Stacionární magnetické pole

- silové působení mezi zmagnetovanými tělesy - magnetit, magnetka, zemské pole
- silové působení mezi vodiči protékanými proudem:

  Oersted 1820 (vodič - magnetka)

  Ampér (vodič - vodič)
- Rowland (1876), Röntgen (1888) - ekvivalence magnetických účinků všech makroskopických druhů proudu
- Speciální teorie relativity - sjednoceni elektrické a magnetické interakce:
- elektrická část - složka nezávislá na rychlosti náboje vůči vztažné soustavě
- magnetická část - složka závislá na rychlosti náboje
- magnetické pole - působí mezi vodiči protékanými proudem, mezi pohybujícími se tělesy nesoucími náboj i mezi všemi druhy látek v klidu.

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]}$$

- Lorentzův vzorec

- Magnetická indukce ***B***: vektorové pole
- [*B*] = 1 T = 1 N/(A.m) = (N.s)/(C.m) tesla
- starší jednotka gauss: 1 T = 10^4 G

Stacionární magnetické pole

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]}$$

- magnetická = Lorentzova síla

$$\boxed{\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}}$$

- hustota síly

- Tok magnetického pole:

$$\emptyset_B = \int_S \boldsymbol{B}.\boldsymbol{dS}$$

$$[\emptyset_B] = \mathrm{Wb} = {}^{\mathrm{J.s}}/_{\mathrm{C}} = \mathrm{V.s}$$

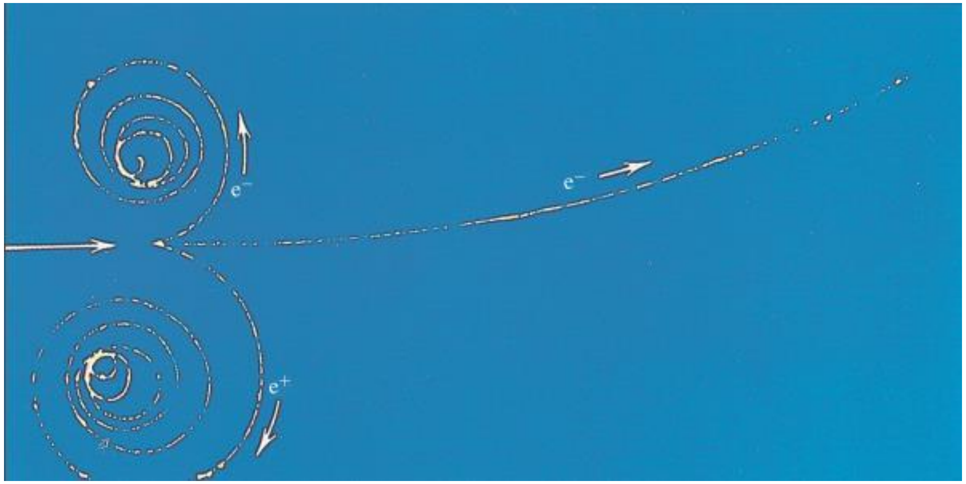
- Jednotka - weber

Tabulka 29.1 Přibližné velikosti magnetických indukcí některých polí

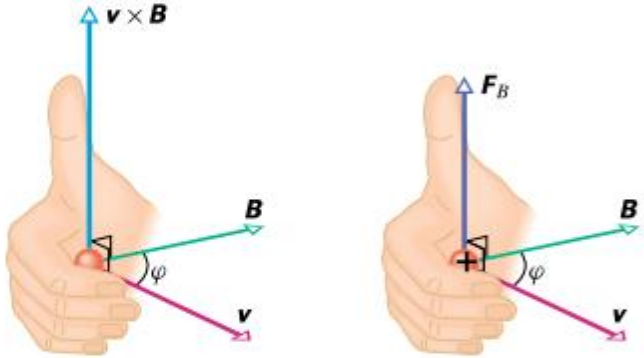
Povrch neutronové hvězdy	10^8 T
Blízko velkého elektromagnetu	1,5 T
Blízko malého tyčového magnetu	10^{-2} T
Na povrchu Země	10^{-4} T
V mezihvězdném prostoru	10^{-10} T
Nejnižší hodnota v magneticky stíněné místnosti	10^{-14} T

- NMR spektroskopie - supravodivý kryomagnet - 10 - 25 T

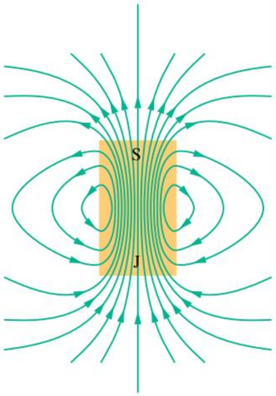
Stacionární magnetické pole

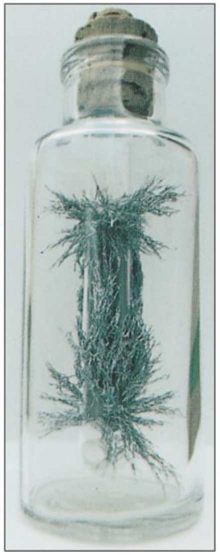


- Dráha elektronu a pozitronu v bublinkové komoře
- B směřuje kolmo k rovině obrázku směrem k pozorovateli

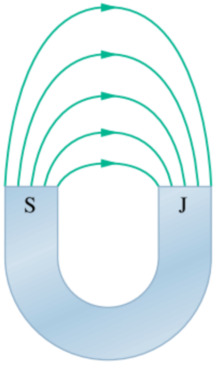


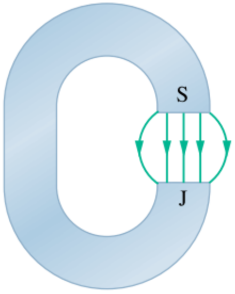
Indukční čáry magnetického pole



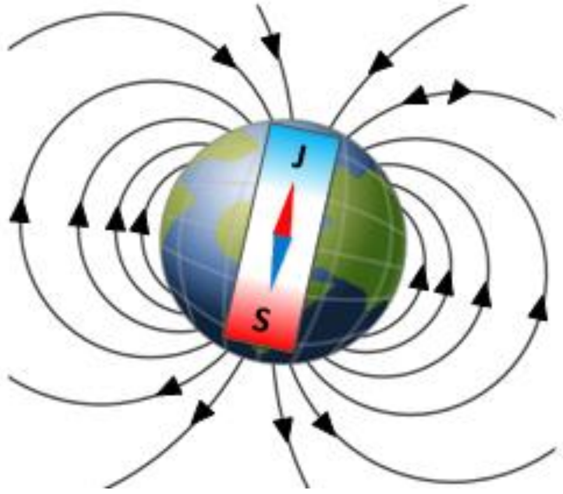


- Tyčový magnet
- Indukční čáry jsou uzavřené křivky
- Severní a jižní pól
- opačné póly se přitahují





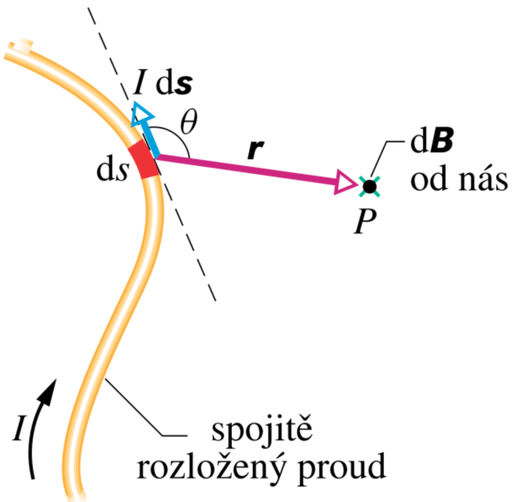
Indukční čáry magnetického pole



- Magnetické pole Země

- Zdroj: wikipedie

Magnetické pole elektrického proudu



- Proudový element délky d*s*

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \text{(Biotův-Savartův zákon)}$$

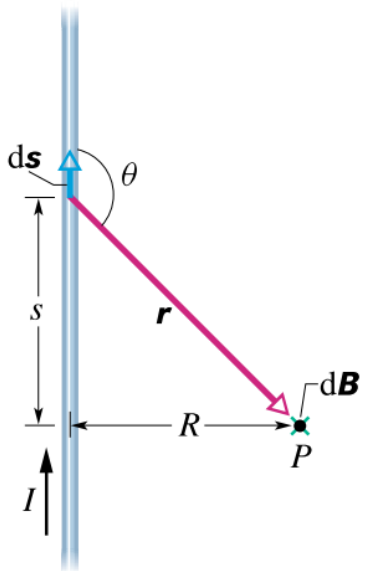
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, ds \sin\theta}{r^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} = 1.26 \cdot 10^{-6} \frac{T \cdot m}{A}$$

- Permeabilita vakua
  = magnetická konstanta

- cf. Coulombův zákon

Magnetické pole dlouhého přímého vodiče



- Proudový element délky ds

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, ds \sin\theta}{r^2}$$

$$B = 2\int_0^{\infty} dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin\theta \, ds}{r^2}.$$

$$r = \sqrt{s^2 + R^2},$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}.$$

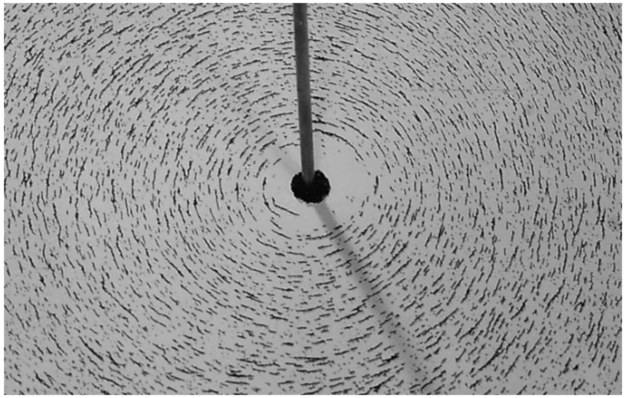
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{R \, ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left[\frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}} \right]_0^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

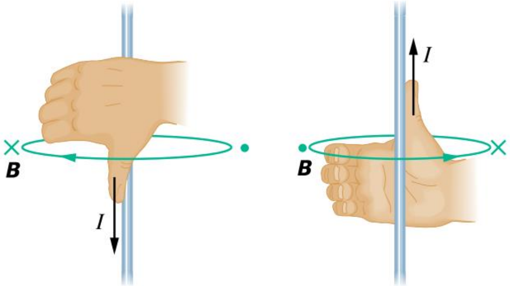
- příp. polopřímkový vodič: $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$

Magnetické pole dlouhého přímého vodiče

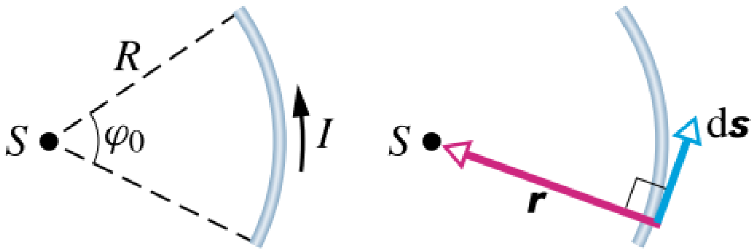
- Indukční čáry

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$





Magnetické pole kruhového oblouku



- *B* ve středu oblouku:

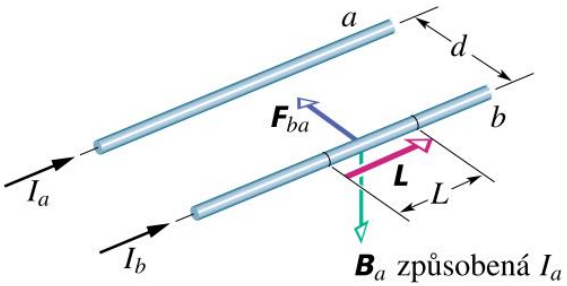
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}s\sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}s}{R^2}$$

$$\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\varphi$$

$$B = \int \mathrm{d}B = \int_0^{\varphi_0} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,R\,\mathrm{d}\varphi}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^{\varphi_0}\mathrm{d}\varphi$$

$$B = \frac{\mu_0 I \varphi_0}{4\pi R} \quad \text{(ve středu kruhového oblouku)}$$

Dva rovnoběžné vodiče



- Dlouhé tenké vodiče, protékané proudy I_a, I_b, ve vzdálenosti d.
- Síla $\boldsymbol{F}_{bd}$, kterou na sebe působí ???

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}$$

- Indukce od *a* v místě *b*

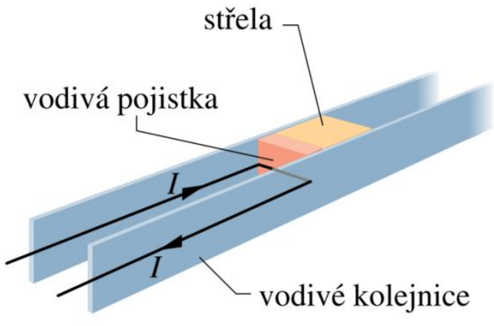
$$\boldsymbol{F}_{ba} = I_b \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}_a$$

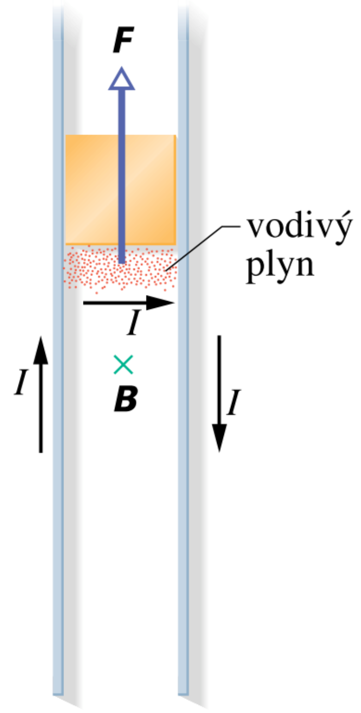
$$F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}$$

Dva rovnoběžné vodiče protékané souhlasně orientovanými proudy se přitahují, vodiče protékané opačně orientovanými proudy se odpuzují.

Definice ampéru:
Velikost stálého elektrického proudu, který při průtoku dvěma přímými rovnoběžnými a velmi dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu vzdálenými od sebe 1 m ve vakuu vyvolá mezi těmito vodiči sílu $2 \cdot 10^{-7}$ N na jeden metr jejich délky.

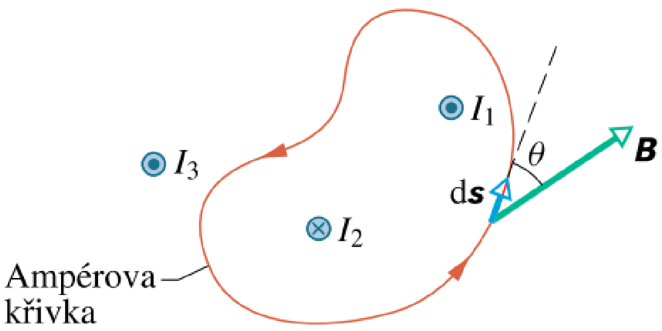
Elektromagnetické dělo





- Při výstřelu zapojení proudu, roztavení pojistky.
- Vznikne vodivý plyn - plazma
- Proud I budí magnetické pole B
- Na plyn působí síla *F*.
- Plyn vytlačí střelu silou *F*.
- Zrychlení $5 \cdot 10^6$ g, rychlost až 10 km/s.

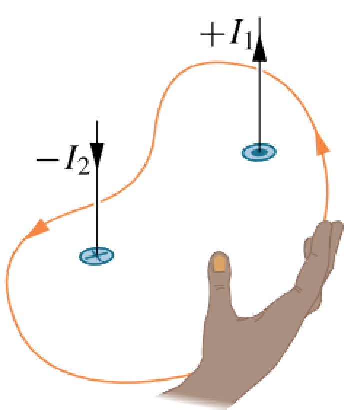
Ampérův zákon



- Ampérův zákon (integrální tvar)

Cirkulace ***B*** podél uzavřené křivky *s* je rovna celkovému proudu, který prochází plochou ohraničenou křivkou *s* (krát μ_0).

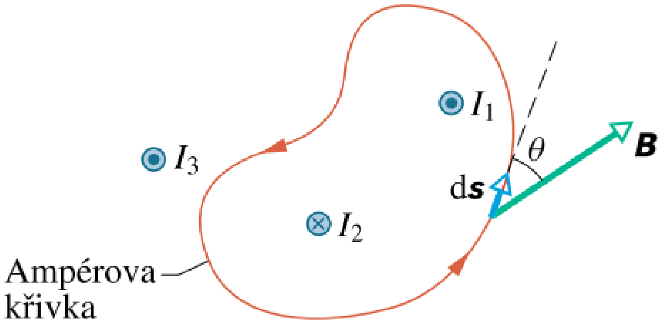
$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I_c \quad \text{(Ampérův zákon)}.$$



$$\oint B \cos\theta \, \mathrm{d}s = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

- Znaménko proudu podle pravidla pravé ruky.

Ampérův zákon



- pp. že plochou S netečou plošné proudy

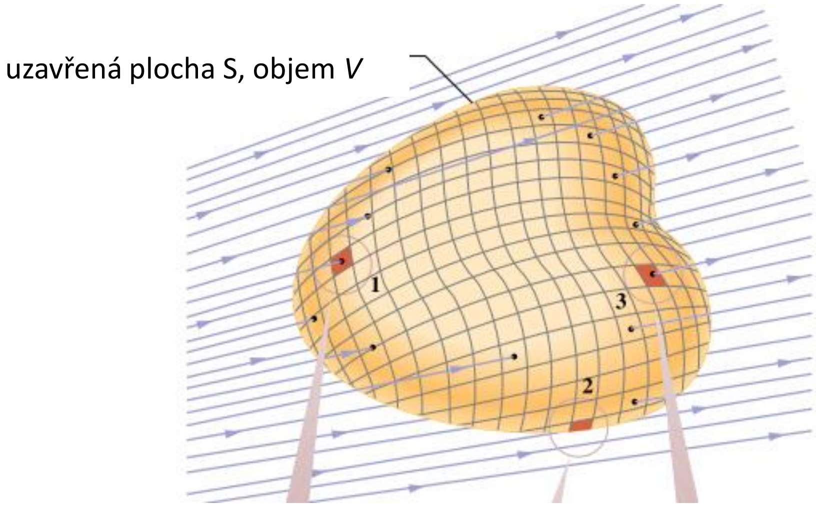
$$\oint_s \boldsymbol{B}.\boldsymbol{ds} = \mu_0 I \qquad I = \int_S \boldsymbol{j}.\boldsymbol{dS}$$

$$\oint_s \boldsymbol{B}.\boldsymbol{ds} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{B}\,.\,\boldsymbol{dS} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}.\boldsymbol{dS}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}}$$

- Ampérův zákon v diferenciálním tvaru

Tok magnetické intenzity



- Tok B uzavřenou plochou je roven 0.

$$\emptyset_B = \oint_S \boldsymbol{B}.\boldsymbol{d}S = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{B} = \mathbf{0}}$$

- **Neexistují magnetické náboje, které by tvořily zdroje magnetického pole.**
- **Magnetické indukční čáry jsou vždy uzavřené křivky.**

Vektorový potenciál

- Mg.-stat. pole **solenoidální**.
- Existuje vektorový potenciál magnetického pole ***A***: $\boxed{\boldsymbol{B} = rot\boldsymbol{A}}$
- Definice není jednoznačná:

  Pokud ***A(r)*** je vektorový potenciál ***B***, potom i $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + grad\xi(\boldsymbol{r})$ je vektorovým potenciálem ***B***.

  $\xi(\boldsymbol{r})$ je libovolná skalární funkce, která má první derivace.

$$rot\boldsymbol{A}' = rot(\boldsymbol{A} + grad\xi) = rot\boldsymbol{A}$$

- Je možné specifikovat další *kalibrační* podmínku: $\boxed{div\boldsymbol{A} = 0}$

  Aneb pokud $div\boldsymbol{A} = \alpha(\boldsymbol{r})$, lze najít $\xi(\boldsymbol{r})$ takové, že: $\Delta\xi(\boldsymbol{r}) = -\alpha(\boldsymbol{r})$.

- Ampérův zákon: $\mathrm{rot\,rot}\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j}$

$$-\Delta\boldsymbol{A} + grad\ div\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j}$$

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j}}$$

Trojice Poissonových rovnic - obdoba s elektrostatikou a skalárním potenciálem.

Vektorový potenciál

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}}$$

dif. tvar Ampérova zákona (s $\boldsymbol{A}$)

- Řešení (integrální tvar): $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R} dV'$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$$

$$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \neq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$$

- Pro vyjádření ***B*** aplikujeme rotaci a upravíme:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R} \mathrm{d}V'$$

$$\operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R} = \operatorname{grad} \frac{1}{R} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \frac{\operatorname{rot} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{R} = -\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{R}}{R^3} \mathrm{d}V'}$$

- znovu Biot-Savartův zákon (obecněji)

- Ekvivalence Ampérova a Biot-Savartova zákona

Vektorový potenciál

$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}V'}$$

- znovu Biot-Savartův zákon (obecněji - pro objemově rozložené proudy)

- Pro vodič zanedbatelného průřezu Δ*S* s homogenně rozloženým proudem *I*:

$I\Delta\boldsymbol{l} = \mathrm{j}\Delta V$

$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R}}{R^3}, \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{R}}$$

- Příspěvky několika smyček jsou **aditivní**.
- Vektorový potenciál stacionárního magnetického pole vždy existuje.
- Tok magnetického pole lze vyjádřit i takto:

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

Vektorový potenciál

- Platnost vzorce s potenciálem ***A*** lze rozšířit i pro oblast, kde $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \neq 0$ - tj. na celý prostor (pp., že $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ je konečná a dostatečně hladká).
- Potenciál ***A*** je všude spojitý a má parciální derivace alespoň prvního řádu.
- B.-S. zákon platí také ve všech bodech prostoru, tj. vzorec vyjadřuje správně i magnetickou indukci v bodech, kde $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \neq 0$.

$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{R}}{R^3} \mathrm{d}V'}$$

- ***B*** je všude spojitá.

Magnetické pole plošných proudů

- Máme makroskopickou plošnou hustotu proudu $\boldsymbol{j_S}(\boldsymbol{r}) \neq 0$ tekoucího po ploše *S*.
- Potenciál a magnetická indukce ve všech bodech prostoru:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{j_S}(\boldsymbol{r}')}{R}dS' \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{j_S}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{R}}{R^3}dS' \qquad \begin{aligned}\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \\ R &= |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|\end{aligned}$$

- Potenciál je všude spojitý a má derivace všude, kromě plochy *S*.
- Mg. indukce je definována všude, kromě plochy *S*. Na této ploše nemá ***B*** smysl.
- ***B*** je spojitá všude kromě plochy *S*. Spojité jsou normálové složky $\boldsymbol{B}_\mathrm{n}$, tečné složky $\boldsymbol{B}_\mathrm{t}$ mají nespojitost určenou hodnotou proudu $\boldsymbol{j_S}(\boldsymbol{r})$.

$$\mathbf{Div}\boldsymbol{B} = B_{1n} - B_{2n} = 0 \qquad \mathbf{Rot}\boldsymbol{B} = B_{1t} - B_{2t} = \mu_0 \boldsymbol{j_S}$$

Magnetické pole plošných proudů

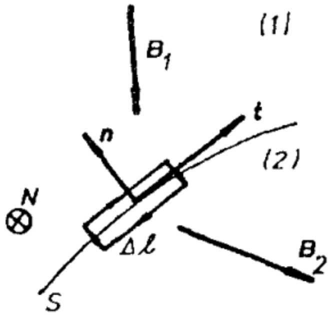
$$\mathbf{Div}\boldsymbol{B} = B_{1n} - B_{2n} = 0$$

$$\emptyset_B = \oint_S \boldsymbol{B}.\boldsymbol{d}S = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{B} = \mathbf{0}}$$

- Spojitost normálových složek důsledkem

$$\mathbf{Rot}\boldsymbol{B} = B_{1t} - B_{2t} = \mu_0 \boldsymbol{j_S}$$



$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t}$$

$$j_{SN}\Delta l = (\boldsymbol{j}.\boldsymbol{N})\Delta l$$

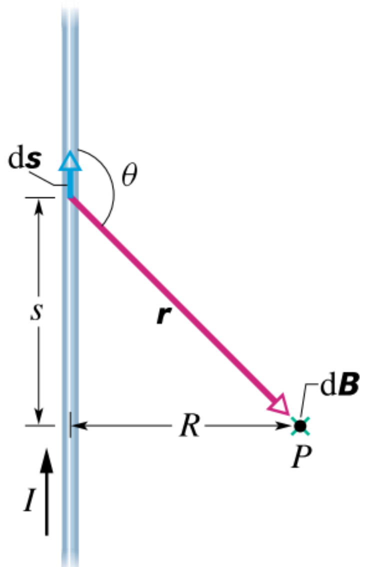
$$(\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2).\boldsymbol{t} = \mu_0(\boldsymbol{j}_S.\boldsymbol{N})$$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{n}, \quad (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2).(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{n}) = \left[(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1)\times\boldsymbol{n}\right].\boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{N}.\left[(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1)\times\boldsymbol{n} - \mu_0\boldsymbol{j}_S\right] = 0$$

- Nespojitost tečných složek - hranatá závorka musí = 0.

Magnetické pole dlouhého přímého vodiče



- Proudový element délky ds

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,ds\sin\theta}{r^2}$$

$$B = 2\int_0^\infty dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\theta\,ds}{r^2}.$$

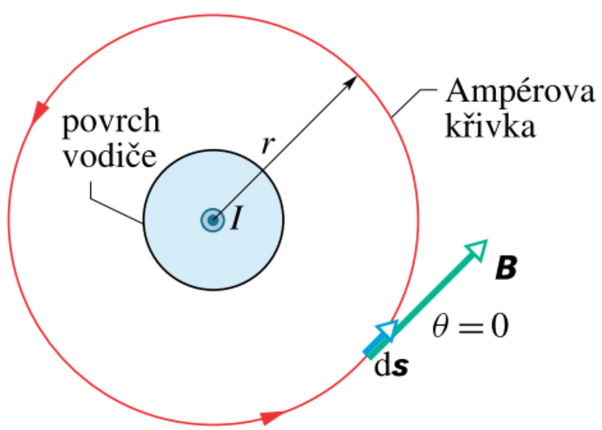
$$r = \sqrt{s^2 + R^2},$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}.$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^\infty \frac{R\,ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left[\frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

- příp. polopřímkový vodič: $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$

Magnetické pole vně dlouhého přímého vodiče - A. z.



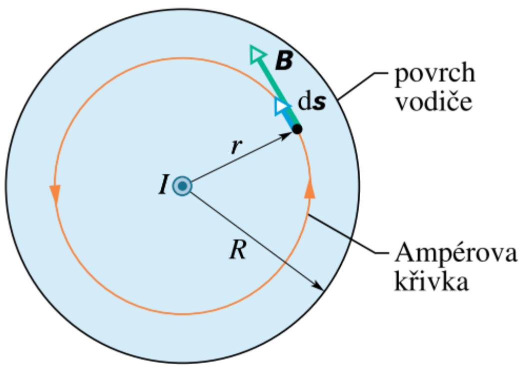
- Homogenní rozložení proudu ve vodiči
- Mg. indukce uvnitř vodiče - ve vzdálenosti r:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint B \cos 0 \, \mathrm{d}s = B \oint \mathrm{d}s = B(2\pi r)$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$ A. z.

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

Magnetické pole uvnitř dlouhého přímého vodiče - A. z.



- Homogenní rozložení proudu ve vodiči
- Mg. indukce uvnitř vodiče - ve vzdálenosti r:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = B \oint ds = B(2\pi r)$$

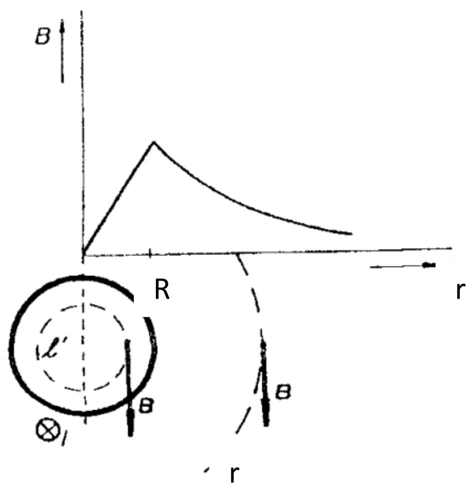
$$I_c = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

proud plochou ohraničenou Ampérovou křivkou

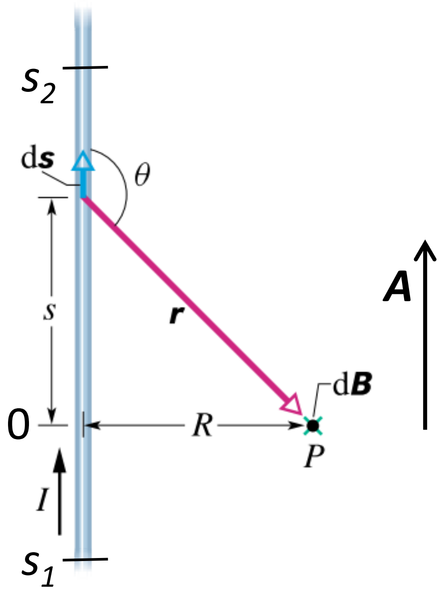
$$B(2\pi r) = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

A. z.

$$\boxed{B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\right) r}$$



Magnetické pole dlouhého přímého vodiče



- Vektorový potenciál - rovnoběžný s proudovým elementem d***s***

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{(s^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} ds$$

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[- \int_0^{s_1} \frac{1}{(s^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_0^{s_2} \frac{1}{(s^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} ds \right]$$

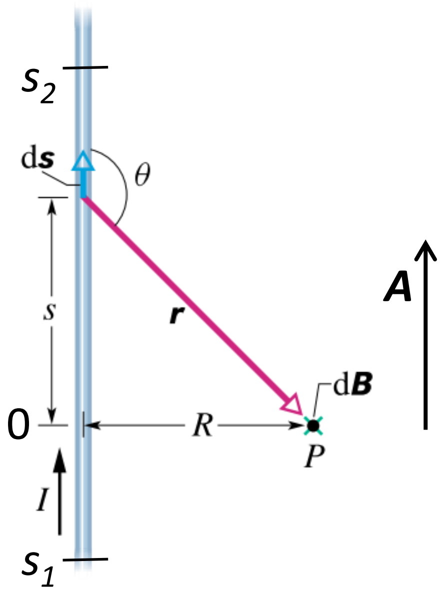
$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[-ln \frac{s_1 + ({s_1}^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}{R} + ln \frac{s_2 + ({s_2}^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}{R} \right]$$

- Vektorový potenciál pro s_1, $s_2 \rightarrow \infty$ integrály divergují. $\boldsymbol{A} = (A, 0{,}0)$

$$\boxed{\boldsymbol{B} = rot\boldsymbol{A}}$$

$$\boldsymbol{B} = \left(0, \frac{\partial A}{\partial z}, - \frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

Magnetické pole dlouhého přímého vodiče



$$\boldsymbol{A} = (0,0,A)$$

$$\boldsymbol{B} = \left(0, \frac{\partial A}{\partial z}, -\frac{\partial A}{\partial y}\right) \qquad R^2 = z^2 + y^2$$

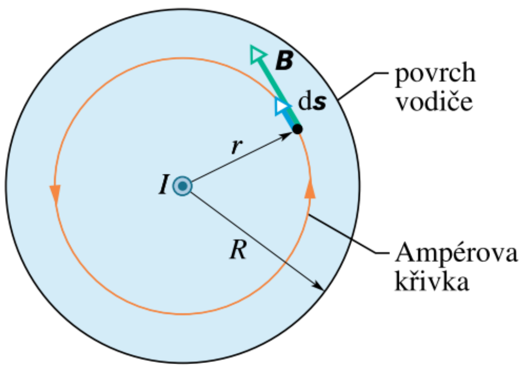
$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{z}{R^2} [cos\theta_1 - cos\theta_2]$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{y}{R^2} [cos\theta_1 - cos\theta_2]$$

- Vektorový potenciál pro nekonečně dlouhý vodič:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \Longrightarrow A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi} I ln \frac{R}{a}$$ pro lib. $a > 0$

Magnetické pole uvnitř dlouhého přímého vodiče - A. z.



- Homogenní rozložení proudu ve vodiči
- Mg. indukce uvnitř vodiče - ve vzdálenosti r:

$$\boxed{B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\right) r}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B} = rot\boldsymbol{A}}$$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial r} = B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r^2 + C$$

C je lib. konstanta

$$C = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} b^2$$

zvolme, *b* je lib. konstanta

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}(r^2 - b^2)$$

$$A = A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}(r^2 - R^2)$$

pro $r \leq R$

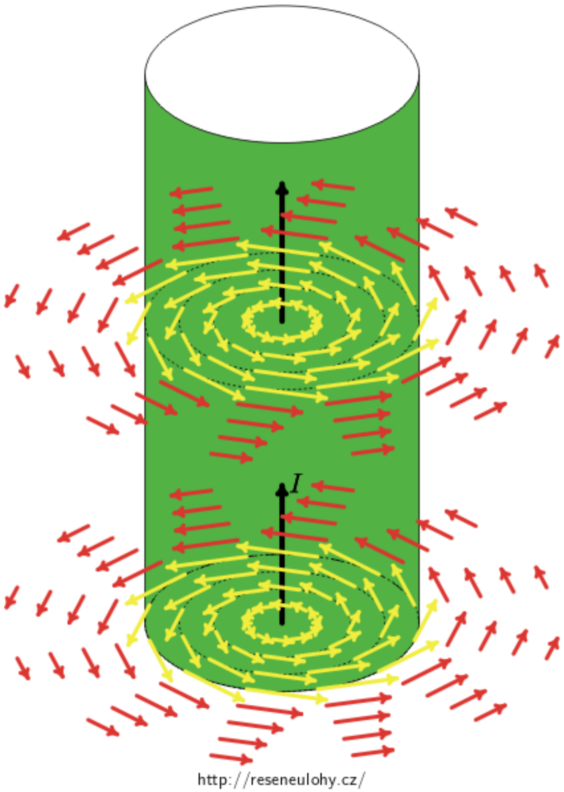
podmínka spojitosti na rozhraní *r* = *R*:
např. *a* = *b* = *R*

pro *r* > R

$$A = A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi} I ln\frac{r}{R}$$

Magnetické pole dlouhého tlustého přímého vodiče

B



A