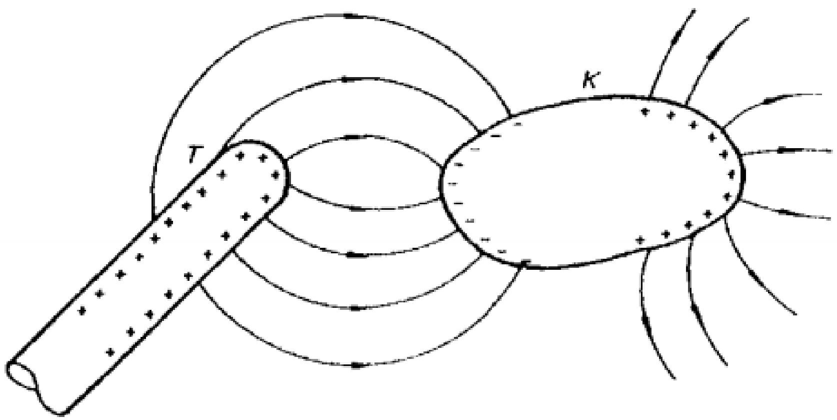
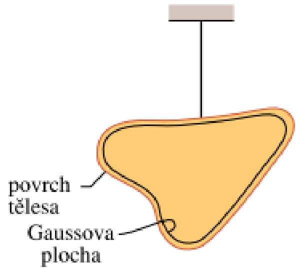
Vodič v elektrostatickém poli

- Náboje ve vodiči jsou volně pohyblivé.
- Při vložení vodiče do elektrostatického pole reagují náboje (jejich rozmístění) na toto pole.
- = elektrostatická indukce.



- Výsledné elektrostatické pole je dáno výsledným rozmístěním nábojů.
- V elektrostatice neřešíme kinetiku - průběh ustavování rovnováhy.

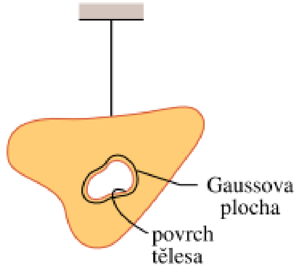
Nabitý izolovaný vodič



Měděné těleso nesoucí náboj Q je zavěšené na nevodivém vlákně. Gaussova plocha se nachází těsně pod povrchem tělesa.

- Uvnitř vodiče ***E***=0 -- jinak by na volné elektrony působila síla a vodičem by protékal proud $\Rightarrow$ ***E***=0 na Gaussově ploše $\Rightarrow$ z G.z. náboj uzavřený Gaussovou plochou *Q*=0.
- Potenciál v celém vodiči je konstantní.
- Náboje se ve vodiči rozmístí tak, aby svým polem kompenzovaly vnější elektrostatické pole.
- Při změně vnějšího pole dojde ke změně rozmístění volných nábojů.

Nabitý izolovaný vodič s dutinou

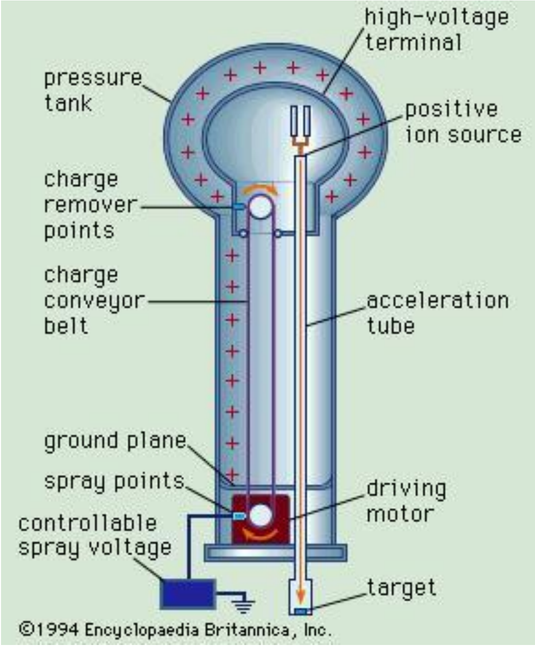


V tělese je nyní vytvořena dutina. Gaussova plocha se nachází v tělese a těsně obepíná dutinu.

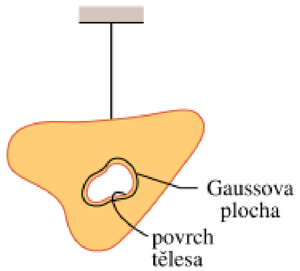
$\boldsymbol{E}$ =0 na Gaussově ploše $\Rightarrow$ z G.z. náboj uzavřený Gaussovou plochou Q=0.

Všechen přivedený náboj je tedy rozložen na vnějším povrchu vodiče.

Aplikace: Van de Graafův generátor:



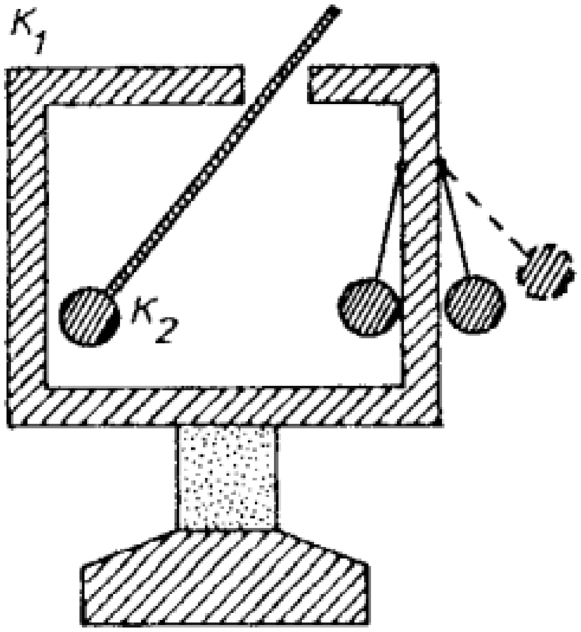
Nabitý izolovaný vodič s dutinou



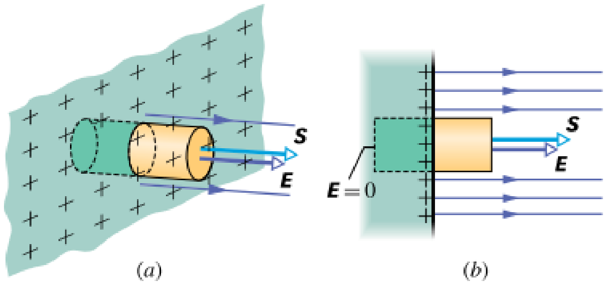
V tělese je nyní vytvořena dutina. Gaussova plocha se nachází v tělese a těsně obepíná dutinu.

E =0 na Gaussově ploše $\Rightarrow$ z G.z. náboj uzavřený Gaussovou plochou *Q*=0.
Všechen přivedený náboj je tedy rozložen na vnějším povrchu vodiče.

Aplikace: Faradayova klec:



Elektrické pole těsně nad povrchem vodiče



Na obecném povrchu je obecně v různých bodech různá hustota náboje ***σ*.**
Gaussova plocha ve tvaru nízkého válečku, podstavy rovnoběžné s povrchem vodiče.

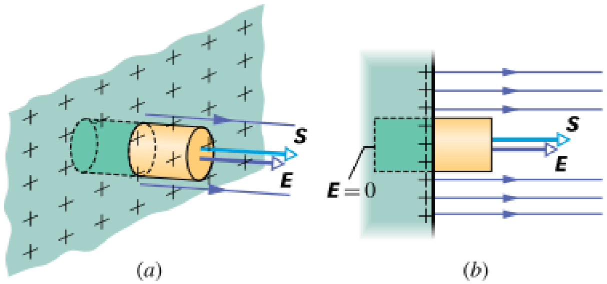
Podle G. z. (tok podstavou):

$$\varepsilon_0 E S = \sigma S,$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{(vodivý povrch)}.$$

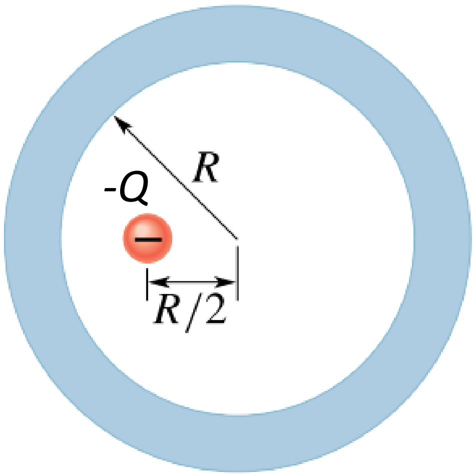
též: Coulombova věta

Elektrické pole těsně nad povrchem vodiče

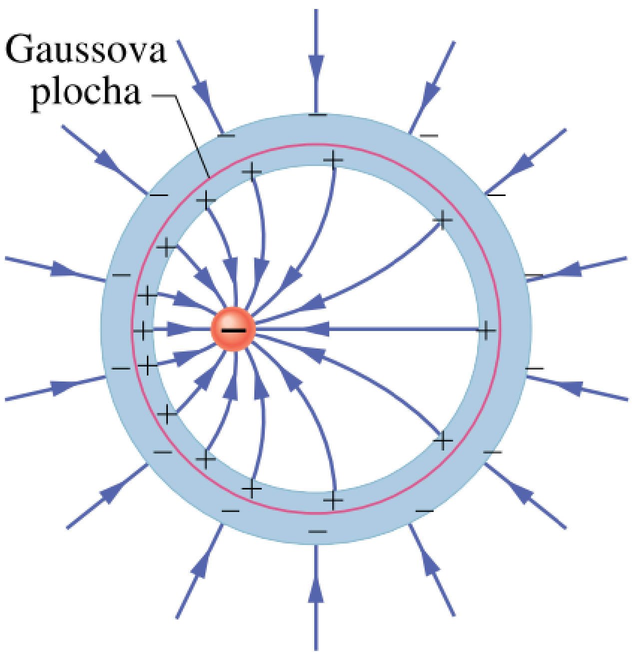


V případě nerovinného povrchu vodiče lze tento příklad považovat za aproximaci - volíme průměr válečku dostatečně malý, aby povrch bylo možné považovat za rovinný.
El.-stat. pole je vždy kolmé k povrchu $\Rightarrow$
v místě velkých nerovností povrchu - velká nehomogenita pole.
Siločáry u hran a ostrých výstupků se zhušťují - velké lokální pole = velký gradient potenciálu = velký rozdíl potenciálu mezi blízkými místy = vysoké napětí.

Kulová kovová vrstva, náboj v dutině



Jaké náboje budou indukovány na její vnitřní a vnější stěně, je-li vrstva elektricky neutrální?

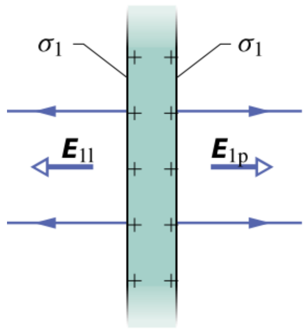


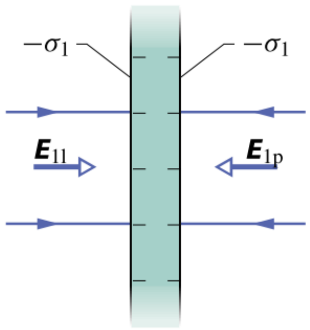
Na vnitřní stěně se indukuje náboj +*Q*,
Nerovnoměrné rozložení.

.

Na vnější stěně se indukuje náboj -*Q*.
Rovnoměrné rozložení!!!!

Tenké vodivé desky

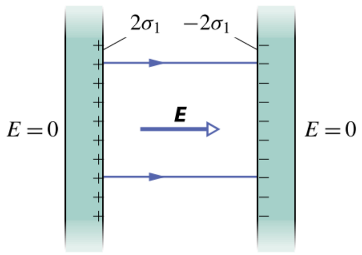




Řezy tenkými, nekonečnými vodivými deskami, na něž je přiveden kladný, resp. záporný náboj s plošnou hustotou σ_1.

$E_1 = \sigma_1/\varepsilon_0$

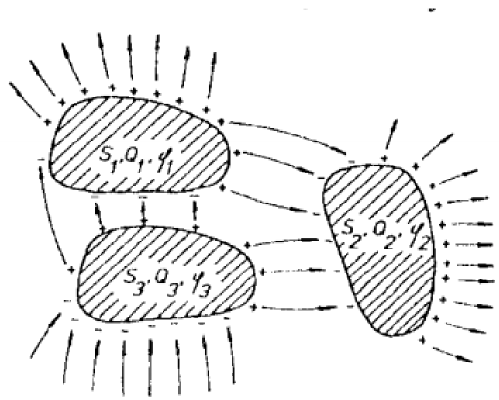
Roviny přisunuté k sobě:
Všechny volné náboje je přemístí na vnitřní povrchy



$$E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Homogenní pole ***E***.

Základní úloha elektrostatiky



Vodivá tělesa v prostoru, charakterizovaná tvarem, nesou náboj Q_i, který bude rozložen na povrchu (σ_i), a potenciálem φ_i.

Intenzita náboje u povrchu: $E = \sigma / \varepsilon_0$

Tok intenzity:

$$\Phi_i = \oint_{G_i} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_{G_i} \sigma \,\mathrm{d}S = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

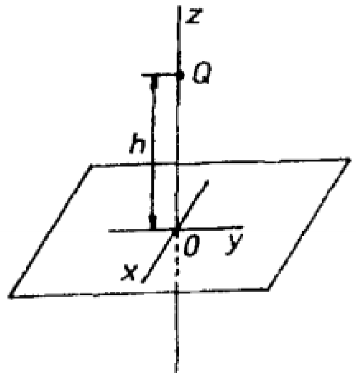
Najít elektrostatický potenciál φ (r) jako funkci definovanou a spojitou se svými derivacemi až do druhého řádu v daném uzavřeném objemu nebo v celém prostoru, která vyhovuje Laplaceově rovnici

$$\Delta\varphi = 0$$

a okrajovým podmínkám

1. $(\varphi)_{S_i} = \varphi_i$, *resp.* $\varepsilon_0 \oint_{S_i} \mathrm{grad}\,\varphi.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -Q_i$,
2. $\varphi = 0$ *na hranici objemu* , *resp.* $\lim_{r\to\infty} \varphi(\boldsymbol{r}) = 0$. (φ_i, *popř.* Q_i, *jsou přitom zadané hodnoty.*)

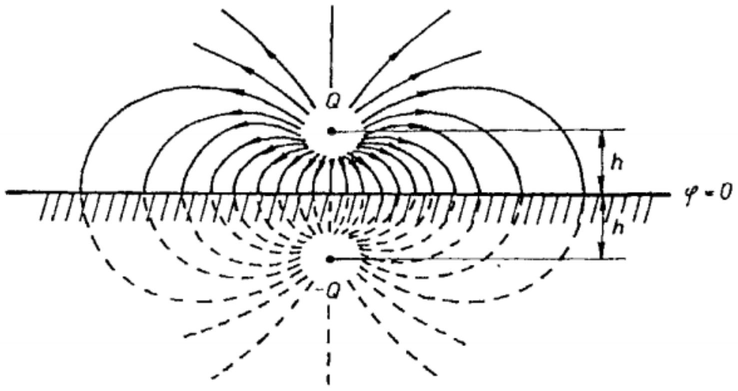
Příklad: náboj nad vodivou plochou



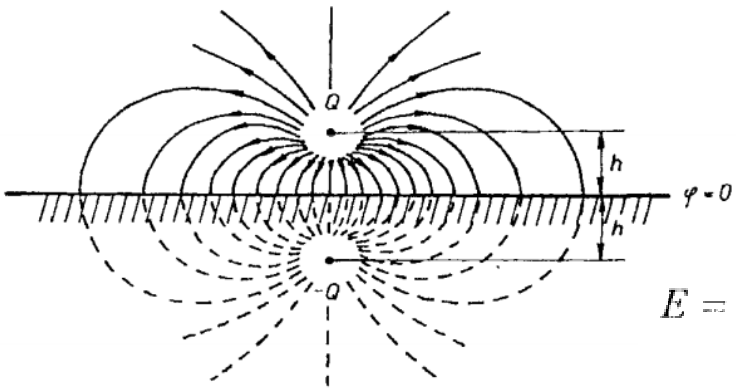
- Vodivá plocha je uzemněna - $\varphi = 0$.
- Hledáme pole v poloprostoru nad rovinou, který obsahuje náboj Q.
- Hledáme φ: $\Delta\varphi = 0$

  $\varphi = 0$ na povrchu roviny

- Rovinnou ekvipotenciální plochu má pole elektrického dipólu.
- Rovinu s indukovaným nábojem nahradíme soustavou nábojů v opačném poloprostoru, které na hranici vytváří stejné pole = **elektrostatické zobrazení**.



Příklad: náboj nad vodivou plochou

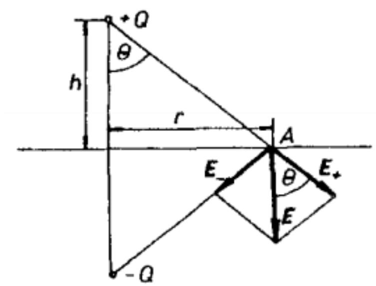


- dipól $p = 2hQ$
- pro z>>h: pole bodového dipólu, umístěného na rovině
- pole na rovině:

$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{r^2+h^2}\cos\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Qh}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}$$

- Plošná hustota náboje na rovině (z Coulombovy věty):

$$\sigma = \varepsilon_0 E = -\frac{Qh}{2\pi\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}$$



- Lze zintegrovat přes celou roviny: celkový náboj = -*Q*.

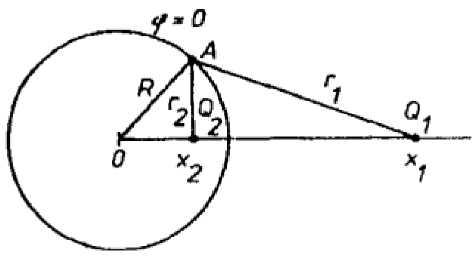
$$Q_{\text{ind}} = \int_0^\infty \sigma\, 2\pi r\, \mathrm{d}r = -Q\int_0^\infty \frac{h\, r\, \mathrm{d}r}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}} = -Q$$

- Síla F, kterou je náboj přitahován k rovině a energie soustavy:

$$F_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4h^2}\,, \qquad W = \int_\infty^h \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2\,\mathrm{d}z}{4z^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4h}$$

- *W* je poloviční ve srovnání se soustavou 2 nábojů!!!!

Příklad: náboj Q_1 poblíž vodivé koule



- Vodivá koule je uzemněna - $\varphi = 0$.
- Hledáme pole koule fiktivním nábojem Q_2.
  (kulové elektrostatické zobrazení)
- V lib. bodě kulové plochy musí platit:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right) = 0$$

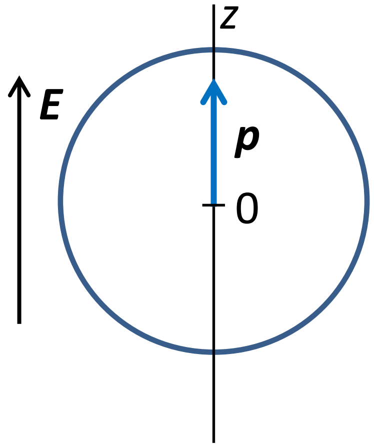
$$Q_2 = -\frac{r_2}{r_1} Q_1$$ pro všechny body kulové plochy

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{x_2}{R} = \frac{R}{x_1}$$ x_1, x_2 splňují podmínku kulové inverze $x_1 x_2 = R^2$

$$x_2 = \frac{R^2}{x_1}\,, \qquad Q_2 = -\frac{x_2}{R} Q_1$$ Musíme zvolit takové x_2, Q_2.

- Pole vně koule odpovídá poli těchto bodových nábojů

Příklad: Vodivá koule v elektrostatickém poli



- Hledáme soustavu nábojů, které budou mít v homogenním poli kulovou ekvipotenciální plochu.
- dipól ***p*** ve středu koule

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -E_0 z + \frac{p z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

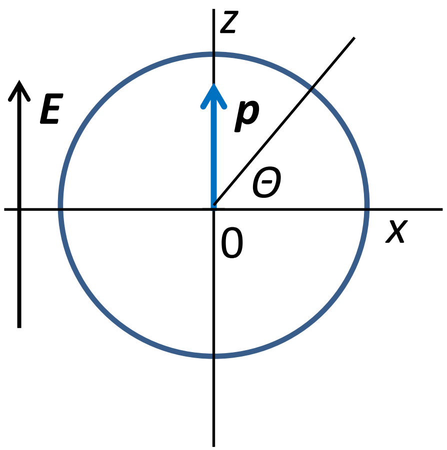
zvolíme: $p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = E_0\left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right)z \ , \qquad \text{kde} \quad z = r\cos\theta$$

pro $r = R \Rightarrow \varphi = 0$

- Vodivá koule se v homogenním poli zpolarizuje a chová se jako dipól ve svém středu.

Příklad: Vodivá koule v elektrostatickém poli



Složky pole:

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta\cos\theta}{R^3}, \qquad E_z = E_0 + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos^2\theta - 1}{R^3}$$

normálová složka: $E_n = E_x\sin\theta + E_z\cos\theta$

tečná složka: $E_t = E_z\sin\theta - E_x\cos\theta$

hraniční podmínka: $$\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + E_0\cos\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

plošná hustota náboje: $$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

náboj na každé polokouli: $Q = 3\pi\varepsilon_0 E_0 R^2$

těžiště náboje polokoule: 2*R*/3 od středu

Kapacita

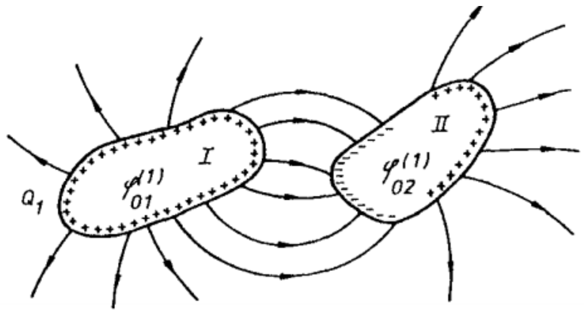
- Izolované vodivé těleso nabité nábojem Q budí v okolí potenciál φ .
- Zvýšení náboje $Q' = AQ \Rightarrow \varphi' = A\varphi$.
- Poměr $\frac{Q}{\varphi_0} = C = konst$ (φ_0 je potenciál na povrchu tělesa).

  C ... kapacita
  [*C*] = C/V = F .... farad

- Kapacita je schopnost osamoceného vodiče shromažďovat elektrický náboj.

- Závisí jen na jeho velikosti a tvaru.

Kapacita soustavy vodičů



- Těleso I nabité (Q_1), těleso II nenabité.

$$\varphi_{01}^{(1)} = B_{11} Q_1, \qquad \varphi_{02}^{(1)} = B_{21} Q_1$$

- Těleso II nabité (Q_2), těleso I nenabité.

$$\varphi_{01}^{(2)} = B_{12} Q_2, \qquad \varphi_{02}^{(2)} = B_{22} Q_2$$

- Obecný případ: Těleso I nabité (Q_1), těleso II nabité (Q_2).

$$\varphi_{01} = \varphi_{01}^{(1)} + \varphi_{01}^{(2)} = B_{11} Q_1 + B_{12} Q_2$$

$$\varphi_{02} = \varphi_{02}^{(1)} + \varphi_{02}^{(2)} = B_{21} Q_1 + B_{22} Q_2$$

$B_{ik} = B_{ki}$ - potenciálové koeficienty

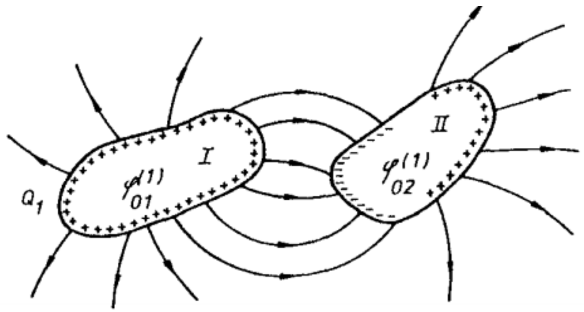
Řešení pro Q_i:

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2$$
$$Q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2$$

C_{ii} kapacitní koeficienty, $C_{ik} = C_{ki}$ - influenční koeficienty

lze rozšířit pro N vodivých těles

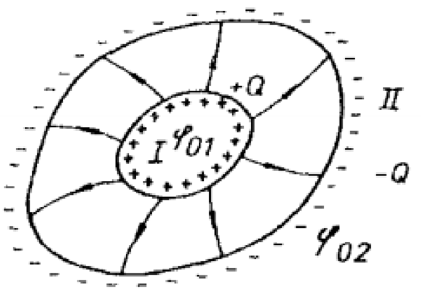
Kapacita soustavy vodičů



- $C_{ii} > C$ - přítomnost ostatních těles vede k poklesu potenciálu na tělese i
- $C_{ik} < 0$ - indukovaný náboj má opačné znaménko

- Dva vodiče vzájemně odstíněny: $C_{ik} = 0$.
- Jeden z vodičů uzemněný $C_{ik} = \infty$
- Vodič 2 zcela obklopuje vodič 1: $C_{ik} = -C_{11}$
  = kondenzátor

Kondenzátor



$$C = \frac{Q}{\varphi_{01} - \varphi_{02}} = \frac{Q}{U}.$$

- Elektrostatické pole je uzavřeno v dutině mezi dvěma vodiči.

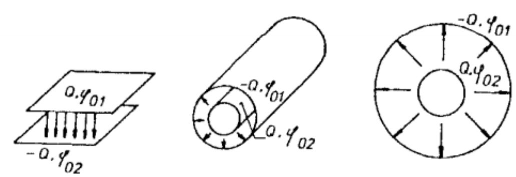
$$Q = C_{11}\varphi_{01} + C_{12}\varphi_{02}$$

$$-Q = C_{21}\varphi_{01} + C_{22}\varphi_{02}$$

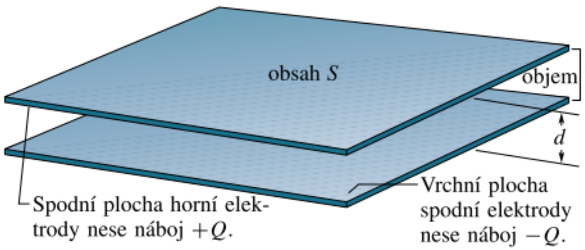
- pro Q = 0, $\varphi_{01} = \varphi_{02}$: $C_{12} = C_{21} = C_{11} = C_{22} = C$
- C : kapacita kondenzátoru ([C] = V/C = F)
- 2 vodiče: elektrody kondenzátoru

$$U = \varphi_{+} - \varphi_{-} = \varphi_{01} - \varphi_{02}$$

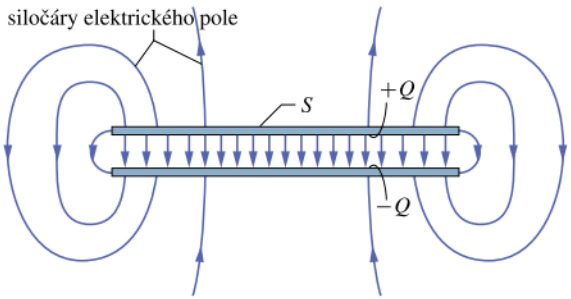
- různé druhy kondenzátorů - deskový, válcový a kulový

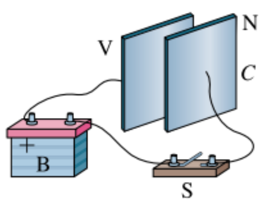


Deskový kondenzátor

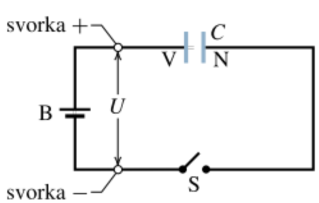


(a)





(a)



- Napětí mezi deskami:

$$U = +\int_{(+)}^{(-)} E\,\mathrm{d}s$$

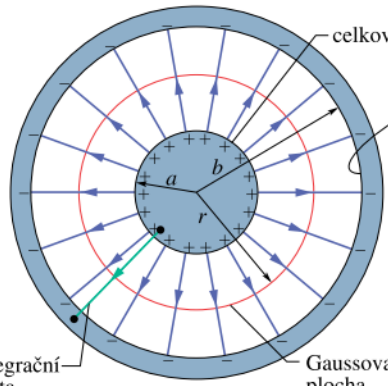
$$U = E\,d = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{S}d$$

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0\frac{S}{d}$$

- Nabíjení kondenzátoru: po sepnutí spínače se po určitém čase desky nabijí na rozdíl potenciálů odpovídající svorkovému napětí baterie.

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= 8{,}85.10^{-12} C^2.N^{-1}.m^{-2}\\ &= 8{,}85.10^{-12}\, kg^{-1}.m^{-3}.s^4.A^2\\ &= 8{,}85\ pF.m^{-1}\end{aligned}$$

Válcový kondenzátor



- Válec délky L, pp. L >> b, takže lze zanedbat nehomogenitu pole na koncích.

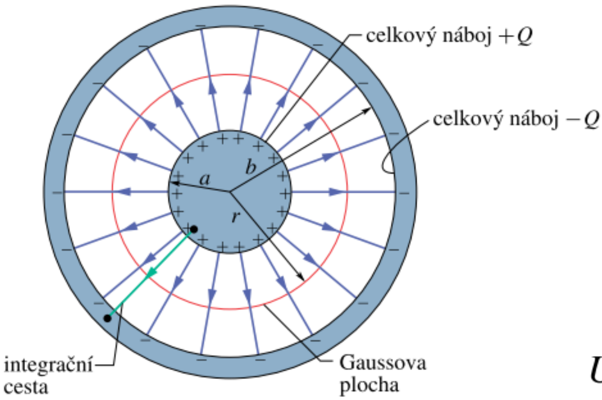
$$Q = \varepsilon_0 E S = \varepsilon_0 E (2\pi r L)$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}$$

$$U = \int_{(+)}^{(-)} E\,\mathrm{d}s = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{a}$$

$$\boxed{C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}}$$

Kulový kondenzátor



- Příčný řez kulovým kondenzátorem.

$$Q = \varepsilon_0 E S = \varepsilon_0 E (4\pi r^2)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

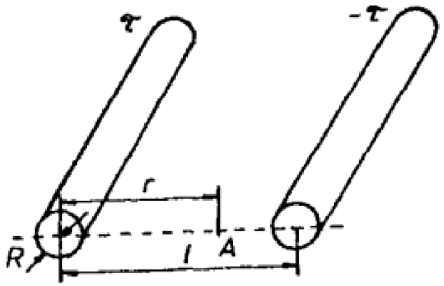
$$U = \int_{(+)}^{(-)} E \, \mathrm{d}s = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}}$$

- Kapacita koule o poloměru *R*: pro b $\rightarrow \infty$:

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

Kapacita dvoulinky



- Dva přímé rovnoběžné vodiče s lineární hustotou náboje τ.

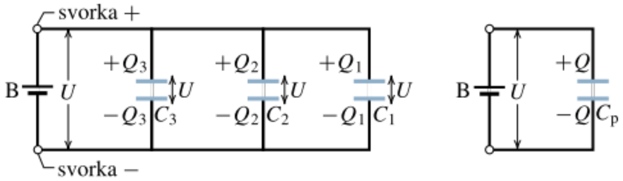
$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{l-r}\right)$$

$$U = \int_R^{l-R} E.dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_R^{l-R}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{l-r}\right)dr = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{l-R}{R}\right)$$

- Kapacita na jednotku délky:

$$C_l = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{l-R}{R}}$$

Paralelní zapojení kondenzátorů



- „Vedle sebe“ zapojení
- Na deskách všech kondenzátorů je stejné napětí.
- C_p - ekvivalentní kapacita jediného kondenzátoru

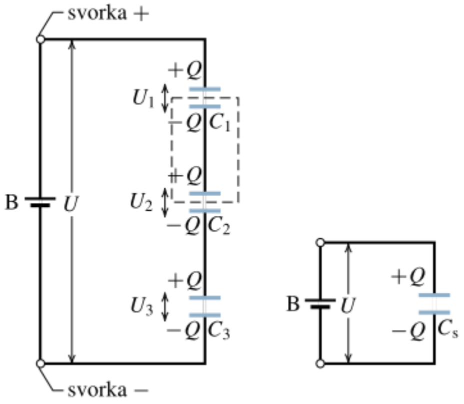
$$Q_1 = C_1 U, \quad Q_2 = C_2 U \quad \text{a} \quad Q_3 = C_3 U.$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U$$

$$C_\mathrm{p} = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2 + C_3.$$

$$C_\mathrm{p} = \sum_{j=1}^{n} C_j \qquad (n \text{ kondenzátorů spojených paralelně}).$$

Sériové zapojení kondenzátorů



- „Za sebou" zapojení.

$U = U_1 + U_2 + U_3$
$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} \quad \text{a} \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}.$$

$$C_s = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \quad \text{(pro kondenzátory spojené sériově).}$$

Energie soustavy nabitých vodičů

- Pp.: na vodiči je již náboj Q', má potenciál φ'.
- Práce vnější síly potřebná pro přivedení náboje:

$$W = \int_0^Q \varphi'_0 \, \mathrm{d}Q' = \frac{1}{C}\int_0^Q Q' \, \mathrm{d}Q' = \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2} = \frac{1}{2} C \varphi_0^2 = \frac{1}{2}\varphi_0 Q$$

- N vodičů: $$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \varphi_{0i} Q_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} B_{ik} Q_k Q_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} C_{ik} \varphi_{0k} \varphi_{0i} .}$$

- Pro kondenzátor: $U = \varphi_+ - \varphi_- = \varphi_{01} - \varphi_{02}$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} .}$$

- Pro deskový kondenzátor: w - objemová hustota energie

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 S d = \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2\right) V$$
$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

Energie soustavy nabitých vodičů 2

- Energie soustavy vodičů je rovna energii elektrostatického pole v prostoru mezi vodiči (uvnitř vodičů je pole nulové).

- Thomsonova věta:

Náboje na soustavě pevných vodičů obklopených nevodivým prostředím jsou v rovnovážném stavu rozloženy na povrchu těchto vodičů vždy tak, aby energie výsledného elektrostatického pole byla minimální.

- Earnshawova věta:

Nabité těleso nelze udržet ve stabilní rovnováze jen elektrickými silami.