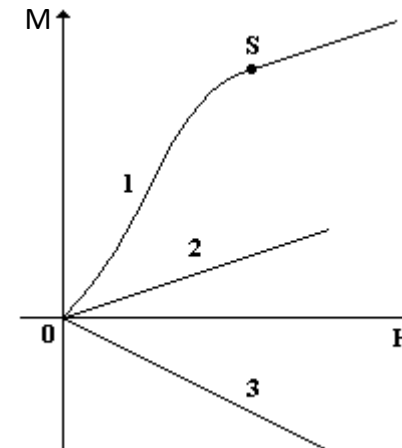
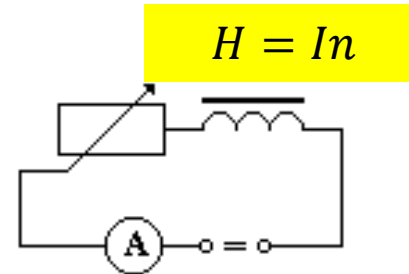


Materiálové vztahy pro mg. pole v látce

Silně magnetické látky

- magnetizace závisí na historii
- od 0 - křivka prvotní magnetizace - nejprve rychlý růst, pak saturace S
- Saturace - následný růst je úměrný růstu pole v cívce - všechny mg. domény uspořádané, $\mu = \text{konst.}$ pro $H > H_S$



Slabě magnetické látky

- Křivka 2 - paramagnetický materiál
- Křivka 3 - diamagnetický materiál

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

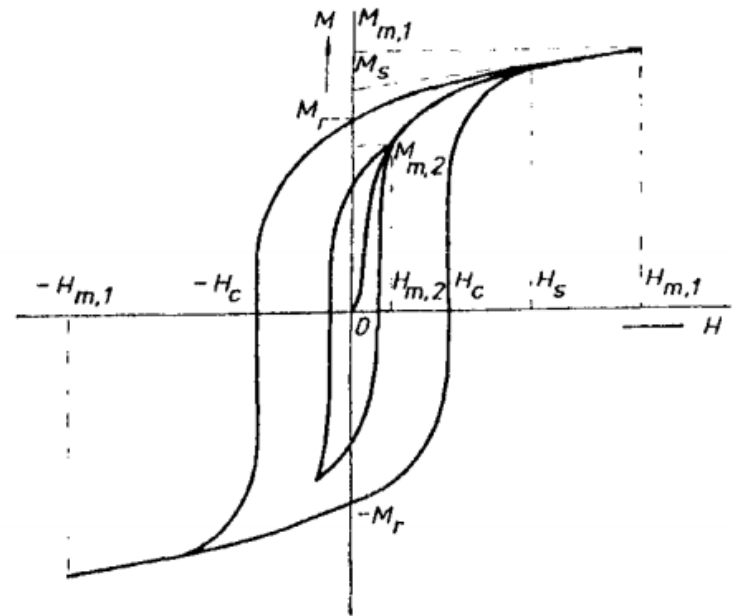
$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Materiálové vztahy pro mg. pole v látce

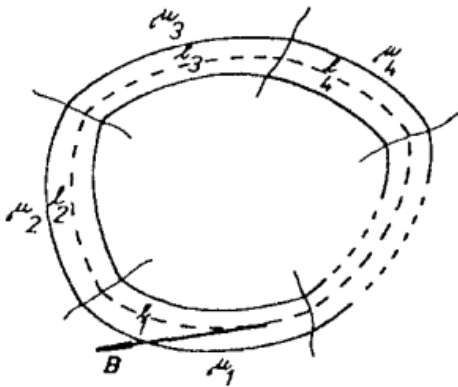
Silně magnetické látky

- magnetizace závisí na historii
- od 0 - křivka prvotní magnetizace - nejprve rychlý růst, pak saturace (H_s)
- M_s - spontánní magnetizace daného feromagnetika
- Při poklesu pole: M_t -remanentní magnetizace při nulovém poli
- H_c - koercitivní pole - $M = 0$
- cyklický proces - po hysterezní smyčce



- magneticky tvrdé látky - co nejširší hysterezní křivka
- vysoká hodnota koercitivního pole $H_c > 10^3 \text{A.m}^{-1}$
- co největší hodnota remanentní magnetizace M_r
- prvky: železo, kobalt, nikl, gadolinium, další kovy vzácných zemin

Magnetický obvod



- Uzavřenost mg. indukčních čar - podobné proudovým čarám stacionárního proudu.
- Magnetická toková trubice - ohraničuje konstantní magnetický tok.
- Homogenní izotropní prostředí μ_1, μ_2, \dots
- Křivka l obepíná celkový proud I .
- S je lib. plocha kolmá k B .

$$\Phi_B = B \cdot S$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I = \mathcal{E}_m$$

- Magnetomotorické napětí - míra, kterou se na vytvoření mg. pole podílí elektrický proud.

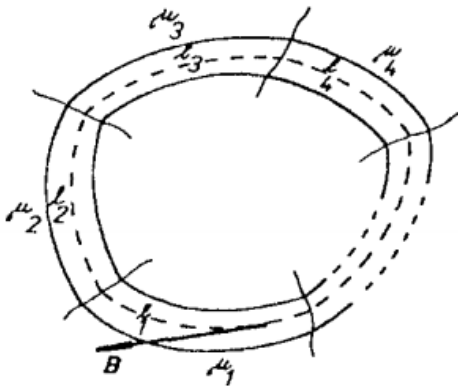
- Magnetický tok podél celého obvodu je konstantní. Pro lib. úsek platí:

$$\int_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Phi \int_l \frac{dl}{\mu_i S}$$

$$U_{m,i} = \int_{l_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

- V analogii s el. obvodem definujeme *magnetické napětí* na úseku l_i .

Magnetický obvod



- R_m - magnetický odpor části obvodu l_i .
- Permeabilita μ_i = měrná magnetická vodivost.

$$\int_{l_i} \frac{dl}{\mu_i S} = R_m$$

$$U_{mi} = \Phi_B R_m$$

Obdoba Ohmova zákona
Hopkinsonův zákon

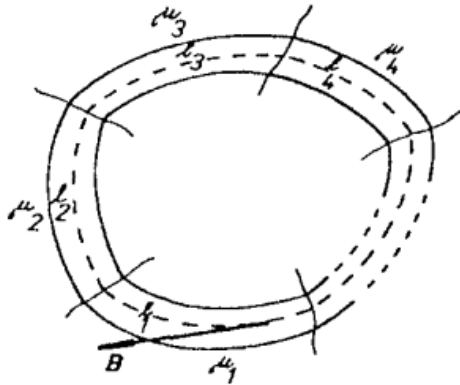
Pro celý obvod:

$$\mathcal{E}_m = \sum_{i=1}^N \int_{l_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N U_{m,i}$$

$$\mathcal{E}_m = \Phi \int_{l_1} \frac{dl}{\mu_1 S} + \dots + \Phi \int_{l_N} \frac{dl}{\mu_N S},$$

$$\mathcal{E}_m = \Phi R_{m,1} + \Phi R_{m,2} + \dots + \Phi R_{m,N}$$

Magnetický obvod



$$U_{mi} = \Phi_B R_m \quad \text{Hopkinsonův zákon}$$

- $[U_{mi}] = A = \text{ampérzávit}$
- $[\Phi_B] = \text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{V} \cdot \text{s} = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$
- $[R_m] = \text{A} \cdot \text{T}^{-1} \text{m}^{-2}$

Obdoba Kirchhoffových pravidel.

Magnetostatické pole

- Mg. pole, které vzniká jen v důsledku přítomnosti zmagnetovaných látek, bez přítomnosti volných makroskopických proudů.
- Pole objemově rozložených dipólů,
- Platí obvyklá sada rovnic.
- Speciální vlastnosti:
- Ampérův zákon:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$$

- Magnetostatické pole je potenciální.
- Plošná a prostorová hustota mg. náboje:

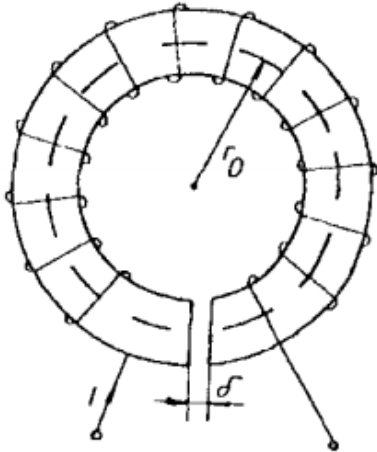
$$\sigma_m(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}'), \quad \rho_m(\mathbf{r}') = -\text{div } \mathbf{M}(\mathbf{r}')$$

- Skalární potenciál:

$$\varphi_m(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[\int_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{R} dS + \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{R} dV \right].$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi_m(\mathbf{r}) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \text{grad } \varphi_m(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

Příklad - toroidní jádro se vzduchovou mezerou



- Jádro (index j) z materiálu s vysokou permeabilitou $\mu_r \gg 1$.
- Střední průměr r_0 , průřez jádra S_0 , z závitů, proud I , mezeru δ .
- Pp. magnetický tok, který teče plochou S teče i v

$$R_{m,v} = \frac{\delta}{\mu_0 S}, \quad R_{m,j} = \frac{2\pi r_0 - \delta}{\mu S} \doteq \frac{2\pi r_0}{\mu S}$$

$$\Phi = \frac{zI}{R_{m,v} + R_{m,j}}$$

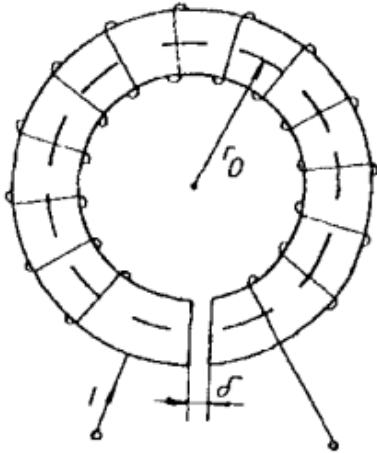
$$B_j = B_v = \frac{\Phi}{S}$$

$$B_j = \mu H_j, \quad B_v = \mu_0 H_v$$

$$\mu_r = \frac{H_v}{H_j}$$

- Magnetická indukce všude stejná, intenzita mg. pole ve vzduchu μ_r x větší než v jádře.
- V materiálu s velkým μ je nižší magnetický odpor \Rightarrow vyšší magnetický tok

Příklad - toroidní jádro se vzduchovou mezerou



- Vypnut proud, ve feromagnetickém jádru magnetizace M_0 = magnetostatický problém

$$0 = \int_L \mathbf{H}_j \cdot d\mathbf{l} + \int_L \mathbf{H}_v \cdot d\mathbf{l} = H_j(2\pi r_0 - \delta) + H_v \delta$$

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{B}_v = \mathbf{B},$$

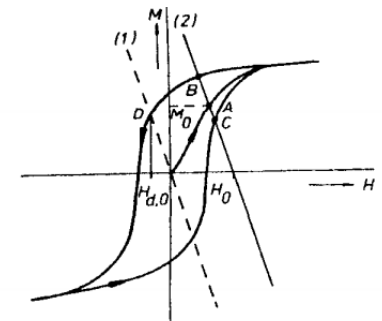
$$B_v = \mu_0 H_v, \quad B_j = \mu_0 H_j + P_{m,0}.$$

$$H_j = \frac{-\delta}{2\pi r_0 - \delta} H_v,$$

$$B = \frac{2\pi r_0 - \delta}{2\pi r_0} P_m$$

$$\mu_0 H_v \left(1 + \frac{\delta}{2\pi r_0 - \delta} \right) = P_{m,0},$$

$$H_j = -\frac{\delta}{2\pi r_0} M_0$$



- Intenzita pole v jádře opačná než \mathbf{B} a \mathbf{H}_v . Je určeno demagnetizačním polem (bod D hysterezní smyčky).

Koule v homogenním magnetickém poli

- Magneticky homogenní a izotropní koule.
- Vnější mg. pole \mathbf{B}_0 .
- Analogie s dielektrickou koulí: homogenní magnetizace \mathbf{M}_0 .
- mg. dipól $\mathbf{m}_V = \mathbf{M}_0 V$
- Výsledné pole - superpozice \mathbf{B}_0 a \mathbf{B}_m - pole zmagetované koule
- \mathbf{B}_m - vně koule je pole totožné s polem magnetického dipólu umístěného ve středu koule.

- Uvnitř koule demagnetizační pole: $\mathbf{H}_d = -\frac{1}{3}\mathbf{M}_0$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{M}_0$$

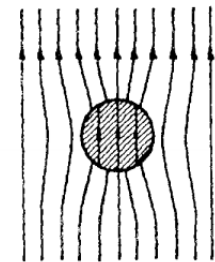
$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_0) = \mu_0\left[\mathbf{H} + \frac{2}{3}\mathbf{M}_0\right]$$

- cf. $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}_E}{3\epsilon_0}$ elektrická polarizace diel. koule

- Lineární měkké diamagnetikum: $\chi_m < 0$

$$\mathbf{H} = \frac{3}{3 + \chi_m}\mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B} = 3\frac{1 + \chi_m}{3 + \chi_m}\mathbf{B}_0$$

- Mg. indukce \mathbf{B} uvnitř koule je slabší než původní pole \mathbf{B}_0 !!!
- $\mathbf{H} > \mathbf{H}_0$



Koule v homogenním magnetickém poli

- Magneticky homogenní a izotropní koule.
- Vnější mg. pole \mathbf{B}_0 .
- Analogie s dielektrickou koulí: homogenní magnetizace \mathbf{M}_0 .
- mg. dipól $\mathbf{m}_V = \mathbf{M}_0 V$
- Výsledné pole - superpozice \mathbf{B}_0 a \mathbf{B}_m - pole zmagetované koule
- \mathbf{B}_m - vně koule je pole totožné s polem magnetického dipólu umístěného ve středu koule.

- Uvnitř koule demagnetizační pole: $\mathbf{H}_d = -\frac{1}{3}\mathbf{M}_0$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{M}_0$$

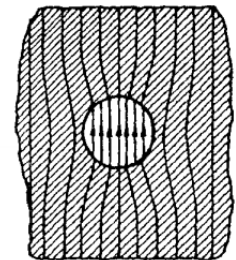
$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_0) = \mu_0\left[\mathbf{H} + \frac{2}{3}\mathbf{M}_0\right]$$

- cf. $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}_E}{3\epsilon_0}$ elektrická polarizace diel. koule

- Lineární měkké paramagnetikum: $\chi_m > 0$

$$\mathbf{H} = \frac{3}{3 + \chi_m}\mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B} = 3\frac{1 + \chi_m}{3 + \chi_m}\mathbf{B}_0$$

- Mg. indukce \mathbf{B} uvnitř koule je silnější než původní pole \mathbf{B}_0 !!!
- $\mathbf{H} < \mathbf{H}_0$



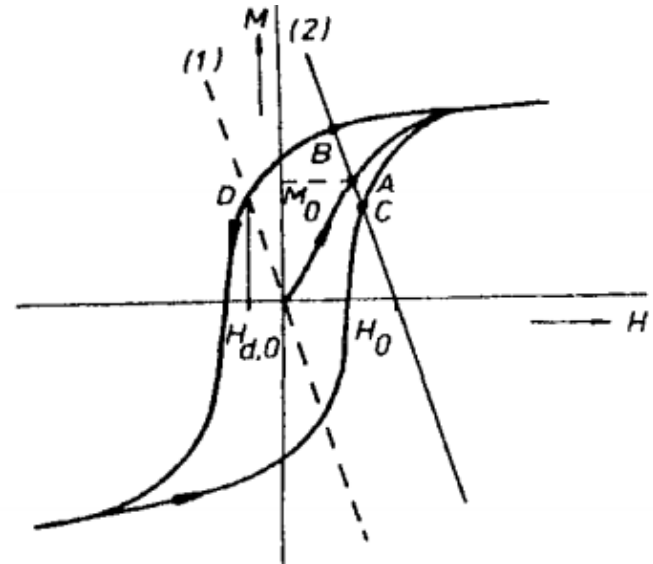
Koule v homogenním magnetickém poli

- Uvnitř koule demagnetizační pole: $H_d = -\frac{1}{3}M_0$

$$H = H_0 + H_d = H_0 - \frac{1}{3}M_0$$

$$B = \mu_0(H + M_0) = \mu_0\left[H + \frac{2}{3}M_0\right]$$

- Feromagnetikum:**
- Vztah dán hysterezní smyčkou:
závislost demagnetizačního pole - přímka (1)
závislost celkového pole - přímka (2)
- Přímka 2, průsečíky A, B, C - možné hodnoty magnetizace materiálu podle historie.



Elipsoid v homogenním magnetickém poli

- Vnější pole ve směru některé s hlavních os elipsoidu.
- Homogenní magnetizace.
- Uvnitř demagnetizační pole: $\mathbf{H}_d = -N_i \mathbf{M}_0$
- N_i je hlavní hodnota demagnetizačního faktoru ve směru hlavní osy i .

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d = \mathbf{H}_0 - N_i \mathbf{M}_0$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_0) = \mu_0[\mathbf{H} + (1 - N_i)\mathbf{M}_0]$$

- Lineární měkké diamagnetikum:

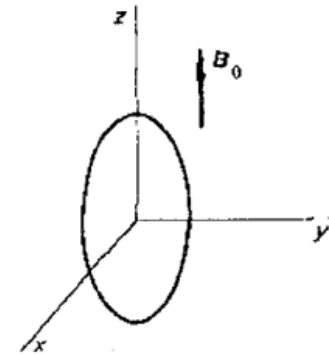
$$\mathbf{H} = \frac{1}{1 + N_i \chi_m} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B} = \frac{1 + \chi_m}{1 + N_i \chi_m} \mathbf{B}_0$$

Elipsoid v homogenním magnetickém poli

- Uvnitř elipsoidu demagnetizační pole: $\mathbf{H}_d = -N_i \mathbf{M}_0$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d = \mathbf{H}_0 - N_i \mathbf{M}_0$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_0) = \mu_0[\mathbf{H} + (1 - N_i)\mathbf{M}_0]$$



- Speciální případy pro měkké diamagnetikum
- Velmi protáhlý elipsoid ve směru osy symetrie:

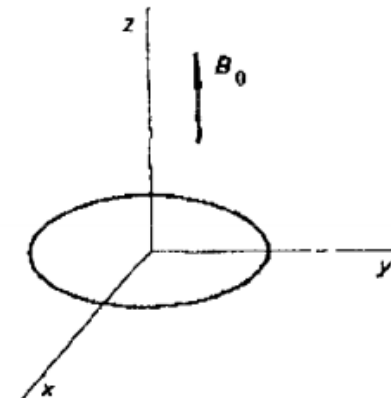
$$H_d = 0 \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_0)$$

- Velmi zploštělý elipsoid ve směru osy symetrie:

$$N_x = N_y = 0 \quad N_z = 1$$

$$\mathbf{H}_d = -\mathbf{M}_0$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{M}_0 \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0$$



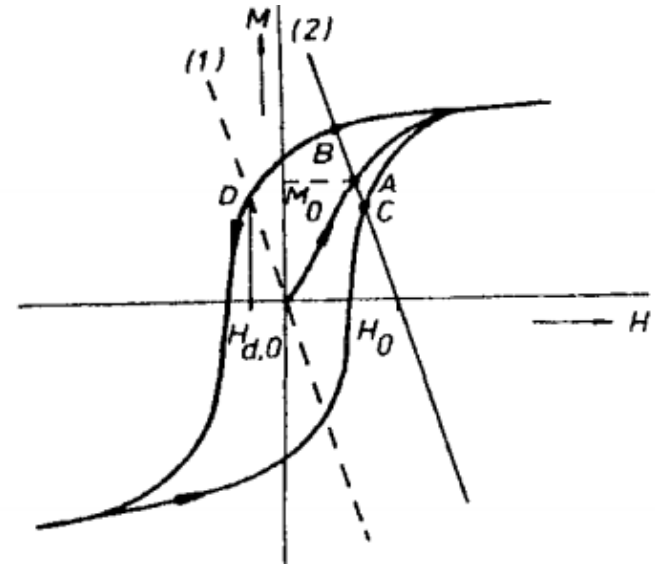
Elipsoid v homogenním magnetickém poli

- Uvnitř elipsoidu demagnetizační pole: $\mathbf{H}_d = -N_i \mathbf{M}_0$

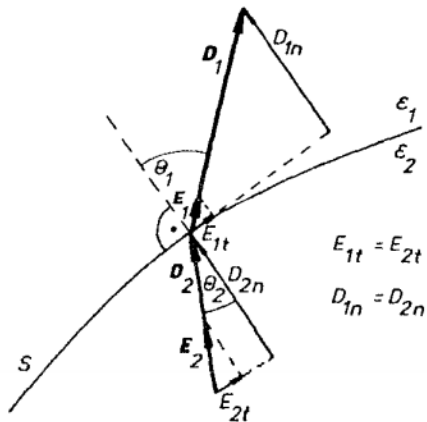
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d = \mathbf{H}_0 - N_i \mathbf{M}_0$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_0) = \mu_0[\mathbf{H} + (1 - N_i)\mathbf{M}_0]$$

- Feromagnetikum:**
- Vztah dán hysterezní smyčkou:
závislost demagnetizačního pole - přímka (1)
závislost celkového pole - přímka (2)
- Přímka 2, průsečíky A, B, C - možné hodnoty magnetizace materiálu podle historie.



Magnetické pole na rozhraní dvou prostředí



- Plocha S je rozhraním materiálů μ_1, μ_2 .
- Spojité tečné složky \mathbf{H} ($j_s=0$).
- Spojité normálové složky \mathbf{B} .

$$H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2$$

$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\mu_1} \mathbf{H}_1$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{H}_2$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

- cf. Snellův zákon dopadu a odrazu.
- Z prostředí o vysoké permeabilitě vystupuje magnetické pole kolmo k povrchu:

$$\mu_1 = \mu_0, \mu_2 \gg \mu_0 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_0}{\mu_2} \doteq 0 \quad \theta_1 = 0$$

Magnetické pole v látce - souhrn vztahů

$$I_C = I + I'$$

I_C, j_C celkový náboj

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$$

$$\mathbf{j}_C = \mathbf{j} + \mathbf{j}'$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I + I'$$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_C$$

Obecný Ampérův zákon

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \frac{1}{\mu_r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

Ampérův zákon pro látkové prostředí - explicitně jen volný proud

$$\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

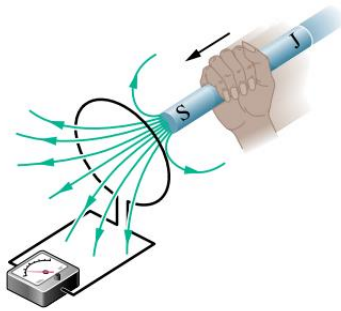
Kvazistacionární elektrické a magnetické pole

Elektromagnetická indukce

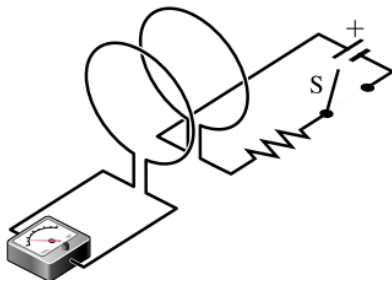
$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

- Rovnice kontinuity proudu
- Pp.. že časové změny jsou pomalé, takže $\frac{\partial \rho}{\partial t} \doteq 0$.

- El.-mg. indukce - Faraday 1831



- Ve smyčce se indukuje elektromotorické napětí, a tedy protéká jí proud, pokud se magnet pohybuje



- V levé smyčce se indukuje elektromotorické napětí, a tedy protéká jí proud, při sepnutí anebo rozepnutí spínače

Elektromagnetická indukce

Faradayův zákon el.-mg. indukce:

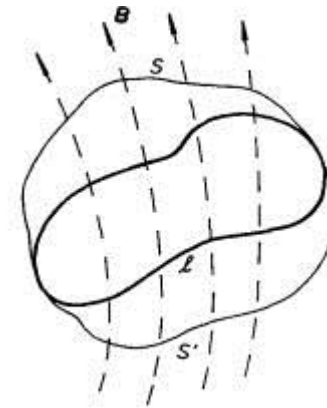
- Velikost elektromotorického napětí indukovaného ve vodivé smyčce je rovna rychlosti změny magnetického indukčního toku procházejícího touto smyčkou.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Faradayův indukční zákon})$$

$$\Phi_B = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

- Tok mg. indukce

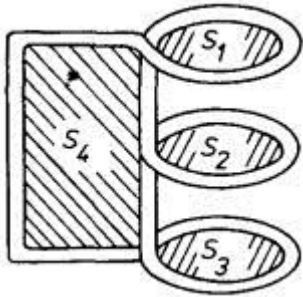
- Způsoby změny toku:
změna \mathbf{B}
změna \mathbf{S}
změna vzájemného směru \mathbf{B} a \mathbf{S}
změna proudu, který působí \mathbf{B}



$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

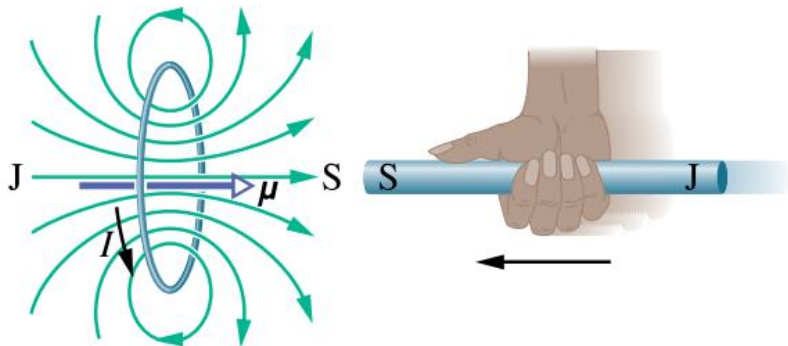
- Nejednoznačnost určení plochy uzavřené křivkou L - S možno volit libovolně, uzavřenost ind. čar platí i v kvazistacionárním přiblížení.

Elektromagnetická indukce



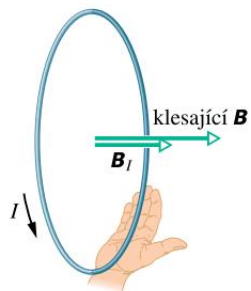
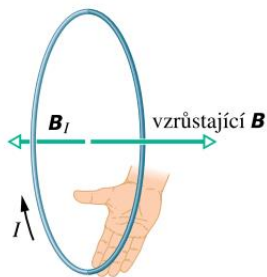
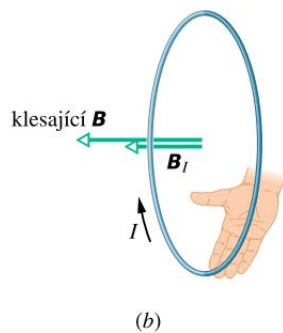
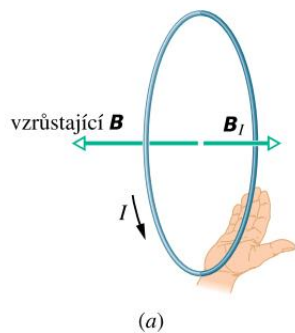
- Mg. tok složitějším obvodem: součet toků jednotlivými smyčkami.

Elektromagnetická indukce

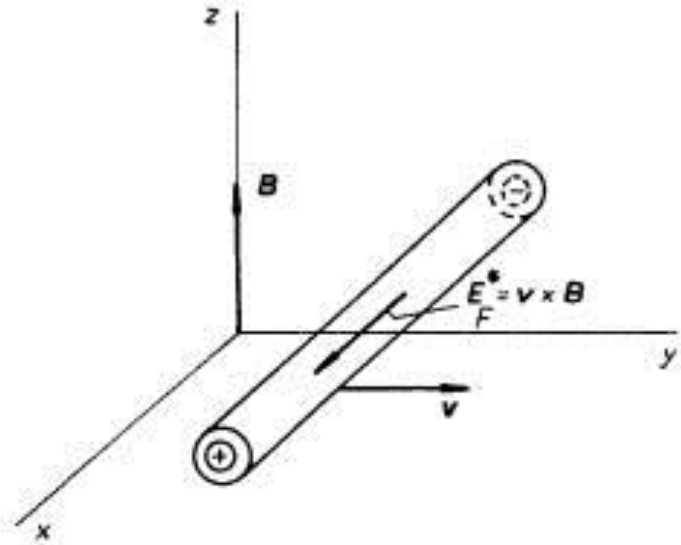


Lenzovo pravidlo:

- Indukovaný proud má takový směr, že magnetické pole tímto proudem vzbuzené působí proti změně magnetického pole, která proud indukovala.



Pohyb přímého vodiče v mg. poli



- Vodivá tyč se pohybuje ve směru osy y v homogenním magnetickém poli B orientovaném ve směru osy z .
- Lorentzova síla:

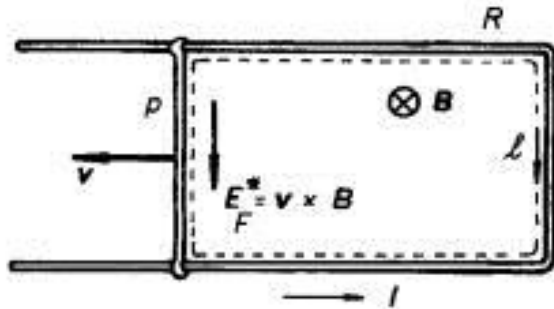
$$E_F^* = v \times B.$$

- Jeden konec tyče se nabije kladně, druhý záporně.
- Vytvoří se el. intenzita v rovnováze:

$$E = -v \times B.$$

- kompenzuje E_F^*

Princip elektrického stroje - generátor



- Vodivá smyčka ve tvaru obdélníka, zhotovená z homogenního vodiče vyhovujícího Ohmovu zákonu.
 - Smyčka je vložena do homogenního magnetického pole \mathbf{B} .
 - Příčka p se pohybuje působením vnější síly rychlostí v .
 - Na náboje působí síla: $\mathbf{E}_F^* = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.
- Tato intenzita může nahradit vtištěnou intenzitu: $\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$ O. z.
 - Integrace podél smyčky: $RI = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$
 - označíme \mathbf{E}_F : $\mathcal{E}'_F = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_p (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = Bvp = -\Delta\Psi/\Delta t$.
 - Vtištěná síla koná práci, která se přeměňuje na Jouleovo teplo, které vzniká průchodem proudu obvodem.