Objemové rozložení magnetických dipólů

- Objem V, v němž jsou spojitě rozloženy magnetické dipóly.
- ***M(r)*** - vektor magnetizace - objemová hustota mg. dipólu v objemu ΔV:

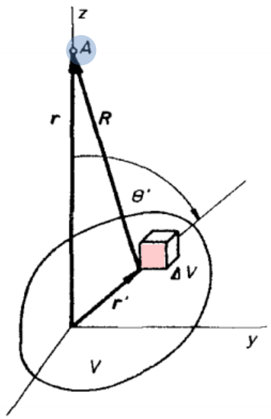
$$\boldsymbol{m}_{\Delta V} = \boldsymbol{M}\Delta V$$

$$\boldsymbol{m}_V = \int_V \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$$

- Dipólové momenty v různých místech mohou být orientovány různě a mohou mít různou velikost.
- Pokud budou orientovány zcela náhodně, vzájemně se kompenzují.

Objemové rozložení magnetických dipólů 2

- Vektorový potenciál:



$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{R}}{R^3}\,\mathrm{d}V'$$

Úpravy (derivace podle složek r’)

$$\operatorname{grad}'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \qquad \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{R}}{R^3} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times \operatorname{grad}'\frac{1}{R} = -\operatorname{rot}'\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R} + \frac{\operatorname{rot}'\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint_S \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{R} + \int_V \frac{\operatorname{rot}'\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}\,\mathrm{d}V'\right]$$

S je uzavřená plocha ohraničující objem *V*

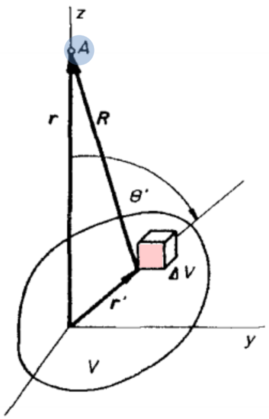
- Z B.-S. zákona:

$$\boxed{{}^{(m)}\boldsymbol{j}_S(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{n},}$$

$$\boxed{{}^{(m)}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = \operatorname{rot}'\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}'),}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint_S \frac{{}^{(m)}\boldsymbol{j}_S(\boldsymbol{r}')}{R}\,\mathrm{d}S' + \int_V \frac{{}^{(m)}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\,\mathrm{d}V'\right].}$$

Objemové rozložení elektrických dipólů 3

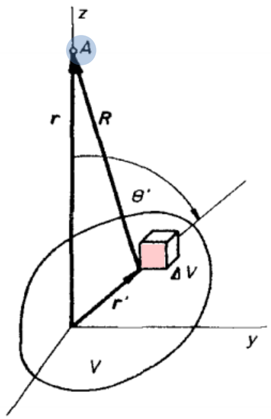


$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint_S \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{R} + \int_V \frac{\mathrm{rot}'\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\oint_S \frac{{}^{(\mathrm{m})}\boldsymbol{j}_S(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}S' + \int_V \frac{{}^{(\mathrm{m})}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'\right].}$$

- Mg. pole objemově rozložených mg. dipólů s objemovou hustotou $\boldsymbol{M}$ v objemu V je totožné magnetickým polem vytvořeným objemovými proudy hustoty ${}^{(m)}\boldsymbol{j}$ tekoucími v objemu V a plošnými proudy ${}^{(m)}\boldsymbol{j}_S$ tekoucím na ploše S ohraničující objem V.
- Průběh pole mg. indukce získáme jako $\boldsymbol{B}$ = rot $\boldsymbol{A}$.
- Pole $\boldsymbol{B}$ mg. dipólu je identické s polem $\boldsymbol{E}$ el. dipólu.

Objemové rozložení magnetických dipólů 3



- Pole ***E*** el. dipólu je potenciální, výrazy shodné s mg. dipólem $\Rightarrow$ lze najít skalární potenciál pro pole ***B*** mg. dipólu
- Zavedeme formálně plošnou a objemovou hustotu „mg. náboje“:

$$\sigma_m(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}').\mathbf{n}, \qquad \rho_m(\mathbf{r}') = -\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}')$$

- Skalární mg. potenciál:

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\left[\oint_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}S' + \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}V'\right]$$

- Mg. indukce v bodech s nulovou magnetizací:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \operatorname{grad} \varphi_m(\mathbf{r})$$

- Speciálně skalární potenciál pole jediného mg. dipólu:

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{m}.\mathbf{r}}{r^3}$$

Magnetická dvojvrstva

- Spojité rozložení magnetických dipólů na ploše *S*.
- Hustota $\boldsymbol{M}_s(\boldsymbol{r}')$
- Celkový moment:

$$\boldsymbol{m}_S = \int_S \boldsymbol{M}_S(\boldsymbol{r}') . \mathrm{d}S$$

- Dále jen *homogenní* dvojvrstva - $M_s(\boldsymbol{r}')$ = konst., směr normály k ploše.
- Z principu superpozice:

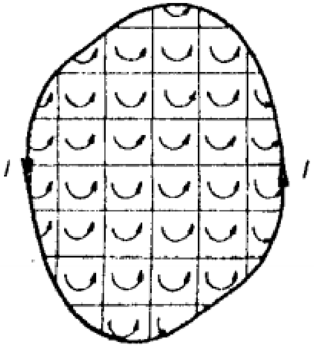
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\boldsymbol{M}_S(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{R}}{R^3} \mathrm{d}S'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} M_S \int_S \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{R}}{R^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} M_S \int_S \left(\mathrm{grad} \frac{1}{R} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} M_S \int_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{R}$$

- Převedení na křivkový integrál podél křivky *l* ohraničující plochu *S*.
- Výraz je totožný s vektorovým potenciálem tenké uzavřené proudové smyčky, pokud $\boldsymbol{M}_s = I\boldsymbol{n}$,

  $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor normály k ploše.

Magnetická dvojvrstva

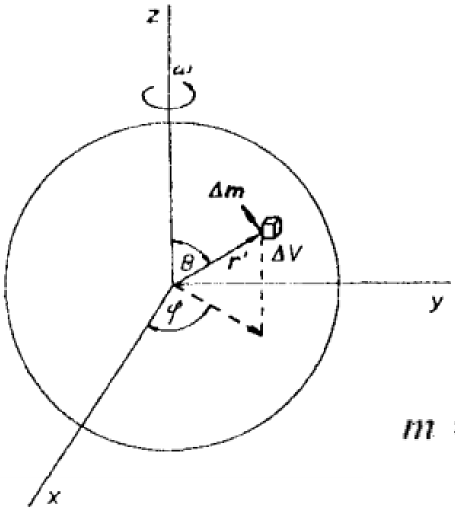


- Homogenní magnetická dvojvrstva vytvoří stejné mg. pole, jako úzká proudová smyčka ohraničující plochu dvojvrstvy.
- Proudy ve smyčkách, reprezentující jednotlivé dipóly, se vyruší všude, kromě hranice plochy.

Magnetický dipól částice, konající rovnoměrný kruhový pohyb

- Bodová částice o hmotnosti M_0 s nábojem q, rovnoměrný kruhový pohyb o rychlosti v po dráze o průměru r.
- Proudová smyčka $S = \pi r^2$, proud $I = qv/2\pi r$.
- Magnetický moment $m = IS = \frac{1}{2}qrv$.
- Mechanický moment hybnosti $L = M_0|r \times v| = M_0 rv$.
- Gyromagnetický poměr: $\gamma = \frac{m}{L} = \frac{q}{2M_0}$.
- γ =konst. - nezávisí na pohybovém stavu částice

Magnetický dipólový moment rotující koule

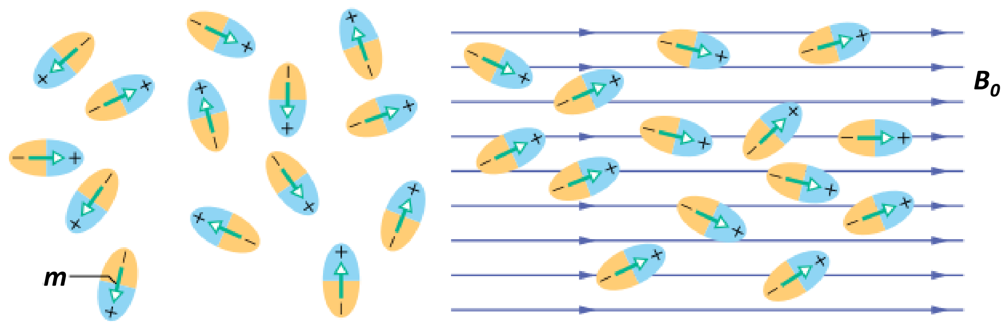


- Objemová hustota náboje ρ, rotace úhlovou ω rychlostí kolem osy z.
- směr ***m*** má směr ω pro ρ > 0.
- ***dm*** přispěje jen složkou $dm_z = dm.\sin\upsilon$.
- ***j*** ⊥ ***r’***, $j = \rho v$, $v = r'\omega\sin\upsilon$

$$m = \frac{1}{2}\int_V r' j \sin\vartheta \,\mathrm{d}V' = \frac{1}{2}\int_V r' \rho v \sin\vartheta \,\mathrm{d}V' = \frac{1}{2}\rho\omega\int_V r'^2 \sin^2\vartheta \,\mathrm{d}V'$$

- Ve sférických souřadnicích: $$m = \frac{\rho\omega}{2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r'^4 \sin^3\vartheta \;\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{QR^2\omega}{5}$$
- Náboj koule: $Q = \frac{4}{3}\rho\pi r^3$
- Moment hybnosti: $$L = \frac{2}{5}M_0R^2\omega$$
- Gyromagnetický moment opět: $$\gamma = \frac{m}{L} = \frac{Q}{2M_0}$$

Magnetické pole v látkách



+, - v případě mg. pole reprezentuje S a J póly!!!

- Magnetické pole, tvořené zmagnetovanými látkami, lze popsat jako pole soustavy prostorově rozložených magnetických dipólů.
- Magnetická polarizace $\boldsymbol{P_m}$ - objemová hustota *Coulombova* mg. momentu.
- Magnetizace $\boldsymbol{M}$ - objemová hustota *Ampérova* mg. momentu.

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$$

$[\boldsymbol{P_m}]$ = T; $[\boldsymbol{M}]$ = A/m

- Součet příspěvků „malých objemů“ ΔV - „atomů“ - ale objem musí být dostatečně velký, aby se neprojevovaly kvantové jevy $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m},\Delta V} = \sum_i \boldsymbol{p}_{\mathrm{m},i}$

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\boldsymbol{p}_{\mathrm{m},\Delta V}}{\Delta V}$$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\boldsymbol{m}_{\mathrm{m},\Delta V}}{\Delta V}$$

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m},V} = \int_V \boldsymbol{P}_\mathrm{m} \,\mathrm{d}V$$

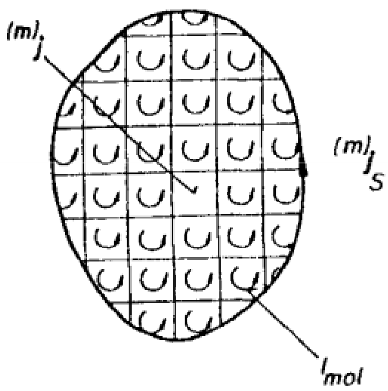
$$\boldsymbol{m}_V = \int_V \boldsymbol{M} \,\mathrm{d}V,$$

pro $\boldsymbol{P_m}$, $\boldsymbol{M}$ = konst.: $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m},V} = \boldsymbol{P}_\mathrm{m} V$

$$\boldsymbol{m}_V = \boldsymbol{M} V.$$

Magnetické pole v látkách

- Ekvivalence prostorově rozložených dipólů a proudových smyček
- Hypotéza atomových/molekulárních proudových smyček (Ampér).



$${}^{(m)}\boldsymbol{j}_S(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{n},$$ plošné vázané proudy

prostorové vázané proudy:

$${}^{(m)}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}),$$

$${}^{(m)}I = \int_S {}^{(m)}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) . \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$${}^{(m)}I = \int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{M} . \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{M} . \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

- V případě homogenní magnetizace se sousední smyčky kompenzují. Pro popis stačí plošně rozložené smyčky na povrchu.
- Nehomogenní magnetizace lze popsat chybějící smyčkou v objemu - existuje tam objemově rozložený proud.
- Plošně a objemově rozložené proudy = *magnetizační* proudy = efektivní vázané proudy - virtuální proudy.
- Obdoba vázaných nábojů - ale jen virtuální.

Ampérův zákon v látkovém prostředí

- Zdrojem proudu mohou být skutečné volné i virtuální vázané proudy.

$$\oint_l \boldsymbol{B}.\boldsymbol{dl} = \mu_0\left(I + {}^{(m)}I\right) = \mu_0\, I_c$$

I - volný proud
${}^{(m)}I$ - vázaný proud
I_c - celkový proud

$$\oint_l (\boldsymbol{B} - \mu_0 \boldsymbol{M}).\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$ anebo $$\oint_l (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{P}_\mathrm{m}).\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

Definice - **magnetická intenzita** $$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{P}_m) = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$$

Ampérův zákon pro látkové prostředí
integrální tvar:

$$\boxed{\oint_l \boldsymbol{H}.\boldsymbol{dl} = I}$$

diferenciální tvar:

$$\boxed{\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}}$$

[$\boldsymbol{H}$] = A/m

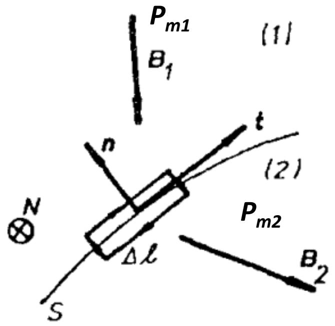
Magnetické pole plošných proudů v látce

$$\mathbf{Div}\boldsymbol{B} = B_{1n} - B_{2n} = 0$$

- Spojitost normálových složek důsledkem

$$\emptyset_B = \oint_S \boldsymbol{B}.\boldsymbol{d}S = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{B} = \mathbf{0}}$$



$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t}$$

$$\mathbf{Rot}\boldsymbol{B} = B_{1t} - B_{2t} = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{B_1} - \boldsymbol{B_2}) = \mu_0(\boldsymbol{j_S} + {}^{(m)}\boldsymbol{j_S})$$

$${}^{(\mathrm{m})}\boldsymbol{j}_S(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{n}$$

$$\mathbf{Rot}\boldsymbol{H} = H_{1t} - H_{2t} = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H_1} - \boldsymbol{H_2}) = \boldsymbol{j_S}$$

- Nespojitost tečných složek ***H***.

Materiálové vztahy pro mg. pole v látce

Slabě magnetické látky

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{P_m} = \mu_0 \chi_m \boldsymbol{H}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P_m} = \mu_0 \boldsymbol{M}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P_m} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})}$$

$\chi_m < 0$ diamagnetické l.

$\chi_m > 0$ paramagnetické l.

$\chi_m = \dfrac{C}{T}$ Curieův zákon

- χ_m - magnetická susceptibilita - bezrozměrné číslo
- μ_r - relativní permeabilita
- μ - permeabilita (jednotka N.A)

$$10^{-6} > \chi_m > 10^{-3}$$

$$\boxed{\mu = \mu_0 \mu_r} \qquad \boxed{\mu_r = 1 + \chi_m}$$

cf.: $\chi_e > 0$ dielektrika

- je-li magnetikum anisotropní $\Rightarrow \mu$ je tenzor

$$M_x = \chi_{m,xx} H_x + \chi_{m,xy} H_y + \chi_{m,xz} H_z$$
$$M_y = \chi_{m,yx} H_x + \chi_{m,yy} H_y + \chi_{m,yz} H_z$$
$$M_z = \chi_{m,zx} H_x + \chi_{m,zy} H_y + \chi_{m,zz} H_z$$

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{H}$$

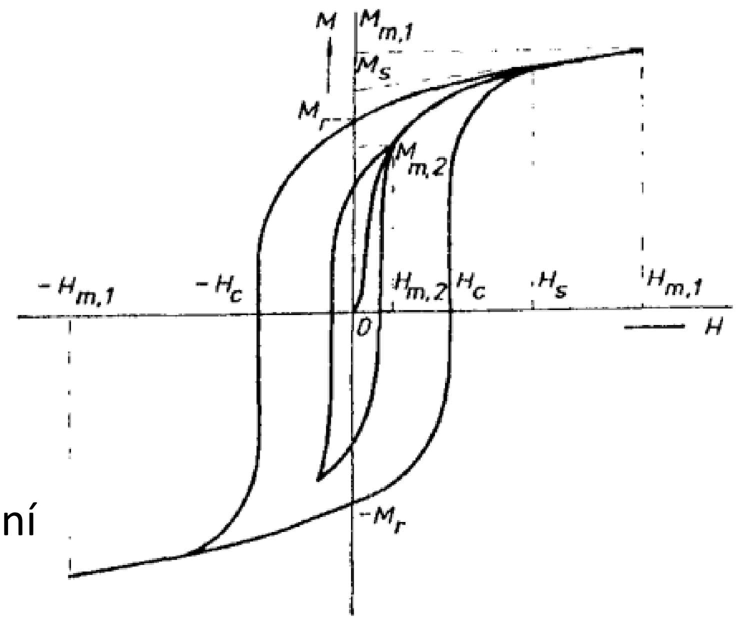
$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}$$

Materiálové vztahy pro mg. pole v látce

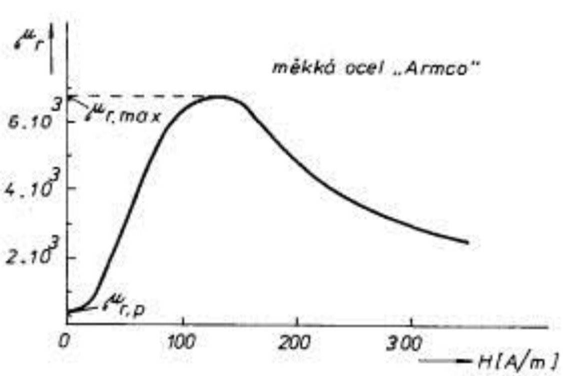
Silně magnetické látky

- zejména feromagnetické látky
- složitá závislost magnetizace na intenzitě pole, časovém průběhu (historii) atd.
- definujeme μ:

$$\boxed{\mu = \mu_0 \mu_r = \frac{B}{H}}$$



- μ_r zavedena pro křivku prvotního magnetování
- magneticky měkká ocel



Materiálové vztahy pro mg. pole v látce

Silně magnetické látky

- magnetizace závisí na historii
- od 0 - křivka prvotní magnetizace - nejprve rychlý růst, pak saturace (H_s)
- M_s - spontánní magnetizace daného feromagnetika
- Při poklesu pole: M_t -remanentní magnetizace při nulovém poli
- H_c - koercitivní pole - $M = 0$
- cyklický proces - po hysterezní smyčce