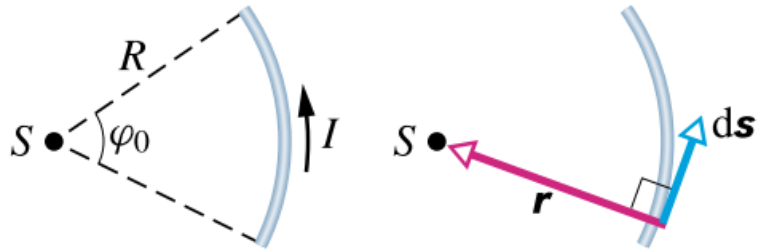


Magnetické pole kruhového oblouku

- B ve středu oblouku:



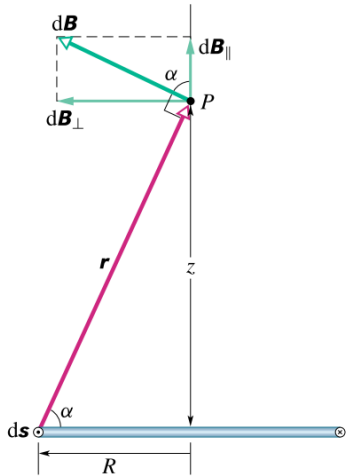
$$dB = \frac{\mu_0 I ds \sin 90^\circ}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi R^2}$$

$$ds = R d\varphi$$

$$B = \int dB = \int_0^{\varphi_0} \frac{\mu_0 I R d\varphi}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{\varphi_0} d\varphi$$

$$B = \frac{\mu_0 I \varphi_0}{4\pi R} \quad (\text{ve středu kruhového oblouku})$$

Magnetické pole na ose závitů



- B je rovnoběžná s osou z , kolmé příspěvky se vzájemně vylučují.
- Podle B.-S. zákona:

$$dB = \frac{\mu_0 I ds \sin 90^\circ}{4\pi r^2}$$

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I \cos \alpha ds}{4\pi r^2}$$

$$B = \int dB_{\parallel}$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

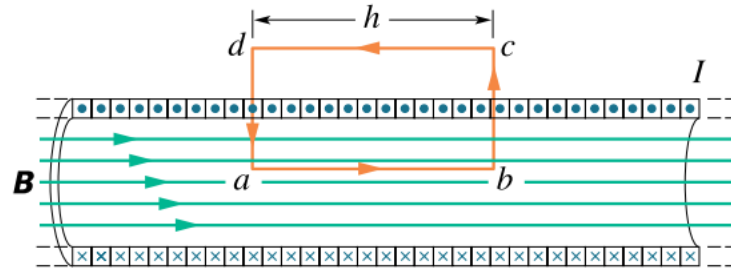
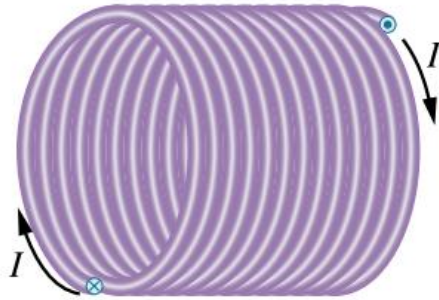
$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} ds$$

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int ds$$

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

- ve středu závitů: $z = 0$ $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$

Magnetické pole uvnitř ideálního solenoidu



- Délka solenoidu \gg průměr
- Superpozice polí jednotlivých závitů.
- Uvnitř homogenní pole ($B = \text{konst.}$), vně $B = 0$.
- Ampérův zákon pro křivku $abcd$.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_c$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_b^c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_c^d \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_d^a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = Bh + 0 + 0 + 0$$

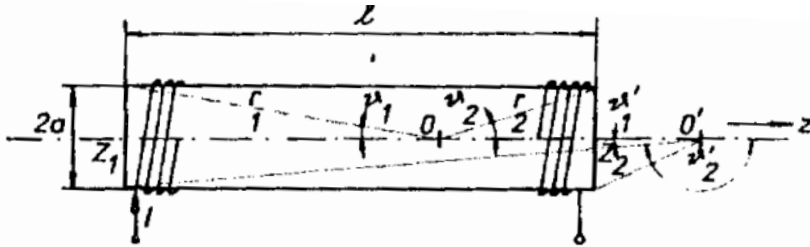
$$I_c = I(nh)$$

- n - počet závitů na jednotku délky

$$Bh = \mu_0 I n h,$$

$$B = \mu_0 I n$$

Magnetické pole na ose konečného solenoidu



- poloměr a , délka l , hustota závitů n .

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} n \Delta z$$

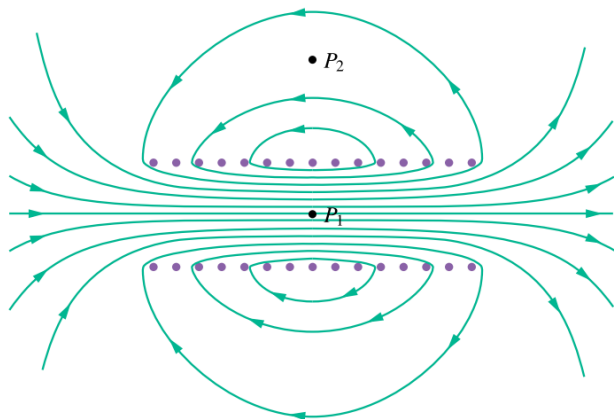
$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} dz = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{z}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \right]_{z_1}^{z_2} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{|Z_1|}{(Z_1^2 + a^2)^{1/2}} + \frac{|Z_2|}{(Z_2^2 + a^2)^{1/2}} \right]$$

$$\cos \vartheta_1 = \left[\frac{|Z_1|}{(Z_1^2 + a^2)^{1/2}} \right] \quad \cos \vartheta_2 = \left[\frac{|Z_2|}{(Z_2^2 + a^2)^{1/2}} \right]$$

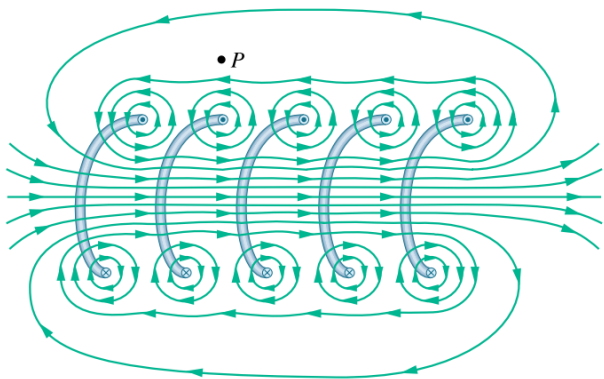
$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2]$$

- uvnitř solenoidu $\cos \vartheta_1, \cos \vartheta_2 > 0$, vně je jeden z nich záporný.

Magnetické pole reálného solenoidu



- B je poměrně homogenní uvnitř, vně je velmi malé.



- řídce vinutý solenoid

Vektorový potenciál homogenního magnetického pole

- \mathbf{B}_0 je homogenní pole.
- Odpovídající potenciál: $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r})$

$$\mathbf{B}_0 \equiv (0, 0, B_0) \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \quad \mathbf{A} \equiv \left(-\frac{B_0}{2}y, \frac{B_0}{2}x, 0 \right)$$

- též $\mathbf{A}' = (-B_0y, 0, 0)$
 $\mathbf{A}'' = (0, B_0x, 0)$

- Vektorový potenciál uvnitř solenoidu s osou ve směru z.
- r_{\perp} - vzdálenost od osy solenoidu, uvnitř $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2} < a$

$$A = \frac{\mu_0 n I r_{\perp}}{2}$$

- Směr \mathbf{A} : tečna ke kružnici se středem na ose solenoidu
- Možný též výpočet podle B.-S. zákona.
- Vektorový potenciál vně nekonečně dlouhého solenoidu (s nekonečně tenkým vodičem):

$$A = \frac{\mu_0 n I a^2}{2 r_{\perp}}$$

Vektorový potenciál homogenního magnetického pole

- Vektorový potenciál vně nekonečně dlouhého solenoidu (s nekonečně tenkým vodičem):

$$A = \frac{\mu_0 n I a^2}{2 r_{\perp}}$$

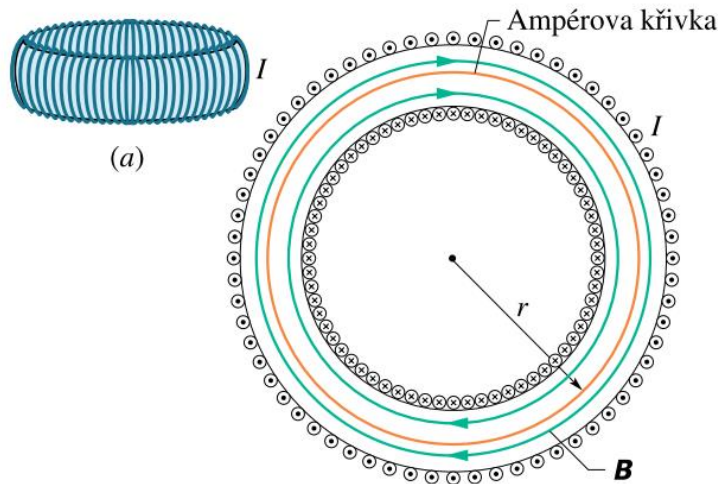
- Směr \mathbf{A} : tečna ke kružnici se středem na ose solenoidu.
- Spojitý na plášti solenoidu $r_{\perp} = a$.
- \mathbf{A} je nenulový i v místě, kde je nulové pole \mathbf{B} .
- Výpočet toku \mathbf{B} plochou sousedního kruhu $R_0 > a$:
- Přispívá jen pole uvnitř solenoidu

$$\Phi = \pi a^2 B_0$$

- Podobně ($N_l \equiv n$):

$$\Phi = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \frac{N_l}{2} I \frac{a^2}{R_0} \oint_l d\mathbf{l} = (\mu_0 N_l I) \pi a^2 = B_0 \pi a^2$$

Magnetické pole toroidu



- Toroid = stočený solenoid, střední průměr R_0 , celkový počet závitů N .
- Ze symetrie - indukční čáry soustředné kružnice
- A. z.: $B(2\pi r) = \mu_0 I N$

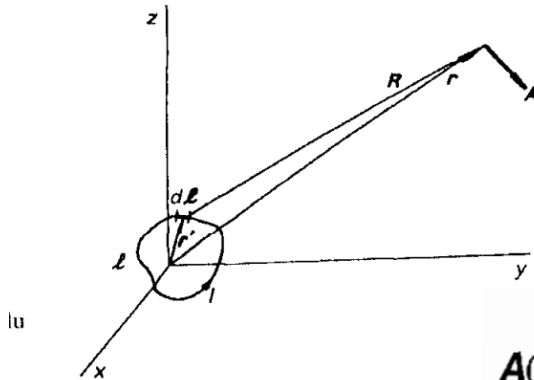
$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} \quad (\text{uvnitř toroidu})$$

- Mg. pole uvnitř toroidu obecně není nezávislé na vzdálenosti od středu r .
- Pro toroid s malou tloušťkou $d \ll R_0$:

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi R_0}$$

- Pro $R_0 \rightarrow \infty$ - solenoid, homogenní pole: $B = \frac{\mu_0 I n}{2\pi}$

Magnetický dipól



- Rovinná proudová smyčka / libovolného tvaru a malých rozměrů..
- Zajímá nás mg. pole v bodě r . $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$
- Pp. $r' \ll r \Rightarrow \mathbf{R} \doteq \mathbf{r}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{l}'}{R} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \text{grad}' \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{S}' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_S \frac{d\mathbf{S}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \doteq \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{R}}{R^3}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \doteq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3}$$

- $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$ - Ampérův magnetický moment smyčky

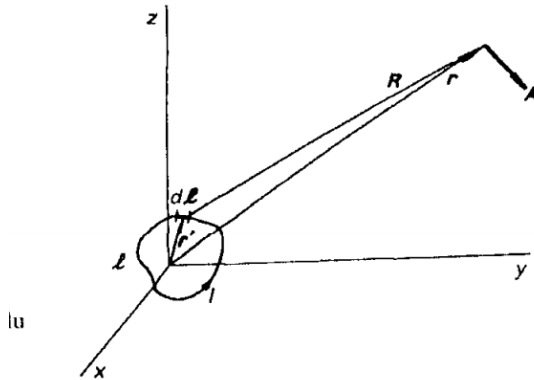
$$\mathbf{B} \doteq -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

$$\text{div}(\mathbf{r}/r^3) = 0$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right)$$

- Pole mg. dipólu

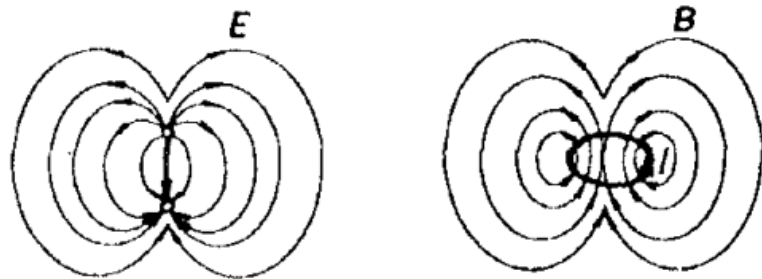
Magnetický dipól



$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad \text{div}(\mathbf{r}/r^3) = 0$$

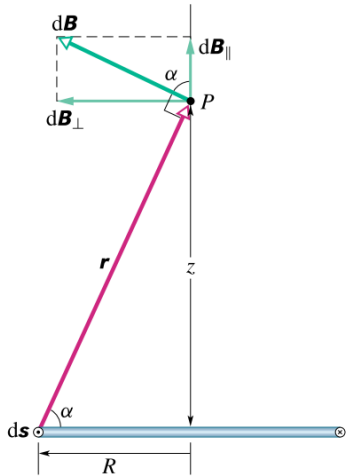
$$\mathbf{B} \doteq -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right)$$



- Pole mg. dipólu.
- Formálně stejný tvar jako pole el. dipólu.
- Je možné mg. dipól zavést též jako dvojici magnetických nábojů opačného znamení - jedná se však jen o formálně zavedený objekt.
- Zmenšení = bodový magnetický dipól, charakterizovaný momentem \mathbf{m} .

Magnetické pole na ose vně solenoidu



$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

- pro $z \gg R$:

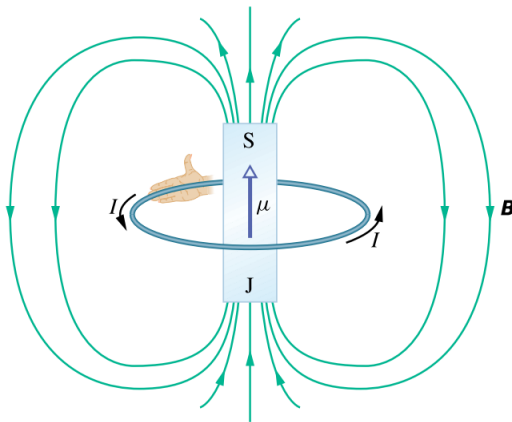
$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$$

- plocha závitu $S = \pi R^2$, rozšíření na N závitů:

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I S}{2\pi z^3}$$

- magnetický dipólový moment: $m = N I S$

$$B(z) = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$$



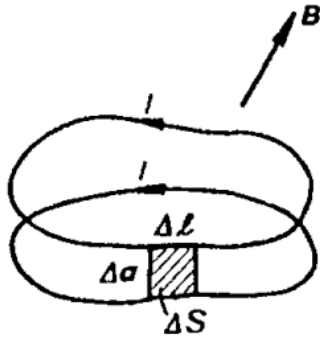
- Solenoid tvoří vně pole identické s polem magnetického dipólu.

Magnetický dipól

Tabulka 29.2 Některé magnetické
dipólové momenty

Malý tyčový magnet	$5 \text{ A}\cdot\text{m}^2$
Země	$8,0\cdot 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^2$
Proton	$1,4\cdot 10^{-26} \text{ A}\cdot\text{m}^2$
Elektron	$9,3\cdot 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$

Potenciální energie magnetického dipólu v mg. poli



- Pp. proudová smyčka I , protékaná proudem I v poli \mathbf{B} .
- Smyčku posuneme o vektor $\Delta \mathbf{a}$ při zachování proudu I .
- Na element smyčky Δl působí magnetická síla ΔF , která vykoná práci ΔA .
- ΔS je plocha opsaná vodičem Δl při posunutí o $\Delta \mathbf{a}$.
- Φ_2, Φ_1 mg. tok v konečné, resp. výchozí poloze.

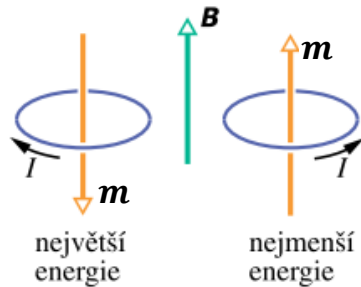
$$\Delta A = \Delta \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{a} = I (\Delta l \times \mathbf{B}) \cdot \Delta \mathbf{a} = I [\mathbf{B} \cdot (\Delta \mathbf{a} \times \Delta l)] = I (\mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{S}) = I \Delta \Phi$$

- Obě plochy a plášť tvoří uzavřenou plochu: $\Phi_C = \Phi_\Delta + \Phi_1 - \Phi_2 = 0$

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$

- Práce je kladná pro $\Phi_2 > \Phi_1$, záporná pro $\Phi_2 < \Phi_1$.
- Magnetické síly mají tendenci vtahovat smyčku do magnetického pole, aby magnetický tok, který jí protéká, byl co největší.
- Potenciální energie: $W = -I\Phi$
- Práce vnějších sil odpovídající přenesení smyčky do místa s nulovým tokem Φ .

Potenciální energie magnetického dipólu v mg. poli



- Malá rovinná proudová smyčka o ploše S .

$$\Phi = B \cdot S \quad m = IS$$

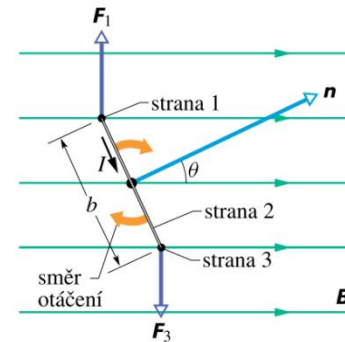
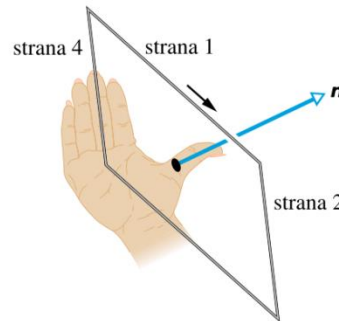
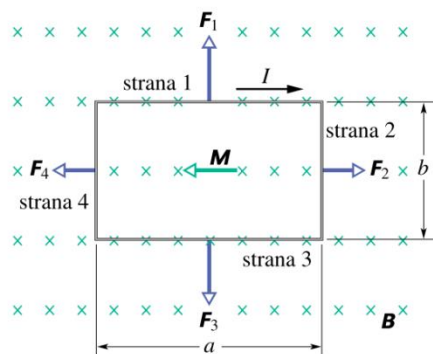
$$W = -m \cdot B$$

- Energie bodového dipólu v mg. poli.

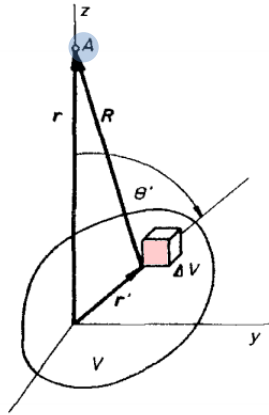
- Síla a moment síly působící na mg. dipól v mg. poli.

$$F = (m \cdot \nabla) B$$

$$M = m \times B$$



Multipólový rozvoj mg. pole



- Libovolné rozložení proudu $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ v tělese V , nulové proudy mimo těleso, tj. proudové smyčky se uzavírají ve V .
- Těleso v počátku souřadnic, char. rozměr (např. poloměr) $R_0 \ll r$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

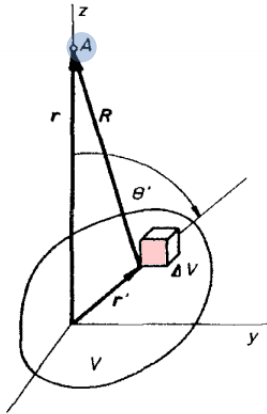
- Potenciál \mathbf{A} rozvineme v mocninnou řadu tak, že $1/R$ nahradíme příslušným rozvojem, stejně jako v případě elektrického pole.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) + \dots = \\ &= \frac{1}{r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{r}' \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{r}' \cdot \text{grad} \left(\mathbf{r}' \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right) \right] \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV + \dots \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0$$

- Proudové křivky se uzavírají v objemu V .

Multipólový rozvoj mg. pole



- První nenulový člen $A_1(r)$.

- Zavedeme:
$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] dV.$$

- Potom:
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$\text{grad} \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

pro r, r, \dots

- zobecněná definice mg. dipólového momentu \mathbf{m} .
- Pro úzkou rovinnou proudovou trubicí redukuje na $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$.
- Osově symetrické rozložení proudové hustoty odpovídá poli dipólu.
- Rozložení s nižší symetrií odpovídá vyšším členům rozvoje.
- Příspěvek vyšších členů rozvoje rychleji klesá se vzdáleností.