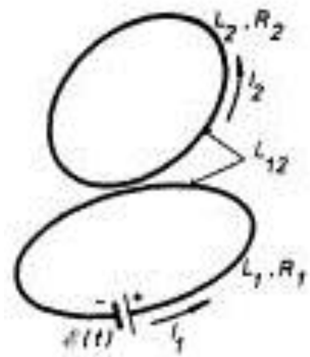
- charakteristická rovnice obvodu má alespoň jeden kladný reálný kořen nebo dvojici komplexních kořenů s kladnou reálnou částí.

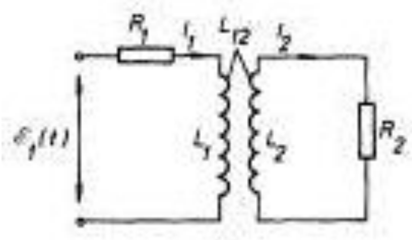
Obvody na mezi stability

- Obvod se nachází na rozmezí výše uvedených stavů. Průběh přechodného děje je na mezi aperiodicity - obvod kmitá kmity se stabilní amplitudou. Dochází k periodické výměně energie mezi akumulačními prvky obvodu.
  Této vlastnosti se využívá u generátorů (oscilátorů).

- charakteristická rovnice nulový nebo ryze imaginární kořen.

Indukčně vázané obvody, transformátor





- Dvojice uzavřených vodivých smyček o vlastních indukčnostech L_1, L_2 a odporech R_1, R_2.
- V první (primární) smyčce nechť působí obecně časově proměnný zdroj elektromotorického napětí $\mathcal{E}(t)$.
- Mezi oběma smyčkami je vzájemná indukčnost L_{12}.
- II. K. p.:

$$\mathcal{E}_1(t) - L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - L_{12} \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = R_1 I_1,$$

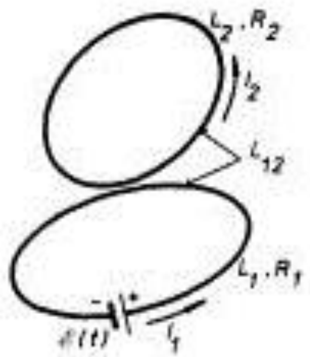
$$-L_{12} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = R_2 I_2,$$

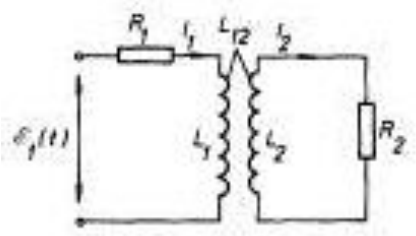
- Sekundární smyčka rozpojena - el.-mot. napětí mezi konci vodiče:

$$\mathcal{E}_{20}(t) = L_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

- Bude-li R_1 zanedbatelný: $\dfrac{\mathcal{E}_1(t)}{\mathcal{E}_{20}(t)} \doteq \dfrac{L_1}{L_{12}}$

Indukčně vázané obvody, transformátor





- Spojíme 2. smyčku. Jak se to projeví na I_1?
- Bude-li R_2 zanedbatelný (z 2 rovnice):

$$-L_{12}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \doteq L_2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

- Po integraci, pp. $I_1(0) = 0$, $I_2(0) = 0$:

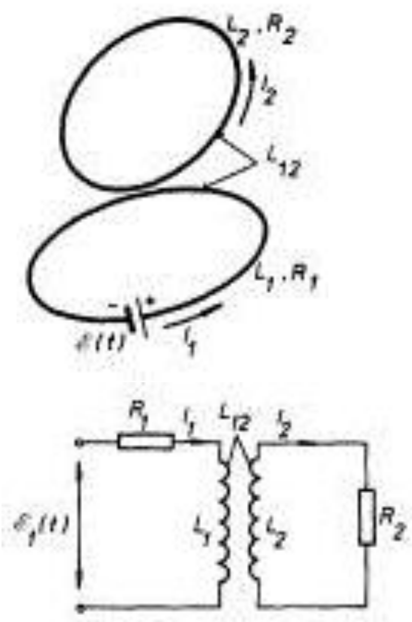
$$\frac{I_1(t)}{I_2(t)} \doteq -\frac{L_2}{L_{12}}$$

- Lze odvodit, že primární cívka se chová, jako by měla vlastní indukčnost

$$L_{1,\mathrm{ef}} = L_1(1-k^2)$$

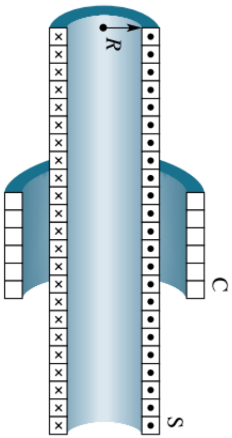
- kde $k \leq 1$ je *činitel vazby*: $$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$
- Přítomnost sekundární uzavřené smyčky tedy zmenšuje efektivní indukčnost smyčky primární.
- V mezním případě k = 1 je indukčnost primární smyčky nulová.
- Tento stav nelze dosáhnout; obě smyčky by se musely geometricky ztotožnit.

Indukčně vázané obvody, transformátor



- Vzrůst odporu primárního obvodu o $\frac{{L_{12}}^2}{{L_2}^2} R_2$
- Zdroj v primárním obvodu musí dodat i energii, která se spotřebuje v sekundárním obvodu na Jouleovo teplo.

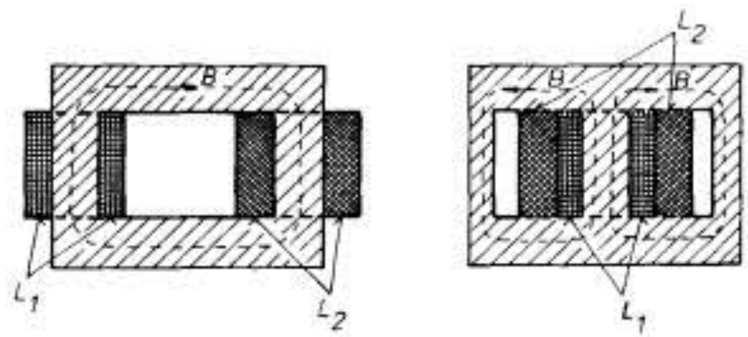
Transformátor



- Soustava induktivně vázaných cívek se nazývá *transformátor.*
- V případě k = 1 - *ideální transformátor.*

- Pro dosažení maximální vazby dvou cívek je nutné, aby plochami všech jejích závitů procházel společný magnetický tok.
- Těsná geometrie.

- Anebo navinutí cívek na společné jádro z materiálu o vysoké relativní permitivitě μ_r >> 1 tak, aby tvořilo uzavřený magnetický obvod o co nejmenším magnetickém odporu.



- Navinutí na protilehlých stranách jádra anebo obě cívky na středním sloupku.
- Společný magnetický tok procházející tímto sloupkem se pak uzavírá obvodem jádra

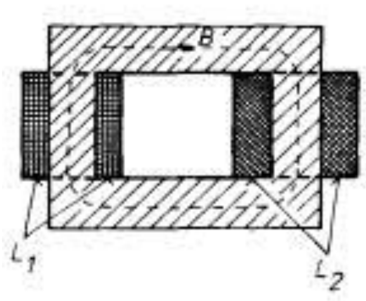
Transformátor

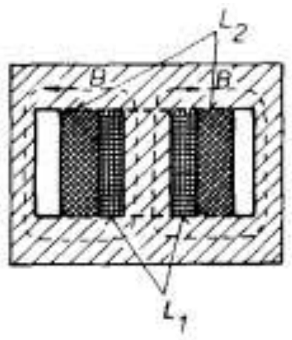
- Jádra transformátorů se zhotovují z:
- magneticky uspořádaných (fero- nebo ferimagnetických) magneticky měkkých materiálů s nízkým koercitivním polem - úzká hysterezní smyčka, nízké hysterezní ztráty při přemagnetování.
- co nejméně vodivých materiálů

  kvůli omezení vířivých proudů.

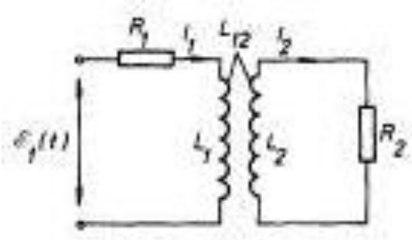
  Např. magneticky měkká ocel s příměsí křemíku, který snižuje její měrnou vodivost.

  Jádro složené z tenkých, vzájemně elektricky izolovaných plechů.





Transformátor



- Transformátor, primární a sekundární cívka má N_1 resp. N_2 závitů.
- Odpory R_1 a R_2 reprezentují celkové odpory primárního a sekundárního obvodu.
- Těsná vazba k ≈ 1.

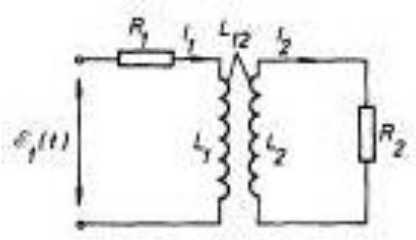
$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{{N_1}^2}{{N_2}^2} \qquad |L_{12}| = \sqrt{L_1 L_2}$$

$$\frac{L_1}{|L_{12}|} = \frac{|L_{12}|}{L_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} \doteq \frac{N_1}{N_2} \qquad \frac{I_1}{I_2} \doteq \frac{N_2}{N_1}$$

- V transformátoru s rozpojeným sekundárem *(transformátor naprázdno)* se velikosti elektromotorického napětí transformují v poměru počtu závitů primáru k sekundáru.
- V transformátoru se zanedbatelným odporem sekundáru (*transformátor nakrátko*) podle transformují v opačném poměru.

Transformátor

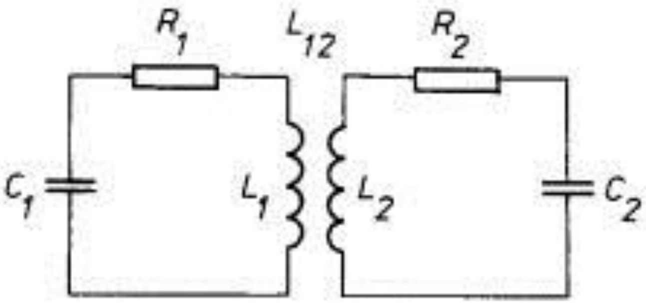


$$\mathcal{E}_1(t) = L_1\left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}\right)\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + \left(R_1 + \frac{N_1^2}{N_2^2}R_2\right)I_1.$$

- Sekundární odpor R_2 se tedy do primárního obvodu transformuje v poměru čtverce počtu závitů.
- Efektivní indukčnost ideálního transformátoru je *nulová*.
- Transformátor se tedy vůči zdroji $\mathcal{E}_1(t)$ chová jako obvod s čistě ohmickým odporem

$$R_{eff} = R_1 + \frac{{N_1}^2}{{N_2}^2}R_2$$

Vlastní kmity indukčně vázaných oscilačních obvodů



- přiblížení: identické obvody, $R_1 = R_2 = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 I_1 = -\frac{L_{12}}{L}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 I_2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 I_2 = -\frac{L_{12}}{L}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t},$$

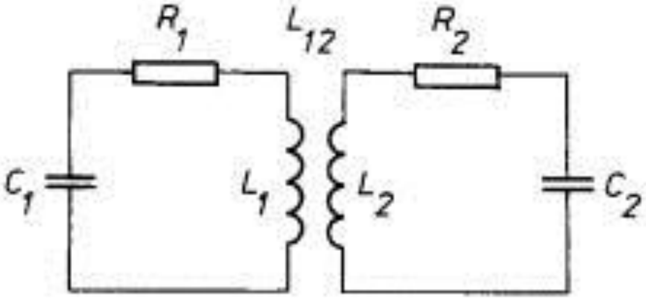
$\omega_0 = 1/LC$ $\qquad I^{(+)} = I_1 + I_2$ $\qquad I^{(-)} = I_1 - I_2$

$$\frac{\mathrm{d}^2 I^{(+)}}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_1}^2 I^{(+)} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 I^{(-)}}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_2}^2 I^{(-)} = 0,$$

- kde:

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm \frac{L_{1,2}}{L}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}.$$

Vlastní kmity indukčně vázaných oscilačních obvodů

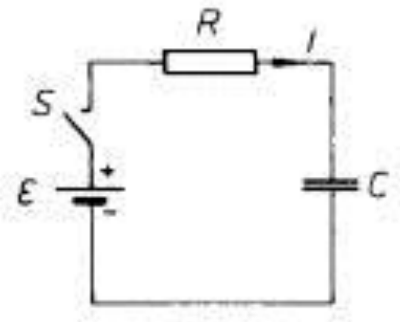


- Obecné řešení:

$$I^{(+)} = K_1^{(+)} e^{i\omega_1 t} + K_2^{(+)} e^{-i\omega_2 t}, \quad I^{(-)} = K_1^{(-)} e^{i\omega_1 t} + K_2^{(-)} e^{-i\omega_2 t}$$

- V obvodech existují tedy současně kmity o dvou frekvencích ω_1 a ω_2.
- Vázané oscilační obvody - elektrická analogie i vázaných mechanických oscilátorů.
- V elektrotechnice se obou prvků, i jejich vzájemné kombinace, hojně využívá především ke konstrukci frekvenčních filtrů.

Příklady - kvazistacionárními obvody
Neustálený stav v obvodu s kapacitou



- Spínač S je sepnut v čase $t = 0$.
- Od sepnutí začne v obvodu působit zdroj časově neproměnného el.-mot. napětí $\mathcal{E}$.

$$R\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{I(t)}{C} = 0.$$

- Obecný integrál má tvar: $I(t) = K\,\mathrm{e}^{-(t/RC)}.$
- Počáteční podmínky: při zapnutí obvodu má kondenzátor nulový náboj.

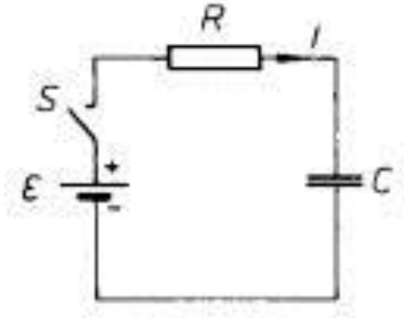
$$R_C I(t) + \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E}(t) - L\frac{dI}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad R_C I(0) = \mathcal{E}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\mathrm{e}^{-(t/RC)}.$$

$$R_C I(t) + U_C = \mathcal{E}$$

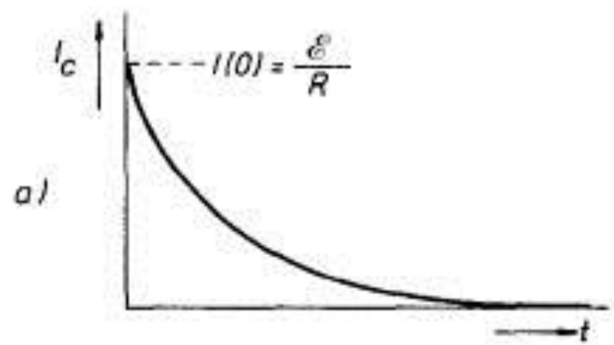
- Proud tekoucí obvodem nabíjí kondenzátor C: $U_C = \mathcal{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-(t/RC)}\right).$

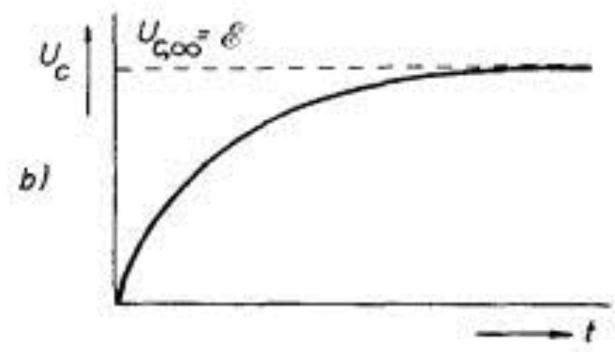
Příklady - kvazistacionárními obvody
Neustálený stav v obvodu s kapacitou



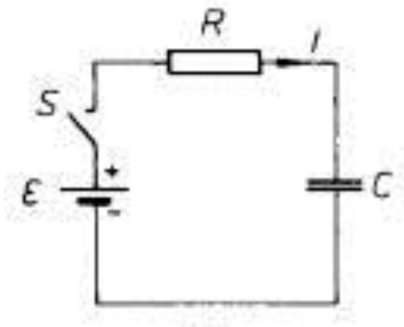
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-(t/RC)}.$$

$$U_C = \mathcal{E}\left(1 - e^{-(t/RC)}\right).$$





Neustálený stav v obvodu s kapacitou



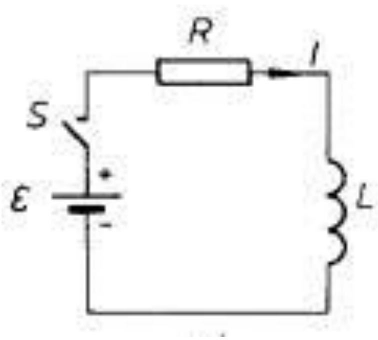
- Po uplynutí dostatečně dlouhé doby je kondenzátor nabit:

$$U_C(\infty) = \mathcal{E}$$

- Obvodem již dále neteče proud.
- Vypnutí spínače pak již nemá vliv na poměry v obvodu; kondenzátor zůstane trvale nabit.
- V jeho dielektriku zůstane elektrostatické pole o energii W, která byla dodána zdrojem elektromotorického napětí.

$$W = 1/2CU_C{}^2(\infty)$$

Neustálený stav v obvodu s indukčností



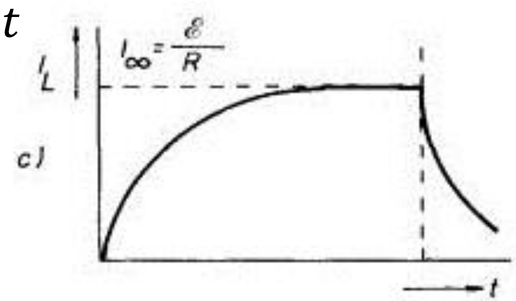
$$R_c I = \mathcal{E}(t) - \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

- Nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu.
- Řešení je dáno součtem libovolného partikulárního řešení a obecného řešení příslušné homogenní rovnice.
- Partikulární řešení: $I(\infty) = \mathcal{E}/R_C$

- Obecné řešení: $$I(t) = K\mathrm{e}^{-(R/L)t} + \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

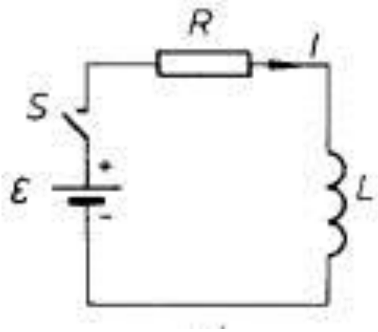
- Bezprostředně po zapnutí je proud velmi malý: $\mathcal{E} = L\dfrac{dI}{dt}$
- Potom platí poč. podm. I(0) = 0

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-(R/L)t}\right).$$



- Proud v obvodu exponenciálně narůstá a asymptoticky se blíží k ustálené hodnotě $I(\infty) = \mathcal{E}/R_C$.
- Na tuto ustálenou hodnotu proudu nemá již indukčnost *L* žádný vliv.

Neustálený stav v obvodu s indukčností



- Při vypnutí spínače nastanou v obvodu složité poměry.
- V indukčnosti *L* zaniká magnetické pole a jeho energie se musí nějakým způsobem zužitkovat. Nejčastěji nastává taková situace, že změnami proudu se v indukčnosti *L* indukuje elektromotorické napětí dostačující k tomu, aby mezi kontakty spínače zapálil jiskrový výboj.
- Tento výboj způsobí, že obvodem může téci proud ještě určitou dobu po vypnutí spínače (odpor *R*') a energie magnetického pole se částečně vyzáří a částečně přemění v Jouleovo teplo.