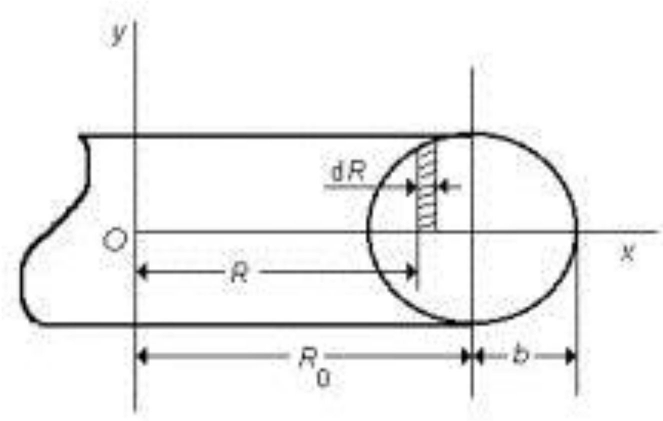
Vlastní indukčnost toroidu



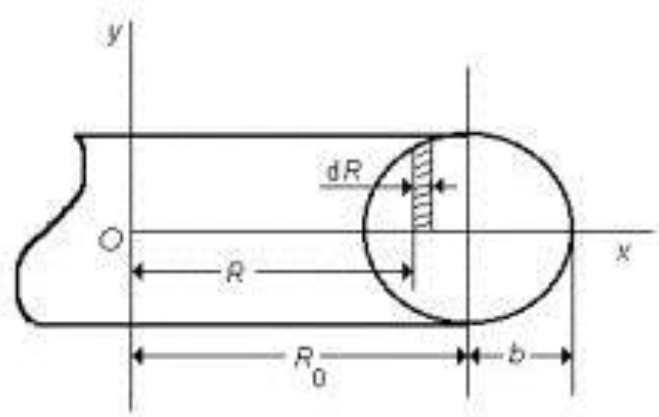
- **Toroid** kruhového průřezu o poloměru *b*, na němž je navinuto celkem *N* závitů.
- Osová kružnice toroidu nechť má poloměr R_0.
- Magnetické indukční čáry v toroidu jsou kružnice s osou v ose toroidu.

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}$$

- Na povrchu průřezu platí $x^2 + y^2 = b^2$.

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2}{\pi} \int_{R_0-b}^{R_0+b} \frac{y}{R}\,\mathrm{d}R = \frac{\mu_0 N^2}{\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{R_0 + x}\,\mathrm{d}x$$

Vlastní indukčnost toroidu

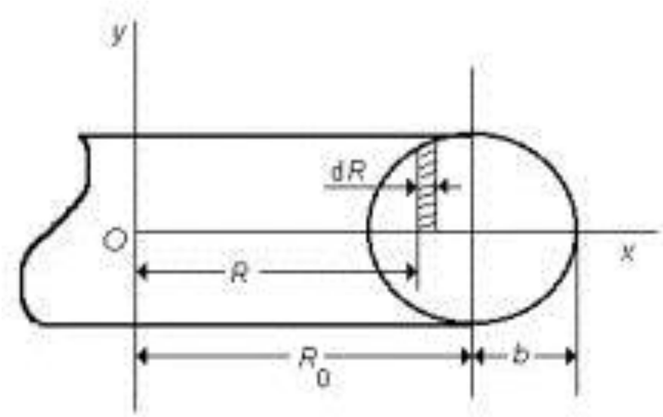


- Provedeme substituci $x = bz$ a označíme $R_0 = b\,C$.

$$L = \frac{\mu_0 N^2 b}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-z^2}}{C+z}\,\mathrm{d}z = \frac{\mu_0 N^2 b}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1-z^2 - Cz + Cz + C^2 - C^2}{(C+z)\sqrt{1-z^2}}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 b}{\pi}\left[\left(1-C^2\right)\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}z}{(C+z)\sqrt{1-z^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} + C\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}}\right].$$

Vlastní indukčnost toroidu



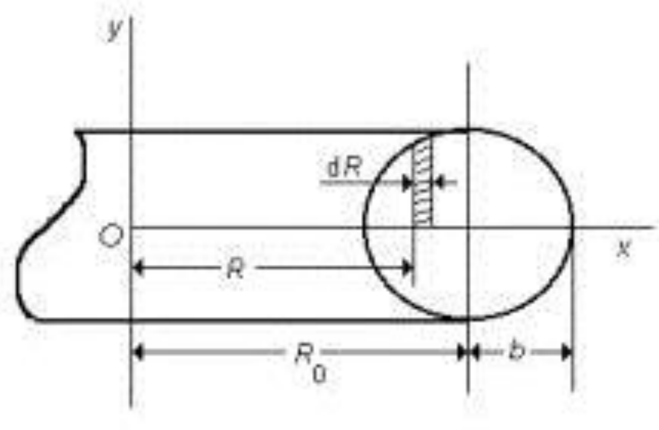
- První integrál v hranaté závorce řešíme substitucí $1/(C + z) = t$.

$$-\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-C^2)t^2 + 2Ct - 1}} = \frac{1}{\sqrt{C^2-1}} \arcsin\left[(1-C^2)t + C\right]$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = \pi$$

Vlastní indukčnost toroidu



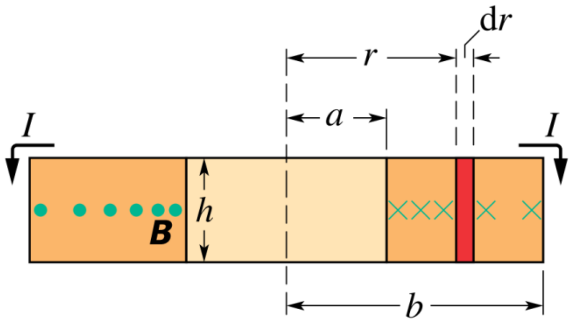
$$L = \mu_0 N^2 \left(R_0 - \sqrt{{R_0}^2 - b^2} \right)$$

- Pro tenký toroid, v přiblížení $b \ll R_0$.

$$L = \mu_0 N^2 \frac{b^2}{2R_0} = \mu_0 {N_l}^2 V$$

- $V = 2\pi^2 R_0 b^2$ je objem toroidu a N_l počet závitů na jednotkové délce vinutí.
- Výsledek je stejný jako u dlouhého solenoidu.

Vlastní indukčnost toroidu s obdélníkovým průřezem



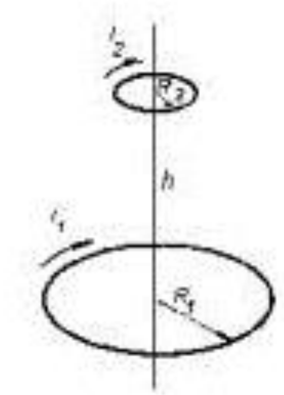
$$\Phi_B = \int_a^b Bh\,\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} h\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\mu_0 I N h}{2\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{N \Phi_B}{I} = \frac{N}{I} \frac{\mu_0 I N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Vzájemná indukčnost dvou souosých smyček



- 2 souosé, stejně orientované smyčky o poloměrech R_1, R_2, jejichž roviny leží ve vzdálenosti h.
- Magnetická indukce vybuzená větší smyčkou ve středu smyčky menší:

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 I_1 \frac{R_1^{\,2}}{\left(R_1^{\,2} + h^2\right)^{3/2}}$$

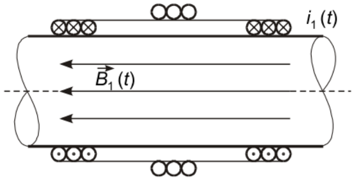
- pp., že B může být v průřezu menší smyčky považována za homogenní.

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{R_1^{\,2} R_2^{\,2}}{\left(R_1^{\,2} + h^2\right)^{3/2}}$$

- Speciálně pro koncentrické smyčky ($h = 0$):

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{R_2^{\,2}}{R_1} = \frac{\mu_0}{2} \frac{S_2}{R_1}.$$

Vzájemná indukčnost dvojice souosých válcových cívek



- dvě válcové cívky o poloměrech R_1, R_2, počtech závitů N_1, N_2, a délkách l_1, l_2.

- 1. Nechť obě cívky mají stejné rozměry $l_1 = l_2 = l$ stejnou orientaci, jsou dostatečně dlouhé a jsou navinuty na společném jádru, takže magnetický tok jimi procházející je totožný.
- Cívkou (1) prochází proud I_1.

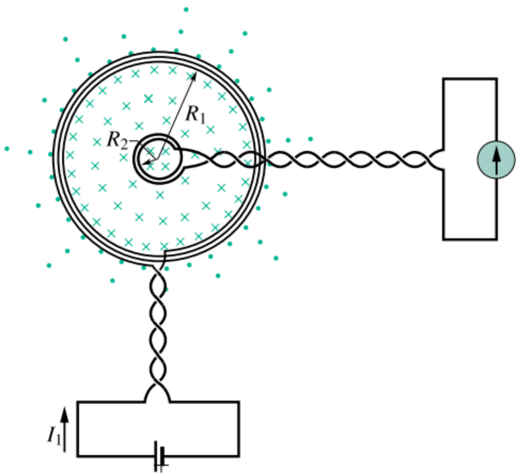
$\Phi = (\mu_0 I_1 N_1 S)/l$ Mg. tok na 1 závit

$$\Psi_1 = N_1 \Phi, \qquad \Psi_{21} = N_2 \Phi.$$

$$L_1 = \frac{\mu_0 {N_1}^2 S}{l}, \qquad L_2 = \frac{\mu_0 {N_2}^2 S}{l}, \qquad L_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}.$$

- Lze tedy vyjádřit: $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}\,,$
- Nejvyšší mezní hodnota vzájemné indukčnosti dvou cívek - obě cívky se prostorově ztotožní a mají stejný mg. tok.

Vzájemná indukčnost dvojice souosých válcových cívek



- Dvě válcové cívky o poloměrech R_1, R_2, počtech závitů N_1, N_2, a délkách l_1, l_2.

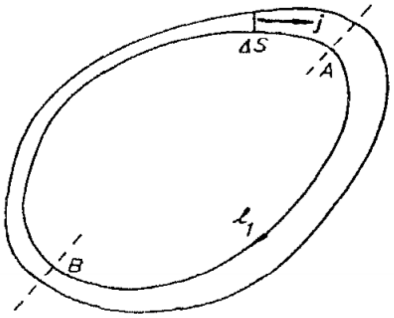
2. Nechť první cívka délky l_1 a poloměru R_1 je dostatečně dlouhá a druhá (krátká) cívka o poloměru R_2 << R_1 je do první cívky koaxiálně zasunuta. Obě cívky nechť mají souhlasnou orientaci.

- Cívkou (1) prochází proud I_1.
- Pole vytvořené první cívkou můžeme v průřezu cívky druhé považovat za homogenní.

$$B = (\mu_0 I_1 N_1)/l_1$$

$$L_{12} = \frac{(\mu_0 N_1 N_2 S_2)}{l_1}.$$

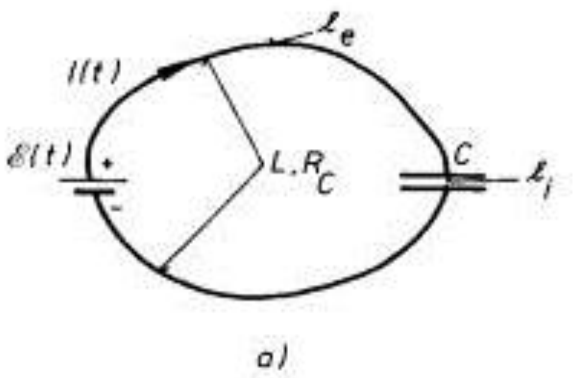
Kvazistacionární elektrický obvod



- Uzavřený obvod nyní obsahuje smyčku.
- Výraz pro Ohmův zákon je nutné rozšířit o indukované napětí

$$R_c I = \mathcal{E}\left(t\right) - \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = \mathcal{E}\left(t\right) - L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Kvazistacionární elektrický obvod



- Vliv kapacity *C*:
- Původně vodivý uzavřený obvod o celkovém odporu R_c a vlastní indukčnosti *L.*
- Přerušení na malé části $l_i << l_e$.
- „Obvodem“ nemůže téci stacionární proud.
- Může protékat časově proměnný proud při změnách náboje na elektrodách.

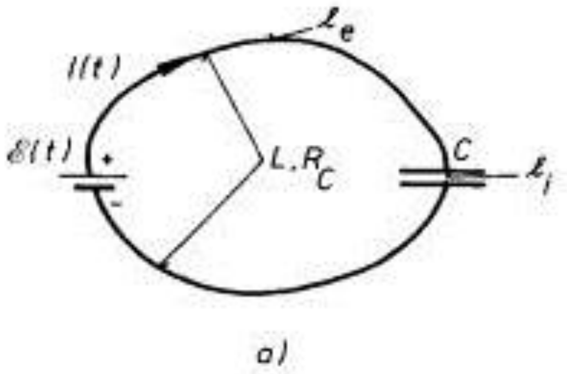
- O. z. na části l_e :

$$\int_{l_e} \frac{\boldsymbol{j}}{\gamma} \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{l_e} (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*) \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \frac{d\Psi}{dt}$$

$$R_C I(t) = \int_{l_e} \boldsymbol{E} \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \mathcal{E}(t) - \frac{d\Psi}{dt}$$

$$R_C I(t) = \int_{l_e} \boldsymbol{E} \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \mathcal{E}(t) - L\frac{dI}{dt}$$

Kvazistacionární elektrický obvod



- Rozšíření na celý „obvod“.
- Kvazistacionární elektrické pole je potenciální:

$$\oint_{l} \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{l_e} \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{l_i} \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$$

$$-\int_{l_e} \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{l_i} \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

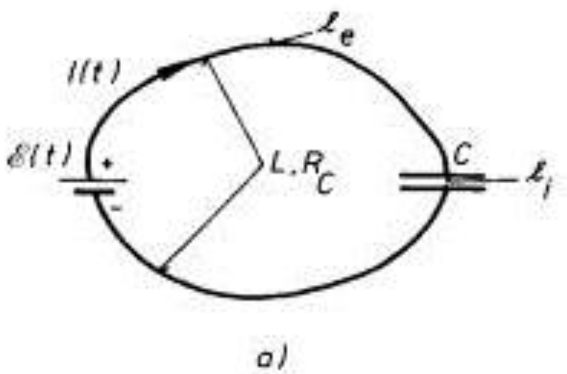
$$R_C I(t) + U_C(t) = \mathcal{E}(t) - \frac{d\Psi}{dt}$$

- anebo:

$$R_C I(t) + \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E}(t) - L\frac{dI}{dt}$$

- Lze vypočítat proud ze známých parametrů $\mathcal{E}(t)$, R_c, L, C.

Kvazistacionární elektrický obvod



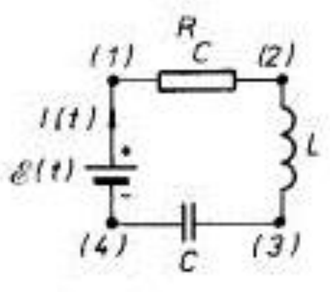
- Převedení na diferenciální rovnici zderivováním:

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t},$$

$$\boxed{R_C \frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} = \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} - L\frac{d^2I(t)}{dt^2}}$$

- Zobecnění pojmu elektrický obvod - nyní zahrnuje i kondenzátor, který nereprezentuje elektricky vodivý spoj.
- Elektrický obvod = libovolné spojení (homogenních i nehomogenních) vodičů, které je charakterizováno jejich odpory, elektromotorickými napětími, vlastními i vzájemnými indukčnostmi a také kapacitami mezi jednotlivými částmi vodičů.

Kvazistacionární elektrický obvod



- V daném okamžiku je proud v každém průřezu nerozvětvené části vodiče stejný.
- Není proto nutné uvažovat skutečný tvar těchto vodičů $\Rightarrow$ přiblížení *soustředěných parametrů.*

- Pp., že vlastní indukčnosti vodičů lze reprezentovat cívkami velmi malých rozměrů zhotovenými z ideálních vodičů, přičemž jednotlivým dvojicím cívek připisujeme odpovídající hodnoty vzájemných indukčností.
- Kapacity mezi jednotlivými vodiči nahrazujeme kondenzátory.
- O odporech předpokládáme, že jsou soustředěny do velmi malých úseků vodičů, které tvoří prvky nazývané *rezistory.*
- Pp., že vodiče jsou ideální; jejich odpory, indukčnosti i kapacity mezi nimi považujeme za nulové.

Kvazistacionární elektrický obvod Kirchhoffova pravidla

- I. K. p. - *Algebraický součet proudů přitékajících do uzlu musí být v každém okamžiku nulový.*

  Platí rovnice kontinuity.

- II. K. p. - *Součet napětí na všech odporech a kondenzátorech ve smyčce je v každém okamžiku roven součtu elektromotorických napětí působících ve smyčce a elektromotorických napětí indukovaných ve všech cívkách podél smyčky*.

- Pojem okamžitého napětí na prvcích obvodu:

$$U_R(t) = RI(t), \qquad U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}. \qquad U_L(t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}.$$

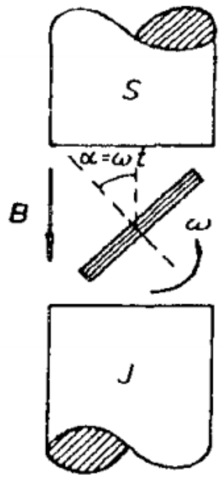
$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = \mathcal{E}(t)$$

- II. K. p. také - *Součet napětí na všech odporech, kapacitách a indukčnostech zařazených do uzavřené smyčky je v každém okamžiku roven součtu elektromotorických napětí působících ve smyčce.*

Generace střídavého harmonického napětí, střídavé obvody

- Harmonické elektromotorické napětí: $\mathcal{E}(\mathrm{t}) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$
- $\mathcal{E}_0$ - amplituda, ω úhlová frekvence, φ - fázová konstanta.
- Zdroje: generátor/alternátor a vlastní kmity el. obvodu

Generátor



- Princip generátoru - rovinná cívka o *N* závitech rotující v homogenním magnetickém poli ***B*** konstantní úhlovou frekvencí *ω* kolem osy kolmé k ose souměrnosti cívky a ke směru magnetického pole.
- El.-mg. indukce

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} . \mathrm{d}\mathbf{S} = BS\cos\omega t$$

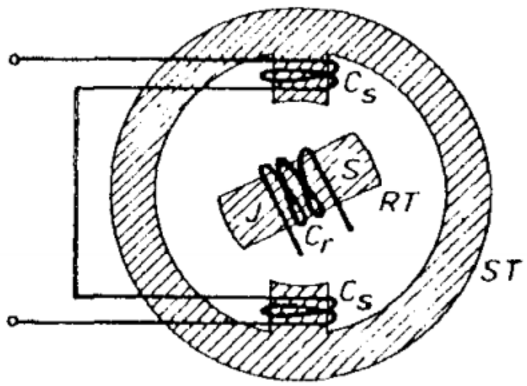
$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\emptyset}{dt}$$

$$\mathcal{E}(t) = \omega BSN \sin \omega t$$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\mathcal{E}_0 = \omega BSN \qquad \varphi = -\pi/2$$

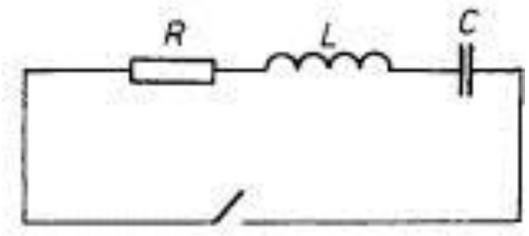
Alternátor



- Z praktického hlediska je lepší nehybná cívka.
- Stator ST je zhotoven z magneticky měkkého feromagnetika, na jehož pólových nástavcích tvořících plášť válcové dutiny je navinuta cívka C_s snímající indukované napětí.
- V dutině se pak otáčí rotor RT - magnet (nejčastěji elektromagnet buzený cívkou C_r), který v magnetickém obvodu statoru budí střídavý magnetický tok.
- Vhodnou konstrukcí tvaru pólů lze zajistit, že se ve statorové cívce indukuje harmonické elektromotorické napětí.

- Silnoproudá elektrotechnika: *vícefázové soustavy* (nejčastěji třífázové).
- Vhodné propojení příslušného počtu zdrojů, jejichž el.-mot. napětí je synchronně proměnné a vzájemně fázově posunuté.
- *n*-fázovou soustavu napětí lze například získat pomocí jediného 2*n*-pólového alternátoru

Oscilační obvod



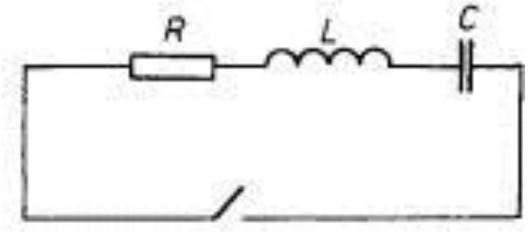
- Vlastní kmity v obvodu s indukčností, odporem a kapacitou.
- Ve výchozím okamžiku t = 0, kdy zapneme spínač, je kondenzátor C nabit na napětí $U_{C,0}$.
- Po zapnutí spínače se kondenzátor počne vybíjet přes odpor R a indukčnost L, takže obvodem poteče proud $I(t)$.
- V obvodu nepůsobí žádné elektromotorické napětí.

$$\mathcal{E}(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = 0.$$

- Obecné řešení: $I(t) = K_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 t} + K_2 \mathrm{e}^{\alpha_2 t}$,
- K_1, K_2 jsou integrační konstanty, α_1, α_2 kořeny kvadratické rovnice

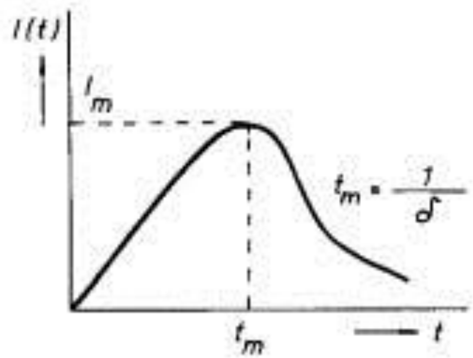
$$\alpha_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - (4L)/C}}{2L}$$

Oscilační obvod



$$D = \sqrt{R^2 - 4L/C}$$

- Řešení pro $D \geq 0$ - aperiodický stav obvodu

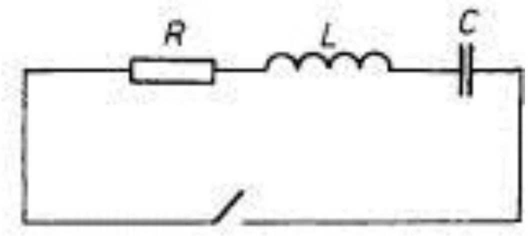


- Řešení pro $D < 0$:
- Zavedeme $\delta = \frac{R}{2L}, \omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}, \omega_V = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = -\delta \pm \mathrm{i}\omega_V$

$$I(t) = K\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega_{\mathrm{v}} t + \varphi).$$

- ω_V - kruhová frekvence vlastních kmitů
- K, φ - nové integrační konstanty.

Oscilační obvod

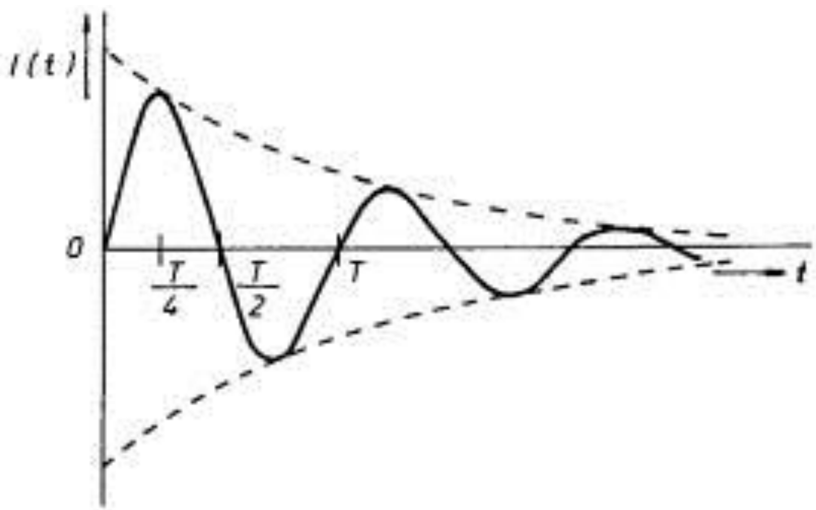


$$I(t) = K e^{-\delta t} \cos(\omega_v t + \varphi).$$

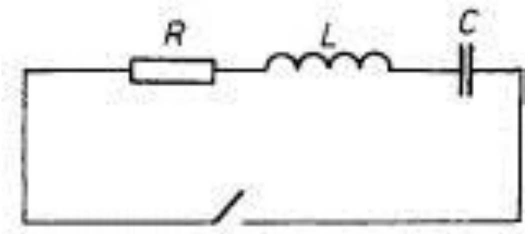
- Proud v obvodu může mít charakter tlumených harmonických kmitů, které nazýváme *vlastními kmity obvodu.*
- δ - *konstanta útlumu* - za dobu t = 1/δ poklesne amplituda kmitů *e*-krát.

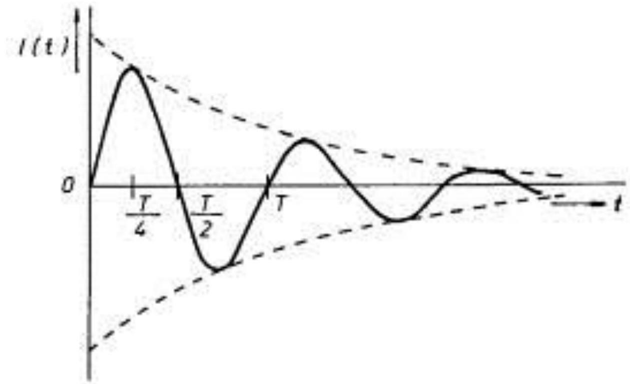
- Počáteční podmínky: $I(0) = 0$, $U_{C,0} + L(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)_{t=0} = 0$,

$$\boxed{I(t) = \frac{U_{C,0}}{\omega_v L} e^{-\delta t} \cos(\omega_v t - \pi/2) = \frac{U_{C,0}}{\omega_v L} e^{-\delta t} \sin \omega_v t,}$$



Oscilační obvod





- Kondenzátor, který je ve výchozím stavu nabitý na napětí $U_{C,0}$, se počne po zapojení spínače vybíjet a proud tekoucí obvodem rychle vzrůstá.
- S postupujícím vybíjením kondenzátoru klesá energie jeho elektrického pole a současně vzrůstá energie magnetického pole cívky.
- Po uplynutí čtvrtiny periody proud dosáhne maximální hodnoty.
- Kondenzátor je téměř vybitý a téměř všechna energie obvodu je soustředěna v magnetickém poli cívky.
- Jelikož je v tomto stavu $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = 0$, je napětí na cívce nulové.
- Od tohoto okamžiku počne proud klesat, čímž se v cívce indukuje elektromotorické napětí, které postupně nabíjí kondenzátor na opačnou polaritu.
- Po uplynutí poloviny periody je proud v obvodu nulový a všechna energie je opět soustředěna v elektrickém poli kondenzátoru.

Střídavé obvody - úvod

- Speciálním případ kvazistacionárních obvodů.
- Obsahují zdroj harmonického střídavého elektromotorického napětí.
- Je připojena lib. kombinace rezistorů, cívek a kondenzátorů, jejichž parametry jsou konstantní, nezávislé na protékajícím proudu (tj. vylučujeme např. cívky s feromagnetickými jádry).
- Lze ukázat, že po dostatečně dlouhé době bude mít proud protékající prvky harmonický průběh (*ustálený stav* obvodu).

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i).$$

- Okamžitá hodnota napětí na daném prvku:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u).$$

- Impedance Z: $$I_0 = \frac{U_0}{Z}.$$

- Vztah mezi amplitudami - neřeší fáze.
- [Z] = Ω Ohm