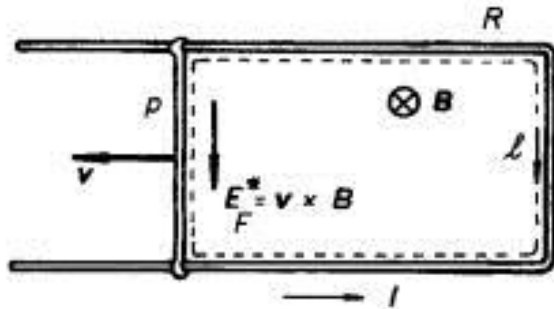
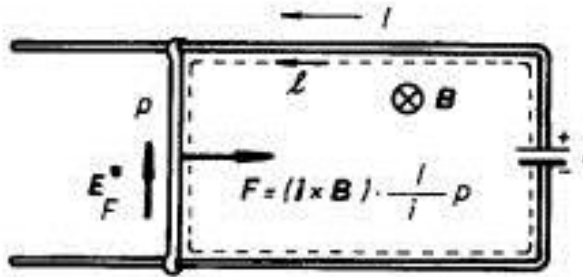


Princip elektrického stroje - generátor



- Vodivá smyčka ve tvaru obdélníka, zhotovená z homogenního vodiče vyhovujícího Ohmovu zákonu.
 - Smyčka je vložena do homogenního magnetického pole \mathbf{B} .
 - Příčka p se pohybuje působením vnější síly rychlostí v .
 - Na náboje působí síla: $\mathbf{E}_F^* = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.
- Tato intenzita může nahradit vtištěnou intenzitu: $\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$ O. z.
 - Integrace podél smyčky: $RI = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$
 - označíme \mathcal{E}'_F : $\mathcal{E}'_F = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_p (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = Bvp = -\Delta\Psi/\Delta t$.
 - Vtištěná síla koná práci, která se přeměňuje na Jouleovo teplo, které vzniká průchodem proudu obvodem.

Princip elektrického stroje - elektromotor



- Vodivá smyčka ve tvaru obdélníka, zhotovená z homogenního vodiče vyhovujícího Ohmovu zákonu.
- Smyčka je vložena do homogenního magnetického pole \mathbf{B} .
- Do smyčky nechť je zapojen vnější zdroj elektromotorického napětí \mathcal{E} , který v ní vzbudí proud I .
- Na příčku působí síla F .

- Práce za jednotku času:
$$N_m = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}' = \frac{I}{j} p [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}'] = IBpv'$$

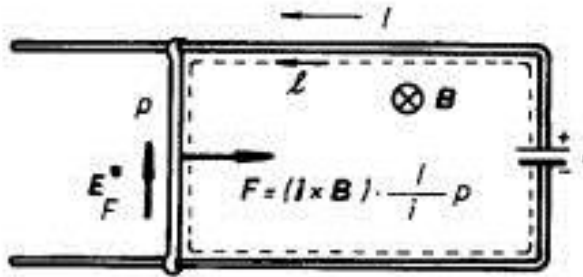
- Tato práce je konána na úkor energie dodané soustavě zdrojem elektromotorického napětí \mathcal{E} .

- Zákon zachování energie:
$$\mathcal{E}I = RI^2 + N_m = RI^2 + IBpv'$$

- Indukované el.-mot. napětí v příčce:
$$\mathcal{E}'_F = \oint_l \mathbf{E}_F^* \cdot d\mathbf{l} = -Bpv' < 0.$$

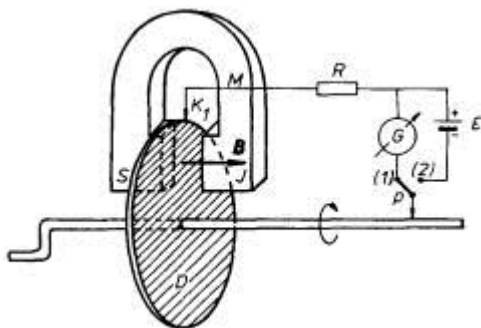
- Energetická bilance:
$$\mathcal{E}I = RI^2 - \mathcal{E}'_F I$$

Princip elektrického stroje - elektromotor



- Vnější zdroj elektromotorického napětí budí v obvodu proud, který vyvolává silové účinky na vodič p .
- Počne-li se vodič v důsledku těchto sil pohybovat, počne soustava konat mechanickou práci.
- V pohybující se smyčce se indukuje elektromotorické napětí \mathcal{E}'_F , které působí proti vnějšímu napětí \mathcal{E} , a způsobí tedy zmenšení proudu.
- Mechanická práce konaná při pohybu vodiče je konána na úkor energie dodané vnějším zdrojem elektromotorického napětí.
- Energie dodávaná vnějšími zdroji se spotřebovává na udržování proudu proti směru indukovaného elektromotorického napětí.

Barlowovo kolečko



- Reálná obdoba popisované smyčky.
- Vodivý (nejčastěji měděný) disk D upevněný na otočném hřídeli je umístěn mezi póly trvalého magnetu M .
- Při otáčení hřídelem můžeme měřicím přístrojem G detekovat indukovaný proud (přepínač P v poloze (1)).
- Zapojíme-li do obvodu vnější zdroj el.-mot. napětí \mathcal{E} tak, aby obvodem protékal proud stejného směru (přepínač P v poloze (2)), počne se kolečko otáčet opačným směrem.

Princip fluxmetru

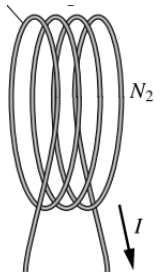
- Klasický přístroj, který se dříve hojně užíval k měření magnetického pole.
- Převedení měření změny magnetického toku plochou vodivé smyčky na měření náboje prošlého obvodem.
- Pp. rovinnou cívku o N závitů umístěnou ve vnějším magnetickém poli B , malého průřezu S , abychom v celém jejím objemu mohli magnetické pole považovat za homogenní.
- Cívka je zapojena do obvodu o celkovém odporu R .
- Měřidlo měří celkový prošlý náboj q .
- Změna magnetické pole z počáteční hodnoty B_i na konečnou hodnotu B_f .
- Počáteční a konečná hodnota celkového magnetického toku cívku:

$$\Psi_i = N(\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{S}), \quad \Psi_f = N(\mathbf{B}_f \cdot \mathbf{S})$$

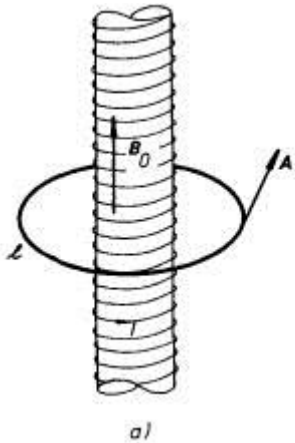
- $I(t)$ je okamžitá hodnota proudu indukovaného v obvodu cívky při změně mg. pole:

$$q = \int_0^{\infty} I(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \mathcal{E}_F(t) dt = -\frac{1}{R} \int_0^{\infty} \frac{d\Psi}{dt} dt = -\frac{1}{R} \int_{\Psi_i}^{\Psi_f} d\Psi = \frac{\Psi_f - \Psi_i}{R}$$

- Celkový náboj q prošlý obvodem při změně pole nezávisí na charakteru této změny, ale jen na počáteční (Ψ_i) a konečné (Ψ_f) hodnotě magnetického toku.



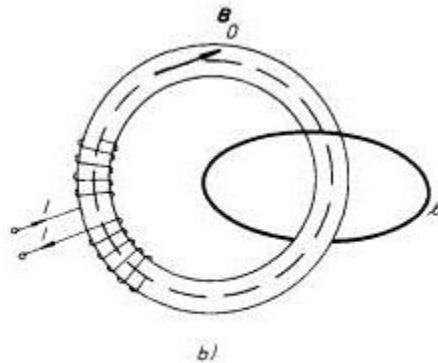
Obecnější pohled na el.-mg. indukci



- El.-mg. indukce nemůže být vždy vyložena na základě silových účinků mg. pole na pohybující se náboje.
- Pp. kruhovou vodivou smyčkou I poloměru r , obepínající nekonečně dlouhý solenoid o poloměru $a < r$.
- Smyčka I prochází celá prostorem s $B = 0 \Rightarrow$ mg. pole vytvořené solenoidem nemůže na nositele proudu ve smyčce silově působit.

$$\mathcal{E}_F(t) = -\pi a^2 \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_I \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_I \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}$$

- **A má reálný smysl i v místech, kde je $B = 0$.**
- Reálná demonstrace s toroidem



Elektrická kytara

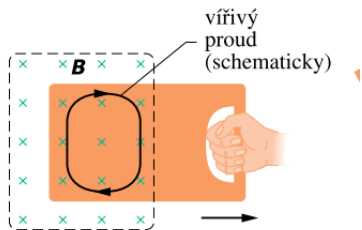


- Nemá dutou část, která by rezonovala.
- 3 x 6 elektrických snímačů

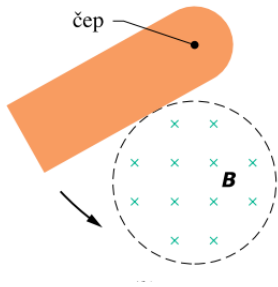


- Cívka navinutá na malý permanentní magnet, jehož magnetické pole indukuje severní a jižní pól v části kovové struny, která je právě nad magnetem.
- Pokud začne struna kmitat, její pohyb vůči cívce mění indukční magnetický tok cívkou a tím se v cívce indukuje proud.
- Indukovaný proud mění směr se stejnou frekvencí jako kmity struny a přenáší tyto kmity do zesilovače a reproduktoru.
- Citlivost snímače je daná počtem závitů snímací cívky.

Vířivé proudy



- Pp.: vytahujeme kovovou desku z magnetického pole.
- V desce se indukují proudy - dráha elektronů je méně uspořádaná - neexistuje jediná smyčka = vířivý proud.
- Při tažení desky je nutné konat práci!
- Platí obecně pro vkládání či vyjímání vodivých těles do/z magnetického pole.
- Princip indukčního ohřevu.



- Vodivá deska, otáčivá kolem vodorovné osy jako kyvadlo, prochází magnetickým polem.
- Vždy během vstupu do pole a výstupu z něj se část mechanické energie kyvadla disipuje.
- Po několika kmitech mechanická energie klesne na nulu, deska se přestane kývat a zastaví se v dolní rovnovážné poloze.

Obecné vlastnosti kvazistacionárního el.-mg. pole

- V kvazistacionárním přiblížení připouštíme "pomalé" časové změny příslušných charakteristik soustavy.
- objemová hustota volných nábojů $\rho(r, t)$ i objemová hustota vázaných nábojů $\rho_p(r, t)$ mohou být explicitní funkce času.
- „Pomalost“ časových změn: $\frac{\partial \rho}{\partial t} \doteq 0$.

- Rovnice kontinuity proudu:

$$\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \doteq 0,$$

- Málo se uplatní vázané proudy, včetně posuvného proudu v dielektrikách:
- Zanedbávají magnetické účinky posuvných proudů .
- $\mathbf{E}(r, t)$ můžeme s dobrou přesností považovat za pole potenciální:

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \doteq 0$$

$$\oint_l \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\text{grad} \varphi(\mathbf{r}, t).$$

$$\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}.$$

Obecné vlastnosti kvazistacionárního el.-mg. pole 2

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

- Gaussův zákon v látkovém prostředí:

$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = Q$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t).$$

- Za zdroje magnetického pole mohou být (vedle zmagnetovaných látek) považovány jen volné proudy \Rightarrow platnost Ampérova zákona:

$$\oint_l \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = I,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t),$$

- Pp:
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{P}_m(\mathbf{r}, t)) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$$

Obecné vlastnosti kvazistacionárního el.-mg. pole 2

- Vektorový potenciál:

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$$

- kalibrační podmínka:

$$\text{div}\mathbf{A} = 0$$

- Platí vztahy pro bezdrojovost mg. pole:

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

$$\text{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

- Zákon el.-mg. indukce:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- Tato čas. závislost se nezanedbává!!!
- Vesměs stejné rovnice jako stacionární el. a mg. pole, nové okrajové podm. - musí se brát v úvahu navíc pole indukované vtištěné intenzity $\mathbf{E}_F^*(\mathbf{r})$

Obecné vlastnosti kvazistacionárního el.-mg. pole 3

- Materiálové konstanty - pro pomalu se měnící pole - stále konstanty.

- Ohmův zákon - včetně vtištěné intenzity: $\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$.

- Naopak neplatí: ~~$$\rho = \operatorname{div} \mathbf{D} = \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\varepsilon}{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$
$$\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\chi_e \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\chi_e}{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$~~

- Při uplatnění elektromagnetické indukce může být i v homogenním prostředí nenulová hustota volných či vázaných nábojů.

Vlastní a vzájemná indukčnost vodičů

- Pp. vodivou smyčku protékanou proudem $I(t)$, která je uložena ve vakuu.
- Mg. pole $B(r, t)$ v daném bodě vybuzené touto smyčkou je lineární funkcí proudu $I(t)$ - z Biot-Savartova zákona:

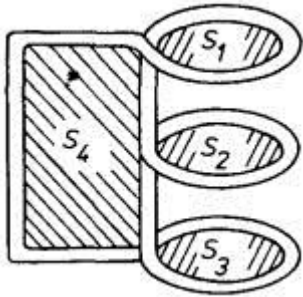
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{d\mathbf{l}}{R}$$

- Směr vektoru \mathbf{B} zůstává v každém bodě stálý; se změnami proudu se mění pouze jeho velikost.
- Magnetický tok Ψ libovolnou plochou S je proto také lineární funkcí proudu I .
- Linearita zůstane zřejmě zachována i v případě, kdy bude prostor vyplněn lineárním hmotným prostředím (tj. dia- a paramagnetické látky).
- Pp., že za plochu S zvolíme některou z ploch ohraničenou uvažovanou proudovou smyčkou l

$$\Psi = L I,$$

- L - indukčnost smyčky
- závisí pouze na geom. tvaru a příp. na permeabilitě prostředí.
- $[L] = H = Wb/A = Vs/A$ Henry

Elektromagnetická indukce



- Mg. tok složitějším obvodem: součet toků jednotlivými smyčkami.

Vlastní a vzájemná indukčnost vodičů 2

- Vlastní indukčnost vodiče vyjadřuje jeho schopnost vytvářet magnetické pole.
- cf. kapacita
- Vlastní indukčnost může být zavedena nejen pro uzavřenou smyčku konečných rozměrů, ale i pro libovolný vodič či jeho úsek.

- Obecnější soustava: N smyček I_1, I_2, \dots, I_N , protékaných proudy I_1, I_2, \dots, I_N .
- Celkový magnetický tok Ψ_i , protékající i -tou smyčkou, bude obecně záviset na proudech ve všech uvažovaných N smyčkách.
- Příspěvek Ψ_{ik} k -té smyčky k celkovému toku Ψ_i : $\Psi_{ik} = L_{ik} I_k$,

- Celkový tok Ψ_i libovolné z uvažovaných smyček ($i = 1, \dots, N$) $\Psi_i = \sum_k L_{ik} I_k$

- L_{kk} ($k = 1, \dots, N$) - vlastní indukčnost smyčky k
- L_{ik} ($i, k = 1, \dots, N; i \neq k$) - vzájemná indukčnosti smyček i, k
- $L_{ik} = L_{ki}$
- $L_{kk} \geq 0$

- - statická definice

Vlastní a vzájemná indukčnost vodičů 3

- dynamická definice - pomocí vztahu pro el.-mg. indukci

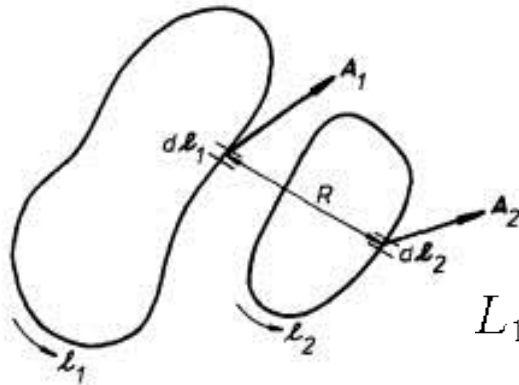
$$\mathcal{E}_{F,i} = -\frac{d\Psi_i}{dt} = -\sum_{k=1}^N L_{ik} \frac{dI_k}{dt}.$$

- pomocí el.-mot. napětí indukovaných v jednotlivých smyčkách

- Pro jednu smyčku:

$$\mathcal{E}_F = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Vlastní a vzájemná indukčnost vodičů 4



- symetrie $L_{ik} = L_{ki}$
- dvojice smyček l_1, l_2

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{d\mathbf{l}}{R}$$

$$L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2},$$

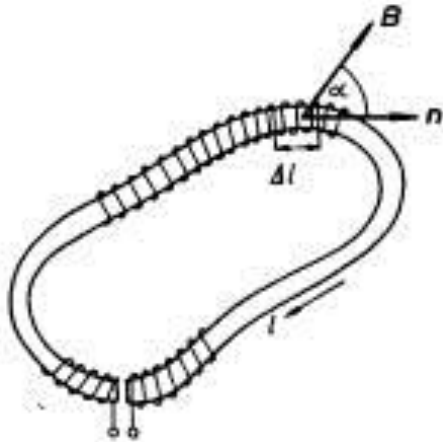
$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{R}.$$

- libovolné pořadí integrace, a tedy $L_{ik} = L_{ki}$
- Věta o vzájemnosti:

Jestliže proud I v k -tém obvodu přispívá k celkovému magnetickému toku i -tého obvodu hodnotou Ψ_{ik} , pak stejný proud v i -tém obvodu přispívá stejnou hodnotou magnetického toku k -tého obvodu.

Příklady - měřicí transformátor



- Cívka o velkém počtu závitů (hustota z_0) navinutou na ohebném jádru malého průřezu ΔS , zhotoveném z vhodného materiálu (kůže, plastická látka apod.).
- Z této cívky lze vytvořit uzavřenou smyčku l velmi obecného tvaru.
- Plocha každého závitu je v podstatě kolmá ke směru křivky l v daném místě.
- Cívka je vložena do magnetického pole \mathbf{B} libovolné soustavy vodičů.
- n - jednotkový vektor ve směru tečny l , resp. kolmice k ploše závitu ΔS .

$$\Delta l = n \Delta l \quad \Delta S = n \Delta S$$

$$\Delta \Psi = z_0 \Delta l \Delta \Phi = z_0 \Delta S (\mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{l})$$

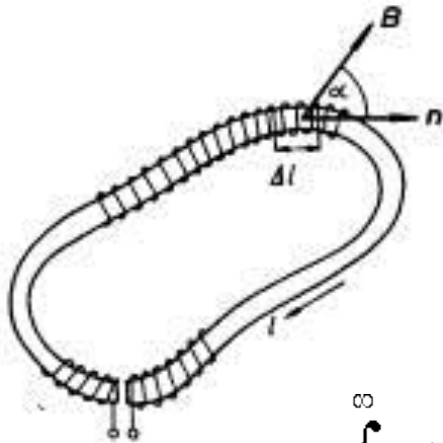
mg. tok na délce Δl

$$\Psi = z_0 \Delta S \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

mg. tok na celé délce l

$$\mathcal{E}_F(t) = -z_0 \Delta S \frac{d}{dt} \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

Příklady - měřicí transformátor



- V $t = 0$ zapneme proud, který narůstá až do rovnovážné hodnoty.

$$Q = \int_0^{\infty} I(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \mathcal{E}_F(t) dt = -\frac{z_0}{R} \int_0^{\infty} \frac{d\Psi}{dt} dt = -\frac{z_0 \Delta S}{R} \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}.$$

- Ampérův zákon:

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

- Můžeme jej ověřit, pokud cívku připojíme k měřiči prošlého náboje.
- Naopak, velikost proudu můžeme měřit pomocí magnetických účinků.
- Velkých střídavé proudy se měří pomocí měrných cívek pevného tvaru, zpravidla na feromagnetickém jádru, které se nazývají měřicí transformátory.

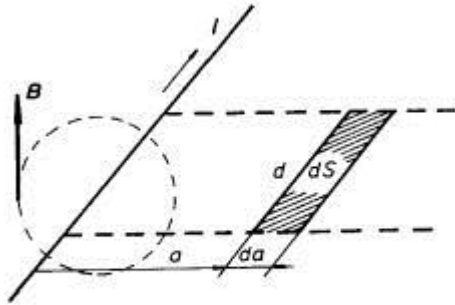
Příklady - měřící transformátor

11.16. Magnetomotorické napětí ss proudu (Sedlákův řemen)

Demonstrací se ověřuje vztah pro magnetické napětí $\oint H ds \approx I$ měřičem magnetického napětí (indukční cívka navinutá na ohebném řemeni) v magnetickém poli stejnosměrného proudu



Vlastní indukčnost přímých vodičů



a)

- Jediný nekonečně dlouhý velmi tenký vodič protékaný proudem I ve vakuu.
- Určíme vlastní indukčnost tohoto vodiče připadající na délku d .
- Tok radiální plochou šířky da .

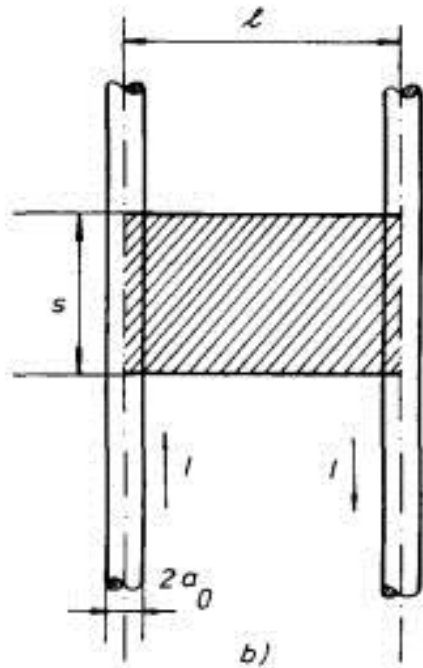
$$d\Psi = BdS = Bd da$$

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a}$$

$$L_d = \frac{\Psi_d}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} d \int_0^{\infty} \frac{da}{a}.$$

- Výraz diverguje pro obě meze - nelze najít konečnou hodnotu L_d .

Vlastní indukčnost dvojice přímých vodičů



- Vlastní indukčnosti dvou přímých, rovnoběžných, nekonečně dlouhých vodičů konečného průměru $2a_0$, jejichž osy jsou vzdáleny o l .
- Stačí uvažovat část radiální plochy šířky s mezi osami obou vodičů.
- Pole vně vodičů:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a}$$

$$L_d = \frac{\Psi_d}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} s \int_0^{\infty} \frac{da}{a}$$

- Uvnitř vodiče (pp. $\mu_r = 1$):

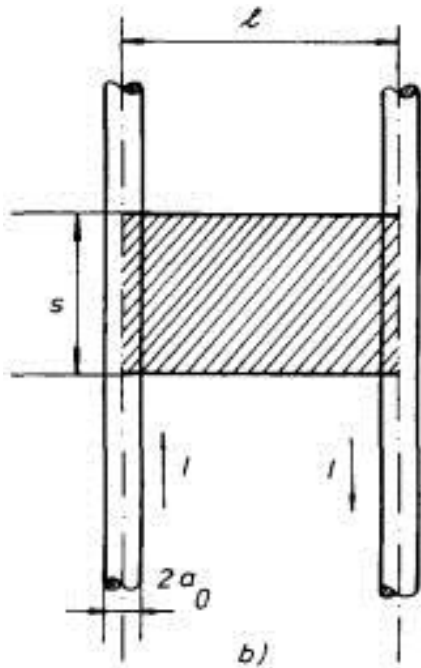
$$I' = \frac{a^2}{a_0^2} I \quad 2\pi a B = \mu_0 I', \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi a_0^2} I a. \quad L_s = \frac{\mu_0}{2\pi a_0^2} s \int_0^{a_0} a da$$

$$L_s = \frac{\mu_0}{2\pi a_0^2} s \left[\int_0^{a_0} a da - \int_{l-a_0}^l (l-a) da \right] + \frac{\mu_0}{2\pi} s \left[\int_{a_0}^{l-a_0} \frac{1}{a} da - \int_{a_0}^{l-a_0} \frac{1}{l-a} da \right]$$

Uvnitř

Vně

Vlastní indukčnost dvojice přímých vodičů



- po integraci

$$L_s = \frac{\mu_0}{2\pi} s \left(1 + 2 \ln \frac{l - a_0}{a_0} \right).$$

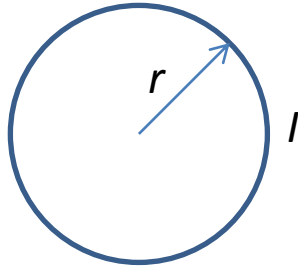
- pro případ dutých vodičů - první člen odpadne.

- kapacita

$$C_l = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{l - R}{R}}$$

$$L_0 C_0 = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Vlastní indukčnost kruhové smyčky



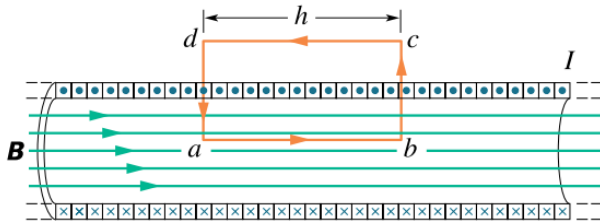
- **kruhová smyčka o poloměru r** vložena ve vakuu a protékána **proudem I**
- vodič má **kruhový průřez** o poloměru a_0 .
- je třeba vypočítat **magnetický tok kruhovou plochou ohraničenou osovou kružnicí smyčky**
- tok **vně** vodiče + tok **vnitřkem** vodiče
- Pro $r \gg a_0$ lze zanedbat zakřivení kružnice \Rightarrow **vnitřní tok**: přímý vodič délky $2\pi r$

- **Vnější část toku**: je nutné znát B po celé ploše kruhu.
- Vně smyčky lze smyčku považovat ze nekonečně tenkou osovou kružnicí.
- Úloha je ekvivalentní výpočtu vzájemné indukčnosti dvou tenkých koncentrických kruhových smyček o poloměrech r a $r - a_0$ ležících v téže rovině.

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{R}$$

- Vlastní integrace obtížná - výsledek:
$$L = \mu_0 r \left(\ln \frac{8r}{a_0} - \frac{7}{4} \right).$$

Vlastní indukčnost solenoidu



- Dlouhý solenoid délky l a poloměru R , na němž je navinuto N_l závitů na jednotku délky.
- Uvnitř pp. homogenní pole $B = \mu_0 I N_l$
- Celkový tok všemi závity ($S = \pi R^2$):

$$\Psi = N_l B S l$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 N_l^2 V$$

- $V = S l$ je objem solenoidu.
- Při zahrnutí okrajových efektů

$$L = k \mu_0 N_l^2 V$$

- kde

$$k = 1 - \frac{8R}{3\pi l} + \frac{R^2}{2l^2} - \frac{R^4}{4l^4}$$