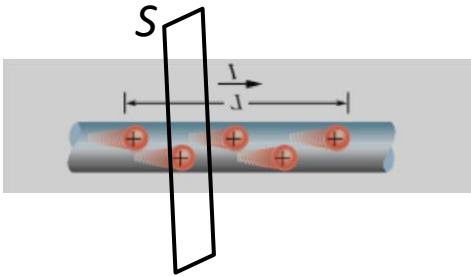


Stacionární elektrické pole

Elektrický proud

- stacionární = makroskopické veličiny nezávisí explicitně na čase.



- Pohyb nositelů náboje - plochou S projde za čas Δt náboj ΔQ .

- Průměrný proud:
$$I_{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

- Okamžitý proud:
$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

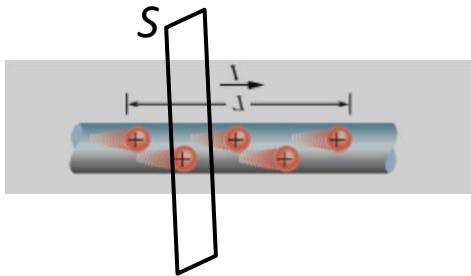
- Množství náboje za čas T , nestacionární proud:
$$Q = \int_0^T I(t) dt$$

- pro stacionární proud: $I(t) = konst: Q = IT$

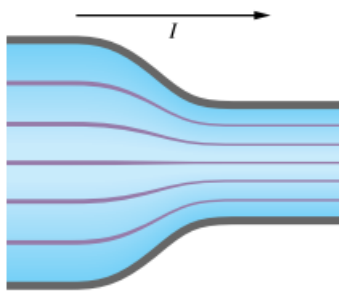
- Proud: skalární veličina - kladný náboj kladným směrem.
- $[I] = 1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$

Proudová hustota

- $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ - proudová hustota - vektorové pole definované v každém bodě plochy S - rozložení proudu na S



$$I_i = \int_0^{S_i} \mathbf{j} d\mathbf{S}$$

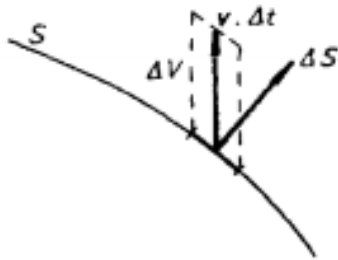


- Proudové čáry: tečna je $\mathbf{j}(\mathbf{r})$.
- Proudová trubice: část prostoru vymezená plochou tvořenou proudovými čarami.
- Povrch proudové trubice neprotíná žádná proudová čára.

- $\mathbf{j}_S(\mathbf{r})$ - plošný proud: pohyb náboje po ploše, který protéká nějakou křivkou v této ploše

Mechanismy vedení proudu

- **Volné proudy** - přemísťování volného náboje:
 - **Kondukční proudy** - pohyb volných nositelů v látkovém prostředí
 - **Konvekční proudy** - pohyb volných nositelů ve vakuu



- kladné a záporné náboje s hustotou ρ^+ , resp. ρ^- s rychlostí v^+ , resp. v^- .

$$\mathbf{j}_+ = \rho_+ \mathbf{v}_+ \quad \mathbf{j}_- = \rho_- \mathbf{v}_-$$

- celková hustota indukčního proudu:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_-$$

- pro $\rho = |\rho^+| = |\rho^-|$ a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-$, $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$
- \mathbf{v} relativní rychlost obou nositelů náboje.

Mechanismy vedení proudu 2

- **Vázané proudy** - nedochází k pohybu náboje na makroskopické vzdálenosti
 - Polarizační proudy v dielektriku

$$I_P = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{j}_P \cdot d\mathbf{S}$$

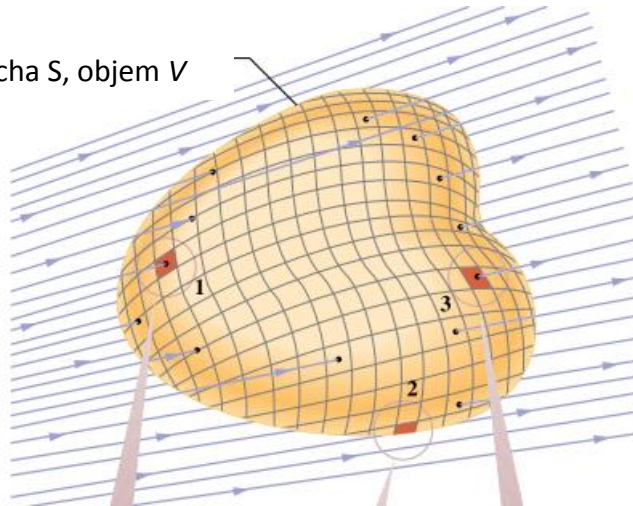
$$Q_P = \int_V \rho_P dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV = - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

$$I_P = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

- Hustota polarizační proudu: $\mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$
- Celkový proud - superpozice mechanismů
- \mathbf{j}_P nepřispívá k celkovému stacionárnímu proudu - nemůže být časově nezávislá.

Rovnice kontinuity

uzavřená plocha S , objem V



- Pp.: objem V ohraničený plochou S
- vytéká proud I
- úbytek náboje uzavřeného v S : $-\Delta Q$
- Rovnice kontinuity v integrálním tvaru: ($Q(t)$ je množství náboje uzavřeného plochou S):

$$I + \frac{dQ}{dt} = 0$$

- Důsledek zákona zachování náboje.

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}' + \frac{dQ}{dt} = 0$$



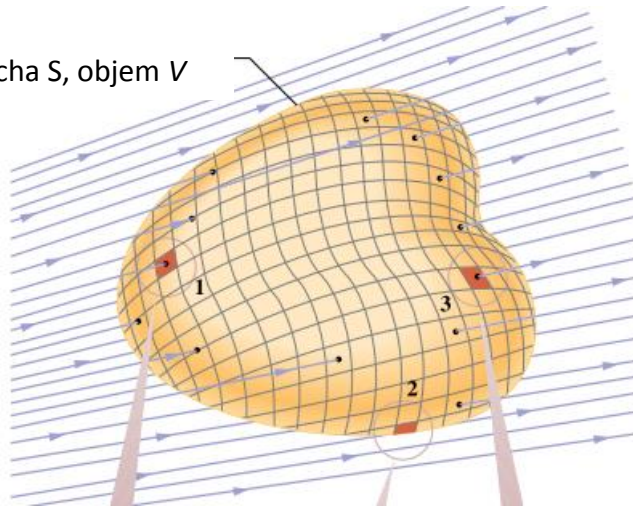
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.}$$

- Rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru.
Pp.: nemáme plošné náboje a proudy.

Rovnice kontinuity

uzavřená plocha S , objem V



- Stacionární případ:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

- I je obecně celkový proud.
- Často se uvažuje pouze volný proud.
Rovnice kontinuity je splněna, pokud se zachovává charakter nositelů náboje.

Stacionární elektrické pole

- Ve srovnání s elektrostatikou je přípustná existence makroskopického pohybu náboje - proudu
- Stacionární elektrické pole je potenciální a konzervativní.

$$Q_C = Q + Q'$$

$$\rho_C = \rho + \rho'$$

Q_C, ρ_C celkový náboj

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

$$\varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q + Q'$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_C}{\varepsilon_0}$$

Obecný Gaussův zákon

$$\varepsilon_0 \oint_S \varepsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

Gaussův zákon pro dielektrikum explicitně jen volný náboj

$$Q' = \int_V \rho_v(\mathbf{r}') dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

pro elektricky měkká prostředí

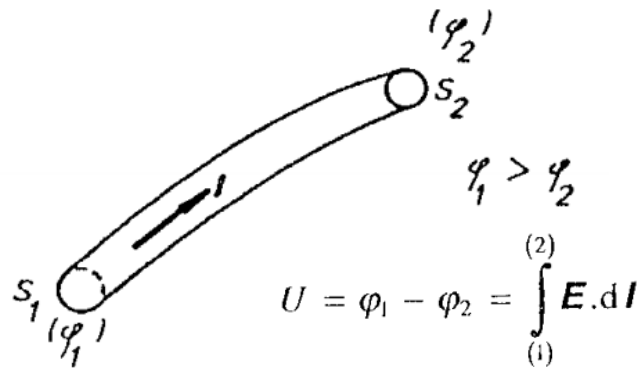
Stac. el. pole je konzervativní = potenciálové

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

Ohmův zákon pro homogenní vodiče



- Okamžitý proud I tekoucí vodičem je úměrný okamžité hodnotě spádu potenciálu U na tomto vodiči.
- O.z. v integrálním tvaru:

$$I = \frac{U}{R}$$

- R je elektrický odpor vodiče (rezistance).
- Závisí na tvaru vodiče a materiálu.
- Měrný odpor (specifický odpor, rezistivita) ρ_R : nezávisí na tvaru

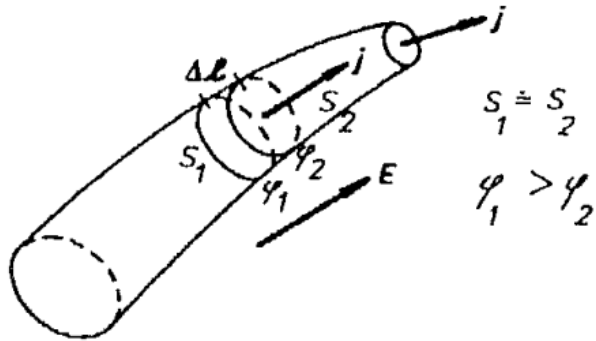
$$R = \rho_R \frac{l}{S}$$

- Vodivost G , měrná vodivost (konduktivita) γ .

$$G = \frac{1}{R}$$

$$\gamma = \frac{1}{\rho_R}$$

Ohmův zákon pro homogenní vodiče 2



$$I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} \quad \Delta U = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathbf{E} \cdot \Delta l$$

$$R = \rho_R \frac{\Delta l}{S} \quad I = \frac{\Delta U}{R}$$

- O.z. v diferenciálním tvaru:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

$$[R] = \Omega$$

$$[\rho_R] = \Omega \cdot \text{m}$$

$$[G] = \Omega^{-1} = S \quad \text{Siemens}$$

$$[\gamma] = (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$$

- O. z. je materiálový vztah.
- Linearita je aproximace, např. pro kovy platí ve velmi širokém rozsahu.
- V lineárním, izotropním a homogenním vodiči je $\mathbf{j} \parallel \mathbf{E}$.
- Vodivost je obecně v anizotropním prostředí je tensor.

Ohmův zákon pro homogenní vodiče 3

- V lineárním homogenním vodiči protékaném stacionárním proudem je hustota vázaného i volného náboje nulová.

$$\rho = \operatorname{div} \mathbf{D} = \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\varepsilon}{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

$$\rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P} = \chi_e \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\chi_e}{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

- Tohle je v podstatě sporné tvrzení. Nemáme-li volný náboj \Rightarrow nemáme nosiče proudu $\Rightarrow \mathbf{j} = \mathbf{0}$.
- Vyplyvá z kolize předpokladů, povolujících proud (jako náboj prošlý plochou za jednotku času) a požadavek neměnnosti hustoty náboje ve vodiči. Ve homogenním vodiči nemůže trvale působit konstantní pole \mathbf{E} .
- Důsledkem by byla změna rozložení nábojů, změna proudu a změna pole

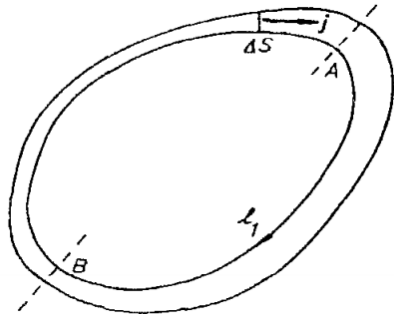
Ohmův zákon pro **ne**homogenní vodiče

- Proudové čáry jsou vždy uzavřené křivky (nositelé náboje se musí pohybovat po uzavřených drahách) - pro konečné soustavy.
- Takový stacionární proud nemůže být vyvolán elektrickým statickým anebo stacionárním polem - pole jsou potenciálová.
- Musí existovat nepotenciálová elektrická pole působící na náboje.
- Nehomogenní vodiče - neplatí Ohmův zákon.
- Zobecnění:
- E^* - vtištěná (elektromotorická) intenzita

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$$

- zobecněný Ohmův zákon, dif. tvar

Ohmův zákon pro nehomogenní vodiče 2



$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$$

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{\mathbf{j}}{\gamma} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(A)}^{(B)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{(A)}^{(B)} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l}$$

U_{AB} \mathcal{E}_{AB}

- Elektromotorické napětí

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{\mathbf{j}}{\gamma} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(A)}^{(B)} \frac{j}{\gamma} dl = I \int_{(A)}^{(B)} \frac{dl}{\gamma \Delta S} R$$

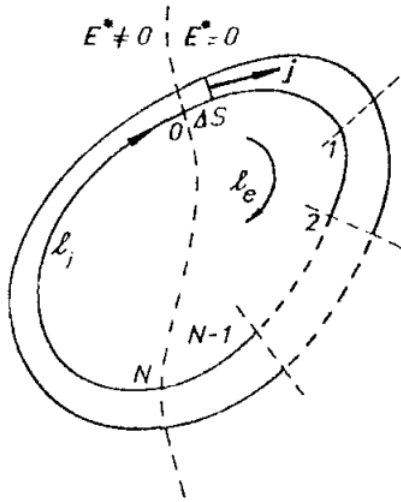
$$I = \frac{1}{R} (U_{AB} + \mathcal{E}_{AB})$$

- Integrální tvar O. z. pro danou část vodiče

- Pokud provedeme integraci přes celou uzavřenou křivku:
(R_c celkový odpor)
O. z. pro uzavřený obvod.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_c}$$

Ohmův zákon pro nehomogenní vodiče 3



- Pp. vtištěná síla působí je na části l_i .
- Část l_e je tvořena homogenním vodičem.
- Elektrický obvod, složený z pasivních homogenních vodičů a jednak ze zdroje elektromotorického napětí.

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{\mathbf{j}}{\gamma} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(A)}^{(B)} \frac{j}{\gamma} dl = I \int_{(A)}^{(B)} \frac{dl}{\gamma \Delta S} R_i$$

$$IR_i = \int_{l_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \mathcal{E}$$

$$\int_{l_e} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U_0$$

- U_0 - svorkové napětí

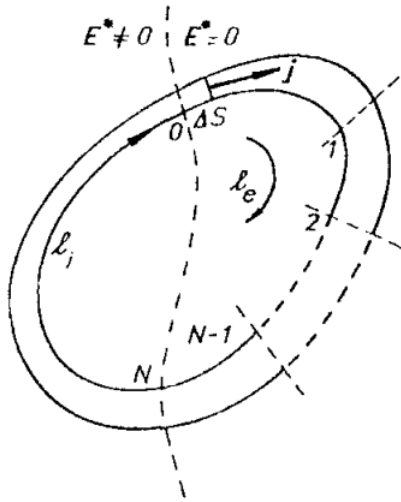
- Protože platí:

$$\int_{l_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_e} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\mathcal{E} - IR_i = U_0$$

- Svorkové napětí je menší než elektromotorické.

Ohmův zákon pro nehomogenní vodiče 4



- Bez odběru proudu ze zdroje platí rovnováha $\mathbf{E} = -\mathbf{E}^*$
- Při odběru proudu poklesne \mathbf{E} , poruší se rovnováha a náboje jsou doplňovány v působení vtištěné intenzity.
- Integrál přes uzavřenou proudovou čáru:

$$I \int_{l_i} \frac{dl}{\gamma \Delta S} + I \int_{l_e} \frac{dl}{\gamma \Delta S} = \int_{l_i} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l}$$

R_e

$$\mathcal{E} = IR_i + IR_e$$

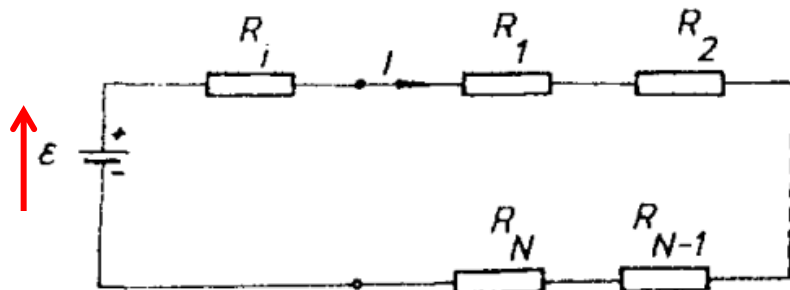
- Homogenní část lze rozdělit na N částí

$$R_e = R_{e1} + R_{e2} + \dots + R_{eN}$$

$$\mathcal{E} = IR_i + IR_{e1} + IR_{e2} + \dots + IR_{eN}$$

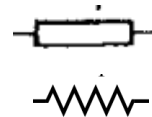
- Součet úbytků napětí na všech odporech obvodu je roven celkovému elektromotorickému napětí \mathcal{E} .

Elektrický obvod



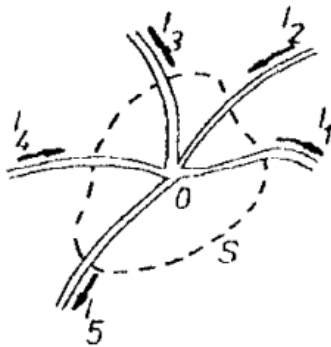
- Plášť proudové trubice souhlasí s povrchem vodičů.
- Schématické zobrazení

- Odpor (rezistor): norma ISO
- americká norma:



- Označen směr vtištěné síly - směr, kterým se uvnitř zdroje pohybují kladné náboje.
- (V elektrotechnice by šipka na zdroji byla opačná - pokles potenciálu)

Řešení složitých stacionárních obvodů



■ I. Kirchhoffovo pravidlo

Celkový stacionární proud vytékající z libovolného uzlu je roven 0.

$$I_1 + I_2 + \dots + I_N = 0$$

■ Vychází z rovnice kontinuity.

■ II. Kirchhoffovo pravidlo

Součet úbytků napětí na všech odporech ve smyčce je roven celkovému elektromotorickému napětí \mathcal{E} působícímu ve smyčce.

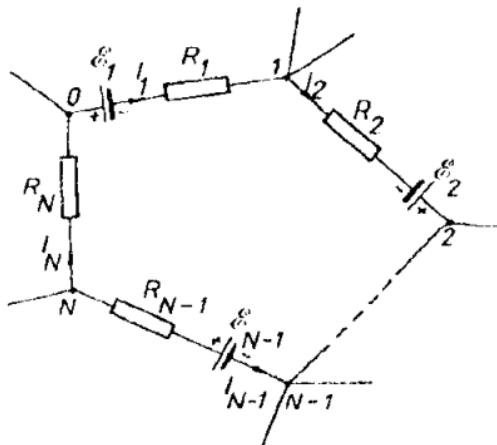
■ Vychází z Ohmova zákona.

■ Integrace podél smyčky:

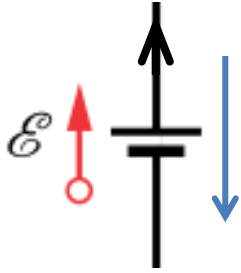
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_N \quad U_1 = R_1 I_1, \dots, U_N = R_N I_N$$

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2 + \dots + U_N$$

■ Volba směru integrace je libovolná - \mathcal{E} , U_i mohou být kladné i záporné podle směru proudu ve větvi a směru intenzity vtištěné síly



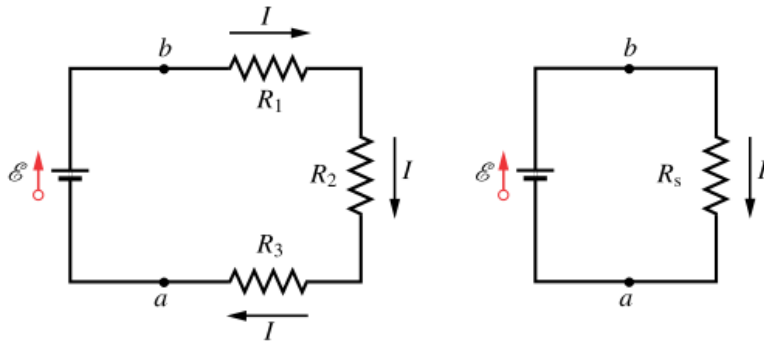
Obvody - znaménko u zdroje



- Směr elektromotorické síly - nutno brát záporně (Walker, Resnick, Halliday)
- Anebo nakreslit šipku + → -, a brát kladně
- obojí při „kladném“ průchodu smyčkou

$$U_1 + U_2 + \dots + U_N - \mathcal{E} = 0$$

Sériové zapojení rezistorů



- Rezistory prochází stejný proud.
- Celkové přiložené napětí je rovno součtu úbytků napětí na rezistorech.

$$\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 - IR_3 = 0,$$

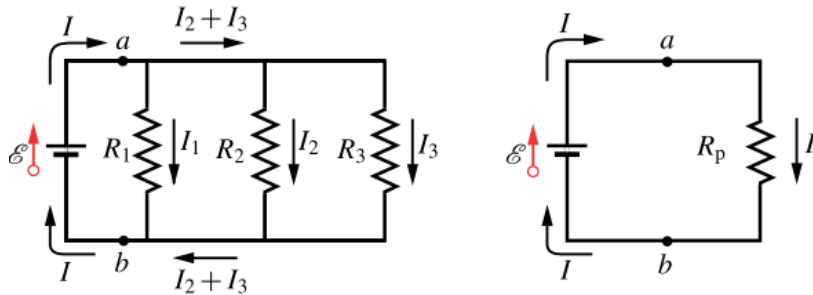
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_s}$$

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_s = \sum_{j=1}^n R_j \quad (n \text{ rezistorů zapojených sériově}).$$

Paralelní zapojení rezistorů



- Napětí na rezistorech stejné.
- Celkový proud je roven součtu proudu ve větvích.

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U}{R_3}$$

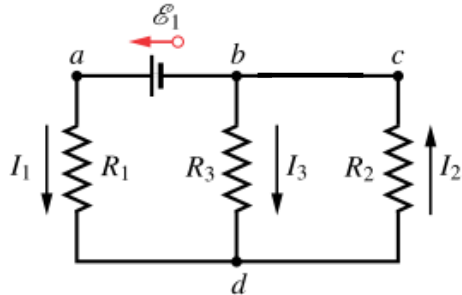
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$I = \frac{U}{R_p}$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \quad (n \text{ rezistorů zapojených paralelně}).$$

Obvody - metoda nezávislých smyček (obvodových proudů)



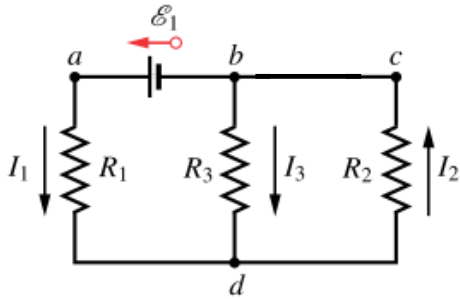
- Skutečný počet nezávislých rovnic podle Kirchhoffových pravidel???
- El. obvod = graf - u uzlů, v větví.

- Počet nezávislých uzlů: $(u - 1) \Rightarrow$ automaticky máme zahrnuto $(u - 1)$ rovnic podle I. K. p.
(přesněji: odečítáme počet galvanicky oddělených částí sítě, -1 pokud je celá síť galvanicky propojena)
- Počet nezávislých větví: $s = v - (u - 1) \Rightarrow s$ rovnic podle II. K. p.
- **Proudy nezávislými smyčkami jsou nezávislé** - proud společnou větví je **superpozicí** proudů nezávislými smyčkami, jejichž je větev součástí.
- Prochází-li smyčkový proud zdrojem proudu, je přímo roven tomuto proudu. Máme-li tedy obvod, kde se zdroj proudu vyskytuje, je vhodné jeden ze smyčkových proudů (a jenom jeden) vést tímto zdrojem. Zredukujeme tak počet potřebných rovnic.

Obvody - metoda nezávislých smyček (obvodových proudů)

- Jiné metody určení počtu nezávislých větví **s**:
- **metoda úplného stromu**: vytvoříme tzv. úplný strom, tj. podmnožinu sítě s následujícími vlastnostmi:
 - (a) všechny uzly původní sítě jsou propojeny větvemi úplného stromu,
 - (b) vlastnost (a) se ztrácí po vyjmutí libovolné větve úplného stromu.Počet větví, které musíme k úplnému stromu dodat, abychom dostali původní síť je pak roven počtu nezávislých smyček.
- **grafická metoda**: schéma obvodu překreslíme do roviny tak, aby nedocházelo ke křížení spojovacích vodičů bez vodivého spojení (tj. vodiče se mohou křížit jenom v uzlu). Pak počet nezávislých smyček je dán počtem "okének" v rovině nákresu, která jsou ohraničena větvemi sítě.

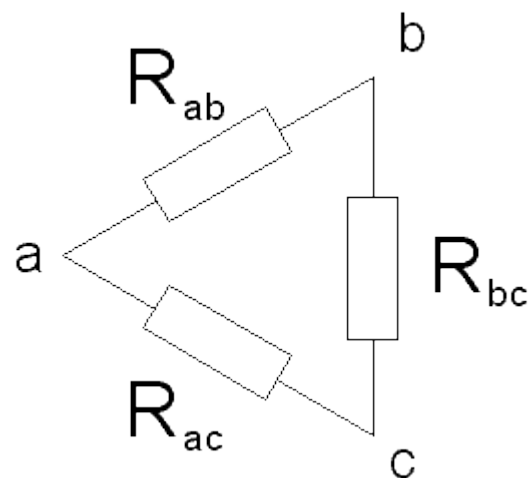
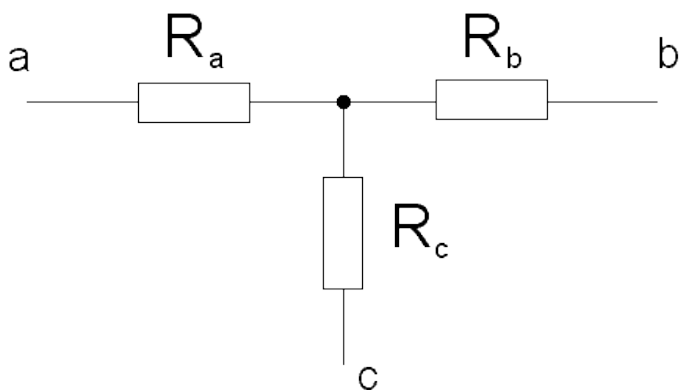
Obvody - metoda uzlových napětí



- Zvolíme si referenční uzel s potenciálem $\varphi_{ref} = 0$.
- Ostatní uzly jsou nezávislé, je na nich potenciál $\varphi_i - \varphi_{ref}$.
- Máme-li několik galvanicky oddělených částí, musíme vybrat referenční uzel v každé části sítě.
- Takto stanovená napětí automaticky splňují II. K. p.
- Vyjádříme proudy ve větvích podle Ohmova zákona
- Aplikujeme I. K. p.

Obvody - další možnosti zjednodušení

- Záměna hvězda - trojúhelník



- Odpor strany trojúhelníka je roven součtu 3 možných součinů odporů větví hvězdy dělenému odporem protilehlé strany hvězdy.

$$R_{ab} = (R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a) / R_c$$

- Odpor větve hvězdy je roven součinu odporů asociovaných větví trojúhelníka (větví, které mají společný stejný vrchol) dělenému součtem odporů všech tří stran trojúhelníka.

$$R_a = R_{ab} R_{ca} / (R_{ab} + R_{bc} + R_{ca})$$

Obvody - další možnosti zjednodušení

- Mějme lineární síť, ve které je jenom jeden zdroj napětí, ostatní prvky jsou pasivní; předpokládejme, že zdroj je zapojen v k -té větvi. Studujme nyní proud v l -té větvi sítě.

Věta o reciprocitě: stejný proud, jaký vyvolá zdroj v l -té větvi, vyvolá tentýž zdroj v k -té větvi, zapojíme-li ho do l -té větve (a svorky zdroje v k -té větvi spojíme nakrátko).

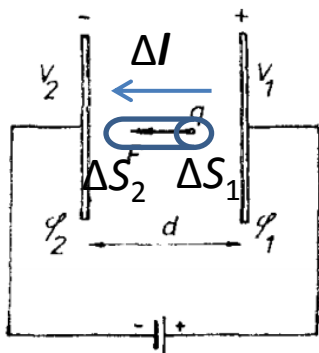
- **Propojovací pravidlo:**

Mějme symetrickou síť, z jejíhož schématu je na první pohled evidentní, že v ní existuje alespoň jedna dvojice uzlů, které jsou na stejném potenciálu.

Pak se **poměry v síti nezmění, propojíme-li tyto dva uzly zkratem.**

- **Příklady:** *D. Slavínská a kol.: Sběrka úloh z elektřiny a magnetismu, MFF UK*

Práce a výkon pro konvekční proud



- Mezi elektrodami napětí $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathbf{E} \cdot \Delta l$
- Síla na částici s nábojem q : $F = qE$
- Získá kinetickou energii (rovnou ztrátě potenciální energie) na dráze d : $W = qU$
- energii odevzdá při nárazu na elektrodu.
- Výkon dodávaný zdrojem elektrického pole:

$$N = UI$$

■ Diferenciální forma vztahu:

- Pp. úzká proudová trubice $\Delta S_1, \Delta S_2$

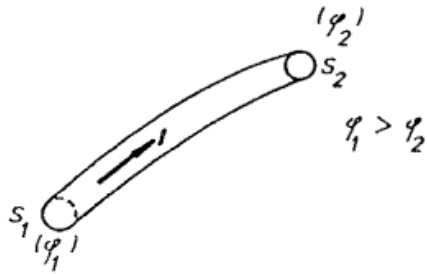
$$\Delta U = \mathbf{E} \cdot \Delta l, \quad \Delta W = \Delta Q (\mathbf{E} \cdot \Delta l), \quad \Delta Q = \Delta t (\mathbf{j} \cdot \Delta S)$$

$$(\mathbf{j} \cdot \Delta S) (\mathbf{E} \cdot \Delta l) \Delta t = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) (\Delta S \cdot \Delta l) \Delta t$$

$$n = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

- Hustota výkonu elektrického pole

Práce a výkon pro **kondukční** proud



- Mezi elektrodami napětí $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathbf{E} \cdot \Delta l$
- S_1, S_2 - ekvipotenciální plochy

- Joulův zákon:

Ve vodiči protékaném proudem vzniká (Jouleovo) teplo.

- Tepelný výkon:
v integrálním tvaru:

$$N = UI = \frac{U^2}{R} = RI^2$$

- v diferenciálním tvaru:

$$n = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}$$

- Konvekční vs. kondukční proud**

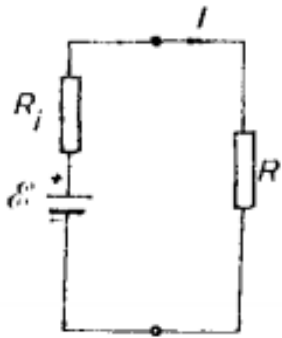
- u konvekčního proudu není odpor a tedy nevzniká Jouleovo teplo

Práce a výkon v elektrickém obvodu

$$R_i I^2 + R_e I^2 = \mathcal{E} I$$

- Levá strana vyjadřuje Jouleovou teplo vznikající na odporech.
 - $N_z = \mathcal{E} I$ - výkon dodávaný do obvodu zdrojem
 - $n_z = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*$ - hustota výkonu
-
- Do obvodu je dodávána energie výhradně prací vtištěných sil.
 - Ta je konána na úkor jiných forem energie.

Výkonové přizpůsobení spotřebiče

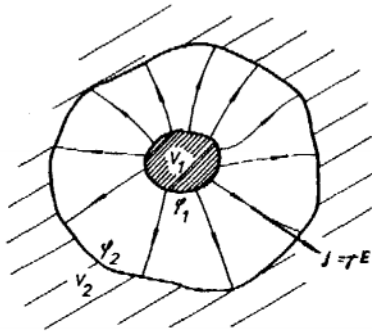


- Ke zdroji s vnitřním odporem R_i je připojen spotřebič s odporem R .
- Výkon dodávaný zdrojem:

$$N(R) = RI^2 = \frac{R}{(R + R_i)^2} \mathcal{E}^2$$

- Maximum pro $R = R_i$, tj. spotřebič je výkonově přizpůsoben zdroji.

Vztah odporu a kapacity kondenzátoru s dielektrikem



- Vodič o objemu V_1 je obklopen vodičem o objemu V_2 , mezi nimi je dielektrikum s permitivitou ϵ a vodivostí γ .
- Na vodiče jsou přivedeny náboje stejné velikosti a opačného znaménka Q .

$$Q = CU$$

$$Q = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \gamma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$R = \frac{\epsilon}{\gamma C}$$

- Gaussův zákon:

- Proud:

- Lze využít vztahy specifické jen pro stacionární pole, tak vztahy platné též pro elektrostatiiku.